

GODEAUX, LUCIEN (Liège, Belgique)

**SUR LA SINGULARITÉ D'UN POINT DE DIRAMATION  
D'UNE SURFACE ALGÈBRIQUE MULTIPLE**

Si l'on considère une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier n'ayant qu'un nombre fini de points unis, nous avons montré<sup>(1)</sup> que l'on peut en prendre comme modèle projectif une surface  $F$  d'un espace  $S_r$  à  $r$  dimensions sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie  $H$ , de période  $p$ , possédant  $p$  axes ponctuels dont un seul rencontre  $F$ , en un nombre fini de points: les points unis de l'involution.

Un point uni est dit de première ou de seconde espèce suivant que  $H$  détermine dans le plan tangent à  $F$  en ce point une homologie ayant ce point comme centre, vu une homographie non homologique.

La dimension  $r_0$  de l'espace  $\sigma_0$  axe de  $H$  rencontrant  $F$ , peut être choisie aussi grande que l'on veut et si l'on rapporte projectivement aux hyperplans d'un espace à  $r_0$  dimensions les hyperplans unis pour  $H$  ne contenant pas  $\sigma_0$ , on obtient une image  $\Phi$  de l'involution sur laquelle les points de diramation correspondant aux points unis sont isolés.

Le problème est de déterminer la structure des points unis et des points de diramation.

Si  $O$  est un point uni de seconde espèce, il existe sur  $F$  un certain nombre de suites de points infiniment voisins successifs de  $O$ , points unis de seconde espèce pour l'involution sauf le dernier de chaque suite qui est uni de première espèce. C'est cette sorte d'arbre qui constitue la structure du point uni  $O$ .

Le point de diramation  $O'$ , homologue de  $O$ , est singulier pour la surface  $\Phi$  et est, au point de vue des transformations birationnelles, équivalent à un ensemble de courbes rationnelles dont le degré virtuel est inférieur à  $-1$ . C'est cet ensemble qui constitue la structure du point de diramation  $O'$ .

Les points unis de première espèce qui terminent les suites de points unis d'origine  $O$  donnent évidemment naissance à ces courbes.

On pourrait croire a priori que la singularité du point  $O'$  pour  $\Phi$  est constituée par une suite de points infiniment voisins successifs de  $O'$  dont les multiplicités ne vont pas en croissant. Il n'en est rien comme le montre l'exemple qui va être développé. C'est ce qui fait d'ailleurs son intérêt. Nous avons indiqué cet exemple dans une communication faite au Congrès de l'Unione Matematica Italiana à Bari en septembre, 1971.

Une dernière remarque. Lorsque deux surfaces sont l'une projection de l'autre, deux courbes homologues seront désignées par le même symbole.

1. Commençons par rappeler quelques résultats exposés dans notre ouvrage sur les involutions cycliques cité plus haut.

Nous considérons donc une surface algébrique  $F$  dans un espace  $S_r$  transformée en soi par une homographie  $H$  de période  $p=2v+1$ , possédant  $p$  axes ponctuels  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$  dont le premier seul rencontre la surface  $F$ , en un nombre fini de points. Nous supposons  $p$  premier. Nous désignerons par  $r_0$  la dimension de  $\sigma_0$  et par  $C$  les courbes de  $F$  sections de cette surface par les hyperplans passant par  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ . Rapportons projectivement les courbes  $C$  aux hyperplans d'un espace à  $r_0$  dimensions. On obtient ainsi une surface  $\Phi$  image de l'involution en ce sens qu'un point de  $\Phi$  correspond à un groupe de l'involution. Le système  $|C|$  est dépourvu de points-base, par conséquent si  $n$  est l'ordre de la surface  $\Phi$ , le degré de  $|C|$ , c'est-à-dire l'ordre de la surface  $F$ , est égal à  $pn$ .

Soit  $O$  un point uni de seconde espèce, c'est-à-dire un point uni tel que le plan tangent à  $F$  en  $O$  rencontre en un point deux des espaces  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ . Il y a donc deux tangentes à  $F$  en  $O$  qui sont unies pour l'homographie  $H$ . Nous désignerons par  $O'$  le point de diramation homologue de  $O$  sur  $\Phi$ .

Les courbes  $C$  passant par  $O$ , courbes que nous désignerons par  $C^1$ , acquièrent en ce point une certaine multiplicité, les tangentes à ces courbes étant confondues avec  $a$  et  $b$ . Les courbes  $C^1$ , que nous appellerons  $C^2$ , assujetties à toucher en  $O$  une droite distincte de  $a$  et  $b$ , acquièrent en ce point une certaine multiplicité et ont comme tangentes  $a$  et  $b$  si  $p > 3$ . Par ce procédé répété, on forme une suite de systèmes linéaires

$$|C^1|, |C^2|, \dots, |C^v|$$

dont les multiplicités en  $O$  vont en croissant et dont les tangentes sont confondues avec  $a$  et  $b$ . Si l'on applique le procédé au système  $|C^v|$ , on obtient un système  $|C^{v+1}|$  dont les courbes ont en  $O$  la multiplicité  $p$  et des tangentes variables.

Désignons par  $\Gamma$  les sections hyperplanes de  $\Phi$ , par  $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^v$  les courbes qui correspondent sur  $\Phi$  respectivement aux courbes  $C^1, C^2, \dots, C^v$ , par  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_v$  les surfaces dont les sections hyperplanes sont respectivement les courbes  $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^v$ .

L'étude du comportement en  $O$  des courbes  $C^1, C^2, \dots, C^v$  peut être faite par les procédés indiqués dans notre ouvrage déjà cité. Nous ne reprendrons pas cette étude en détail pour ne pas allonger ce travail.

2. Nous allons considérer le cas d'une involution  $I$  d'ordre 31 et nous supposerons que dans le plan tangent à  $F$  en un point uni  $O$  l'homographie  $H$  détermine l'homographie d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{23} x_3,$$

le point  $O$  étant donné par  $x_1 = x_2 = 0$  et  $\varepsilon$  étant une racine primitive d'ordre 31 de l'unité.

Rappelons que les multiplicités des courbes  $C^1, C^2, \dots, C^n$  sont données par les solutions en nombres entiers positifs de la congruence

$$\lambda + 23\mu \equiv 0 \pmod{31},$$

telles que  $\lambda + \mu$  soit inférieur à 31. Ces solutions doivent être rangées en ordre croissant des sommes  $\lambda + \mu$ .

La solution donnant la somme  $\lambda + \mu$  la plus petite est  $\lambda = 1, \mu = 4$ . Les courbes  $C^1$  ont donc en  $O$  la multiplicité cinq, une tangente étant confondue avec  $a$  et les quatre autres avec  $b$ .

Dans notre ouvrage, nous avons introduit les notations suivantes: Nous désignons par  $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots$  les points infiniment voisins successifs de  $O$  situés sur une branche linéaire d'origine  $O$ , le point  $(\alpha, 1)$  étant situé sur la droite  $a$ , par  $(\beta, 1), (\beta, 2), \dots$  les points infiniment voisins successifs de  $O$ , situés sur une branche linéaire d'origine  $O$ , le point  $(\beta, 1)$  étant situé sur la droite  $b$ . De plus, si le point  $(\alpha, k)$  par exemple est uni de seconde pour l'involution  $I$ , il existe dans son domaine du premier ordre deux points unis: l'un est le point  $(\alpha, k+1)$ , l'autre sera désigné par  $(\alpha, k, 1)$ . Si ce point est à son tour uni de seconde espèce pour  $I$ , les points unis infiniment voisins seront désignés par  $(\alpha, k, 2)$  et  $(\alpha, k, 1, 1)$ . Et ainsi de suite et de même pour les points de la suite  $\beta$ .

Avec ces symboles, on voit que les courbes  $C^1$  ont un point quintuple en  $O$  et passent: une fois par les points  $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, 26)$ , quatre fois par  $(\beta, 1)$ , deux fois par  $(\beta, 2)$ , une fois par  $(\beta, 3), (\beta, 4), \dots, (\beta, 22)$ , une fois par  $(\beta, 2, 1), (\beta, 2, 2)$ .

Tous ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf les derniers  $(\alpha, 26), (\beta, 22), (\beta, 2, 2)$  qui sont unis de première espèce.

Aux domaines du premier ordre de chacun de ces points correspondent respectivement sur la surface  $\Phi_1$  une droite  $\rho_1$ , une droite  $\rho_2$  et une droite  $\tau$ . On a la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma^1 + \rho_1 + \tau + \rho_2$$

et le point  $O'$  est triple pour la surface  $\Phi$ , le cône tangent projetant de ce point l'ensemble de ces trois droites.

Les droites  $\rho_2$  et  $\tau$  se rencontrent en un point. On verra plus loin que  $\rho_1$  rencontre  $\tau$  mais ne rencontre pas  $\rho_2$ . Dans ces conditions, les droites  $\rho_1, \rho_2$  et  $\tau$  ont respectivement pour degrés virtuels  $-2, -2, -3$ .

Le degré du système  $|C|$  est égal à  $31(n-3)$  et la surface  $\Phi_1$  est d'ordre  $n-3$ .

3. Le système  $|C^2|$  correspond à la solution  $\lambda = 8, \mu = 1$ . Ses courbes passent donc 9 fois par le point  $O$  et une fois par les points  $(\beta, 1), (\beta, 2), \dots, (\beta, 22)$ , trois fois par le point  $(\alpha, 1)$ , deux fois par les points  $(\alpha, 2), \dots, (\alpha, 10)$ , une fois par les points  $(\alpha, 11), (\alpha, 11, 1)$ , une fois par  $(\alpha, 1, 1), \dots, (\alpha, 1, 5)$ .

Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution sauf les points  $(\beta, 22), (\alpha, 1, 5)$  et  $(\alpha, 11, 1)$  qui sont unis de première espèce. Aux domaines du premier ordre des deux derniers de ces points correspondent sur la surface  $\Phi_2$  respectivement deux droites  $\rho_3$  et  $\rho_4$ . On en conclut que la surface  $\Phi_2$  est la projection de la surface  $\Phi_1$  à partir d'un point  $O'_1$  intersection des droites  $\rho_1$  et  $\tau$  (dont l'existence avait été admise plus haut). Ce point est double bipla-

naire pour la surface  $\Phi_1$ , les plans tangents projetant de ce point les droites  $\rho_3$  et  $\rho_4$ , qui se rencontrent en un point.

Sur la surface  $\Phi_2$ , on a

$$\Gamma^1 \equiv \Gamma^2 + \rho_3 + \rho_4$$

et les droites  $\rho_3, \rho_4$  ont le degré virtuel égal à  $-2$ .

La surface  $\Phi_2$  contient en outre une droite  $\rho_2$  projection de la droite  $\rho_2$  existant sur la surface  $\Phi_1$ .

Le système  $|C^2|$  a le degré  $31(n-5)$  et la surface  $\Phi_2$  est d'ordre  $n-5$ .

4. Les courbes  $C^3$  correspondent à la solution  $\lambda=2, \mu=8$ . Elles passent donc dix fois par le point  $O$  et deux fois par les points  $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \dots, (\alpha, 10)$ , une fois par  $(\alpha, 11)$  et  $(\alpha, 11, 1)$ , huit fois par  $(\beta, 1)$ , quatre fois par  $(\beta, 2)$ , deux fois par  $(\beta, 3), \dots, (\beta, 6)$ , une fois par  $(\beta, 7), (\beta, 7, 1)$ , deux fois par  $(\beta, 2, 1), (\beta, 2, 2)$ .

Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution sauf les points  $(\alpha, 11, 1), (\beta, 7, 1)$  et  $(\beta, 2, 2)$ , qui sont unis de première espèce. Aux domaines du premier ordre de ces points correspondent sur la surface  $\Phi_3$  respectivement une droite  $\rho_4$ , une droite  $\rho_5$  et une conique qui correspondent point par point à la droite  $\tau$  de  $\Phi_1$  et que nous désignerons par le même symbole.

La surface  $\Phi_3$  est la projection de la surface  $\Phi_2$  à partir du point  $O'_2$  commun aux droites  $\rho_2$  et  $\rho_3$ . Ce point est triple pour la surface  $\Phi_2$ , le cône tangent projetant la droite  $\rho_5$  et la conique  $\tau$ . Il importe de remarquer que le point de  $\Phi_1$  infiniment voisin de  $O'_1$  a pour projection sur  $\Phi_2$  non le point  $O'_2$  mais le point commun aux droites  $\rho_3$  et  $\rho_4$ .

Sur la surface  $\Phi_3$ , on a la relation fonctionnelle

$$\Gamma^2 \equiv \Gamma^3 + \tau + \rho_5$$

et  $\rho_5$  a le degré virtuel égal à  $-2$ .

La surface  $\Phi_3$  a l'ordre  $n-8$ , le système  $|C^3|$  ayant le degré  $31(n-8)$ .

5. Le système  $|C^4|$  correspond à la solution  $\lambda=9, \mu=5$ . Ses courbes ont donc la multiplicité 14 en  $O$  et passent quatre fois par  $(\alpha, 1)$ , trois fois par  $(\alpha, 2), \dots, (\alpha, 5)$ , une fois par  $(\alpha, 6), (\alpha, 6, 1), (\alpha, 6, 2)$ , une fois par  $(\alpha, 1, 1), \dots, (\alpha, 1, 5)$ , cinq fois par  $(\beta, 1)$ , trois fois par  $(\beta, 2)$ , deux fois par  $(\beta, 3), \dots, (\beta, 6)$ , une fois par  $(\beta, 7), (\beta, 7, 1)$  enfin une fois par  $(\beta, 2, 1), (\beta, 2, 2)$ .

Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf les points  $(\alpha, 6, 2), (\alpha, 1, 5), (\beta, 7, 1), (\beta, 2, 2)$  qui sont unis de première espèce. Il correspond aux domaines du premier ordre de ces points, sur la surface  $\Phi_4$ , respectivement les droites  $\rho_6, \rho_3, \rho_5$  et  $\tau$ . La surface  $\Phi_4$  est la projection de la surface  $\Phi_3$  à partir d'un point  $O'_4$  commun à la droite  $\rho_4$  et à la conique  $\tau$ . Ce point est double biplanaire pour la surface  $\Phi_3$ , les plans tangents projetant de ce point les droites  $\rho_3$  et  $\rho_6$ .

Sur la surface  $\Phi_4$ , on a

$$\Gamma^3 \equiv \Gamma^4 + \rho_3 + \rho_4$$

et le degré virtuel de la droite  $\rho_6$  est égal à  $-2$ .

Le système  $|C^4|$  a le degré  $31(n-10)$  et la surface  $\Phi_4$  est d'ordre  $n-10$ .

6. Le système  $|C^5|$  correspond à la solution  $\lambda=3$ ,  $\mu=10$ . Les courbes  $C^5$  ont la multiplicité 15 en  $O$  et passent trois fois par  $(\alpha, 1), \dots, (\alpha, 5)$ , une fois par  $(\alpha, 6), (\alpha, 6, 1), (\alpha, 6, 2)$ , cinq fois par  $(\beta, 1)$ , deux fois par  $(\beta, 2), \dots, (\beta, 6)$ , une fois par  $(\beta, 7), (\beta, 7, 1)$ , trois fois par  $(\beta, 1, 1), (\beta, 1, 2)$ , une fois par  $(\beta, 1, 3), (\beta, 1, 3, 1), (\beta, 1, 3, 2)$ .

Seuls les points  $(\alpha, 6, 2), (\beta, 7, 1), (\beta, 1, 3, 2)$  sont unis de première espèce, les autres le sont de seconde espèce. Il correspond sur la surface  $\Phi_5$  aux domaines du premier ordre de ces points, respectivement des droites  $\rho_6, \rho_5$  et  $\rho_7$ .

La surface  $\Phi_5$  est la projection de la surface  $\Phi_4$  à partir du point  $O'_4$  commun aux droites  $\rho_3$  et  $\tau$ . Le degré du système  $|C^5|$  est égal à  $31(n-11)$ , de sorte que la surface  $\Phi_5$  est d'ordre  $n-11$ . Par conséquent, le point  $O'_4$  est simple pour la surface  $\Phi_4$ , le plan tangent étant le plan  $O'_4 \rho_7$ . Il en résulte que la droite  $\rho_7$  est une courbe exceptionnelle et a donc le degré virtuel  $-1$ . Sur la surface  $\Phi_5$ , on a

$$\Gamma^4 \equiv \Gamma^5 + \rho_7.$$

ce qui confirme que le degré virtuel de  $\rho_7$  est  $-1$ .

Dans le passage de la surface  $\Phi_4$  à la surface  $\Phi_5$ , les droites  $\rho_3$  et  $\tau$  sont projetées de  $O'_4$  en des points de la droite  $\rho_7$ . La droite  $\rho_6$  qui sur  $\Phi_4$  rencontre la droite  $\rho_3$  est projetée sur  $\Phi_5$  suivant une droite passant par le point de rencontre de  $p_3$  et  $p_7$ . Cependant, comme on va le voir, les droites  $\rho_3$  et  $\rho_6$  ne se rencontrent pas.

7. Les courbes  $C^6$  correspondent à la solution  $\lambda=16$ ,  $\mu=2$ . Elles ont donc en  $O$  un point multiple d'ordre 18 et passent six fois par  $(\alpha, 1)$ , quatre fois par  $(\alpha, 2)$ , trois fois par  $(\alpha, 3)$ , une fois par  $(\alpha, 3, 1), (\alpha, 3, 1, 1), (\alpha, 3, 1, 2)$ , deux fois par  $(\alpha, 1, 1), \dots, (\alpha, 1, 5)$ , deux fois par  $(\beta, 1), \dots, (\beta, 6)$ , une fois par  $(\beta, 7), (\beta, 7, 1)$ .

Le point  $(\alpha, 3, 1, 2)$  est uni de première espèce pour l'involution et à son domaine du premier ordre correspond sur la surface  $\Phi_6$  une droite  $\rho_8$ . Sur cette surface se trouvent également une droite  $\rho_5$  et une conique qui correspond point par point à la droite  $\rho_3$  et que nous désignerons par le même symbole  $\rho_3$ .

La surface  $\Phi_6$  est la projection de la surface  $\Phi_5$  à partir du point  $O'_5$  commun à  $\rho_3$  et  $\rho_7$ . Ce point est triple pour la surface  $\Phi_5$ , le cône tangent projetant de ce point la droite  $\rho_8$  et la conique  $\rho_3$ .

Dans le cône tangent à  $\Phi_5$  en  $O'_5$  se trouve donc le cône du second ordre projetant la conique  $\rho_3$  de  $O'_5$ . Par conséquent, les droites  $\rho_6$  et  $\rho_7$  sont des génératrices de ce cône et ne se rencontrent pas mais rencontrent chacune en un point le domaine de  $O'_5$  équivalent à  $\rho_3$ . Ainsi se trouve établie la propriété signalée au N° 6.

Sur la surface  $\Phi_6$ , on a

$$\Gamma^5 \equiv \Gamma^6 + \rho_3 + \rho_8$$

et la courbe  $\rho_8$  est de degré virtuel  $-2$ .

Le système  $|C^6|$  a le degré  $31(n-14)$  et  $\Phi_6$  est donc d'ordre  $n-14$ .

8. Les courbes  $C^7$  sont données par  $\lambda=10$ ,  $\mu=9$ . Elles ont donc la multiplicité 9 au point  $O$  et passent cinq fois par  $(\alpha, 1)$ , quatre fois par  $(\alpha, 2)$ , trois fois par  $(\alpha, 3)$ ,  $(\alpha, 3, 1)$ ,  $(\alpha, 3, 1, 1)$ ,  $(\alpha, 3, 1, 2)$ , une fois par  $(\alpha, 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(\alpha, 1, 5)$ , neuf fois par  $(\beta, 1)$ , trois fois par  $(\beta, 2)$ ,  $(\beta, 2, 1)$ ,  $(\beta, 2, 2)$ .

Sur la surface  $\Phi_7$  nous avons une droite  $\rho_3$  correspondant au domaine du point  $(\alpha, 1, 5)$ , une droite  $\rho_8$  correspondant au domaine de  $(\alpha, 3, 1, 2)$  et une cubique gauche correspondant point par point avec la droite  $\tau$  de  $\Phi_1$  et que nous continuerons à désigner par  $\tau$ .

La surface  $\Phi_7$  est la projection de la surface  $\Phi_6$  à partir d'un point  $O'_6$  intersection de la droite  $\rho_3$  et de la conique  $\rho_3$ . Ce point est triple pour la surface, le cône tangent projetant de ce point la cubique gauche  $\tau$ . Sur la surface  $\Phi_7$  on a

$$\Gamma^6 \equiv \Gamma^7 + \tau.$$

Le degré du système  $|C^7|$  est égal à  $31(n-17)$  et la surface  $\Phi_7$  est d'ordre  $n-17$ .

9. Les courbes  $C^8$  correspondent à la solution  $\lambda=4$ ,  $\mu=16$  et elles ont donc un point multiple d'ordre 20 en  $O$ . Elles passent quatre fois par  $(\alpha, 1)$ ,  $(\alpha, 2)$ , trois fois par  $(\alpha, 3)$ , une fois par  $(\alpha, 3, 1)$ ,  $(\alpha, 3, 1, 1)$ ,  $(\alpha, 3, 1, 2)$ , neuf fois par  $(\beta, 1)$ , deux fois par  $(\beta, 2)$ ,  $(\beta, 2, 1)$ ,  $(\beta, 2, 2)$ , trois fois par  $(\beta, 1, 1)$ ,  $(\beta, 1, 2)$ , une fois par  $(\beta, 1, 3)$ ,  $(\beta, 1, 3, 1)$ ,  $(\beta, 1, 3, 2)$ .

Au domaine du point  $(\alpha, 3, 1, 2)$  correspond sur la surface  $\Phi_8$  la droite  $\rho_8$ . On a également sur cette surface une conique  $\tau$  et une droite exceptionnelle  $\rho_7$ . Elle est la projection de  $\Phi_7$  à partir d'un point  $O'_7$  commun à la droite  $\rho_3$  et à la cubique  $\tau$ . Ce point est simple pour la surface, le plan tangent projetant la droite  $\rho_7$ . Sur cette surface, on a

$$\Gamma^7 \equiv \Gamma^8 + \rho_7.$$

Le degré du système  $|C^8|$  est égal à  $31(n-18)$  et  $\Phi_8$  est d'ordre  $n-18$ .

On remarquera que les courbes  $\tau$  et  $\rho_3$  ont un point commun dont le domaine est équivalent à la droite  $\rho_7$ .

10. Les courbes  $C^9$  sont données par la solution  $\lambda=17$ ,  $\mu=6$ . Elles ont donc la multiplicité 23 en  $O$  et passent sept fois par  $(\alpha, 1)$ , une fois par  $(\alpha, 2)$ ,  $(\alpha, 2, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(\alpha, 2, 4)$ , deux fois par  $(\alpha, 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(\alpha, 1, 5)$ , six fois par  $(\beta, 1)$ , deux fois par  $(\beta, 2, 1)$ ,  $(\beta, 2, 2)$ .

Au domaine du premier ordre de  $(\alpha, 2, 4)$  correspond sur la surface  $\Phi_9$  une droite  $\rho_9$ . Il y a en outre sur cette surface une conique  $\rho_3$  représentant le domaine du point  $(\alpha, 1, 5)$  et une conique  $\tau$ . Cette surface est la projection de la surface  $\Phi_8$  à partir d'un point  $O'_8$  commun aux droites  $\rho_7$  et  $\rho_8$ . Ce point est triple pour la surface  $\Phi_8$ , le cône tangent projetant de ce point la conique  $\rho_3$  et la droite  $\rho_9$ . Cette droite rencontre donc la conique  $\rho_3$  en un point. Sur la surface  $\rho_9$ , on a

$$\Gamma^8 \equiv \Gamma^9 + \rho_3 + \rho_9,$$

ce qui implique que le degré virtuel de  $\rho_9$  est égal à  $-2$ .

La surface  $\Phi_9$  est d'ordre  $n-21$ .

11. Les courbes  $C^{10}$  correspondent à la solution  $\lambda=11$ ,  $\mu=13$ . Elles ont donc en  $O$  la multiplicité 24 et passent six fois par  $(\alpha, 1)$ , une fois par  $(\alpha, 2)$ ,  $(\alpha, 2, 1)$ , ...,  $(\alpha, 2, 4)$  et une fois par  $(\alpha, 1, 1)$ , ...,  $(\alpha, 1, 5)$ , six fois par  $(\beta, 1)$ , une fois par  $(\beta, 2)$ ,  $(\beta, 2, 1)$ ,  $(\beta, 2, 2)$ , trois fois par  $(\beta, 1, 1)$ ,  $(\beta, 1, 2)$ , une fois par  $(\beta, 1, 3)$ ,  $(\beta, 1, 3, 1)$ ,  $(\beta, 1, 3, 2)$ .

Aux domaines des points  $(\alpha, 1, 5)$ ,  $(\alpha, 2, 4)$ ,  $(\beta, 2, 2)$ ,  $(\beta, 1, 3, 2)$  correspondent respectivement sur la surface  $\Phi_{10}$  quatre droites  $\rho_3$ ,  $\rho_9$ ,  $\tau$ ,  $\rho_7$ . Cette surface est donc la projection de la surface  $\Phi_9$  à partir du point  $O'_9$  commun aux coniques  $\rho_3$  et  $\tau$ . Ce point est simple pour la surface  $\Phi_9$ , le plan tangent projetant  $\rho_7$  de  $O'_9$ .

Sur la surface  $\Phi_{10}$ , on a

$$\Gamma^9 \equiv \Gamma^{10} + \rho_7.$$

Sur cette surface, les courbes  $\rho_3$  et  $\tau$  rencontrent  $\rho_7$  chacune en un point mais ne se rencontrent pas.

Le système  $|C^{10}|$  a le degré 31 ( $n-22$ ) et la surface  $\Phi_{10}$  est d'ordre  $n-22$ .

12. Les courbes  $C^{11}$  correspondent à la solution  $\lambda=5$ ,  $\mu=20$ . Elles ont donc en  $O$  la multiplicité 25 et passent cinq fois par  $(\alpha, 1)$ , une fois par  $(\alpha, 2)$ ,  $(\alpha, 2, 1)$ , ...,  $(\alpha, 2, 4)$ , cinq fois par  $(\beta, 1)$ , une fois par  $(\beta, 2)$ ,  $(\beta, 2, 1)$ ,  $(\beta, 2, 2)$ , deux fois par  $(\beta, 1, 1)$ , ...,  $(\beta, 1, 7)$ , une fois par  $(\beta, 1, 8)$ ,  $(\beta, 1, 8, 1)$ .

Au dernier  $(\beta, 1, 8, 1)$  de ces points correspond sur la surface  $\Phi_{11}$  une droite  $\rho_{10}$  et cette surface contient en outre deux droites  $\rho_9$  et  $\tau$ . La surface  $\Phi_{11}$  est la projection de la surface  $\Phi_{10}$  à partir du point  $O'_{10}$  commun aux droites  $\rho_3$  et  $\rho_7$ . Ce point est simple pour la surface  $\Phi_{10}$ , le plan tangent projetant la droite  $\rho_{10}$  qui est exceptionnelle. Elle a donc le degré virtuel  $-1$ . Sur la surface  $\Phi_{11}$ , on a

$$\Gamma^{10} \equiv \Gamma^{11} + \rho_{10}.$$

Le degré de  $C^{11}$  étant 31 ( $n-23$ ), la surface  $\Phi_{11}$  est d'ordre  $n-23$ .

13. Les courbes  $C^{12}$  sont données par la solution  $\lambda=24$ ,  $\mu=3$ . Elles ont donc en  $O$  la multiplicité 27 et passent quatre fois par les points  $(\alpha, 1)$ ,  $(\alpha, 1, 1)$ , ...,  $(\alpha, 1, 5)$ , trois fois par  $(\beta, 1)$ , une fois par  $(\beta, 2)$ ,  $(\beta, 2, 1)$ ,  $(\beta, 2, 2)$ .

Sur la surface  $\Phi_{12}$  on a une courbe  $\rho_3$  du quatrième ordre correspondant au domaine du point  $(\alpha, 1, 5)$  et une droite  $\tau$ . Cette surface est la projection de la surface  $\Phi_{11}$  à partir du point  $O'_{11}$  commun aux droites  $\rho_{10}$  et  $\rho_9$ . Ce point est quadruple pour  $\Phi_{11}$ , le cône projetant la courbe  $\rho_3$  étant le cône tangent.

Sur la surface  $\Phi_{12}$  on a

$$\Gamma^{11} \equiv \Gamma^{12} + 2\rho_3.$$

Le système  $|C^{12}|$  a le degré 31 ( $n-27$ ) et la surface  $\Phi_{12}$  est d'ordre  $n-27$ .

14. Le système  $|C^{13}|$  est donné par  $\lambda=18$ ,  $\mu=10$ . Les courbes  $C^{13}$  ont en  $O$  la multiplicité 28 et passent trois fois par les points  $(\alpha, 1)$ ,  $(\alpha, 1, 1)$ , ...,  $(\alpha, 1, 5)$ , trois fois par  $(\beta, 1)$ ,  $(\beta, 1, 1)$ ,  $(\beta, 1, 2)$ , une fois par  $(\beta, 1, 3)$ ,  $(\beta, 1, 3, 1)$ ,  $(\beta, 1, 3, 2)$ .

La surface  $\Phi_{13}$ , d'ordre  $n-28$ , contient une cubique gauche  $\rho_3$  et une droite exceptionnelle  $\rho_7$ . Elle est la projection de la surface  $\Phi_{12}$  à partir du point  $O'_{12}$  simple pour cette surface.

Le système  $|C^{14}|$  est donné par  $\lambda=12$ ,  $\mu=17$ . Ses courbes ont donc la multiplicité 29 en  $O$  et passent deux fois par les points  $(\alpha, 1)$ ,  $(\alpha, 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(\alpha, 1, 5)$ , deux fois par  $(\beta, 1)$ ,  $(\beta, 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(\beta, 1, 7)$ , une fois par  $(\beta, 1, 8)$ ,  $(\beta, 1, 8, 1)$ .

La surface  $\Phi_{14}$ , d'ordre  $n-29$ , contient une conique  $\rho_3$  et une droite exceptionnelle  $\rho_{10}$ . Elle est la projection de la surface  $\Phi_{13}$  à partir du point  $O'_{13}$  commun à la cubique  $\rho_3$  et à la droite  $\rho_7$ . Ce point est simple pour cette surface.

Enfin les courbes  $C^{15}$  correspondent à la solution  $\lambda=6$ ,  $\mu=24$ . Elles ont en  $O$  la multiplicité 30 et passent une fois par les points  $(\alpha, 1)$ ,  $(\alpha, 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(\alpha, 1, 5)$ , une fois par les points  $(\beta, 1)$ ,  $(\beta, 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(\beta, 1, 29)$ .

Au domaine du premier ordre du point  $(\beta, 1, 29)$  correspond sur la surface  $\Phi_{15}$  une droite  $\rho_{11}$  qui est exceptionnelle, car la surface  $\Phi_{15}$  est d'ordre  $n-30$ . Cette surface contient une droite  $\tau$ . Elle est la projection de  $\Phi_{14}$  à partir du point  $O'_{14}$  commun à la conique  $\rho_3$  et à la droite  $\rho_{10}$ .

Sur la surface  $\Phi_{14}$ , on a

$$\Gamma^{12} \equiv \Gamma^{14} + \rho_7 + \rho_{10} + \rho_{11}.$$

Les courbes  $C^{15}$  assujetties à toucher en  $O$  une droite distincte de  $a$ ,  $b$ , acquièrent en ce point la multiplicité 31 et des tangentes variables. La surface  $\Phi_{16}$  que l'on obtient en rapportant projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace à  $r_0-16$  dimensions, est la projection de  $\Phi_{15}$  à partir du point commun aux droites  $\rho_3$  et  $\rho_{11}$ .

15. La structure du point  $O'$  est donc constituée par une courbe rationnelle  $\tau$  de degré virtuel  $-3$ , par huit courbes rationnelles  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_8, \rho_9$  de degré virtuel  $-2$  et par trois droites exceptionnelles  $\rho_7, \rho_{10}, \rho_{11}$ .

La courbe  $\tau$  rencontre chacune des courbes  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_7, \rho_{10}$  en un point.

La courbe  $\rho_3$  rencontre chacune des courbes  $\tau, \rho_2, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}, \rho_{11}$  en un point.

Les courbes  $\rho_4$  et  $\rho_5$  rencontrent les courbes  $\tau$  et  $\rho_3$ , la dernière rencontre en plus  $\rho_7$ .

La courbe  $\rho_8$  rencontre  $\rho_3$  et  $\rho_7$ , la courbe  $\rho_9$  rencontre  $\rho_3$  et  $\rho_{10}$ .

Le fait le plus saillant dans cette analyse est que le point  $O$  est triple pour la surface  $\Phi$  et est suivi d'un point double biplanaire infiniment voisin. Celui-ci est suivi d'un point triple qui n'est pas infiniment voisin au point double précédent.

Liège, le 5 novembre 1971.

### Bibliographie

(1) Voir notre ouvrage sur la *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Monografie Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Rome, Cremonese, 1963).

(Reçu le 03. 12. 1971)

Adresse de l'Auteur:  
Lucien Godeaux  
37, Quai Orban  
4000 — Liège (Belgique)