LUCIEN GODEAUX

Correspondances entre deux courbes algébriques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 111 (1949)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1949__111__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXI

Correspondances entre deux courbes algébriques

Par M. Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur à l'Université de Liége

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1949

CORRESPONDANCES
ENTRE DEUX COURBES ALGÉBRIQUES

PAR

M. Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur à l'Université de Liége

L'étude des correspondances entre les points de courbes algébriques a pour point de départ le *principe de correspondance* de Chasles (1864). On sait que Chasles considérait une correspondance d'indices α, β entre deux ponctuelles rectilignes superposées et que son principe énonçait que le nombre des points unis est $\alpha + \beta$. L'extension du principe de Chasles aux correspondances entre les points d'une courbe rationnelle est immédiate. C'est Cayley (1866) qui a cherché à étendre ce principe aux correspondances entre les points d'une courbe algébrique de genre p supérieur à zéro. Cayley suppose que, étant donnée sur une courbe C de genre p, une correspondance (α, β), il existe une courbe passant par les β points homologues d'un point P, ayant un contact d'ordre $\gamma - 1$ avec la courbe C en P, variable dans un système linéaire lorsque P décrit la courbe C. Le nombre γ est la valence (valenza, Wertigkeit) de la correspondance. Par induction, Cayley parvint à évaluer le nombre, $\alpha + \beta + 2\gamma p$. des points unis de la correspondance. Une première démonstration de la formule de Cayley fut donnée par Brill quelques années plus tard ;

une seconde est due à Zeuthen, qui donna à la formule le nom de *principe de correspondance de Cayley-Brill.*

En 1888, Hürwitz publie un travail fondamental sur la théorie des correspondances entre les points d'une courbe algébrique. En utilisant les propriétés des intégrales abéliennes attachées à la courbe, il mit en pleine lumière la signification de la valence d'une correspondance, montra qu'il peut exister des correspondances dépourvues de valence et énonça un principe général de correspondance. En 1903, Severi construisit une théorie géométrique des correspondances ; il y avait été conduit par l'étude des surfaces qui représentent les couples de points d'une ou de deux courbes algébriques. Les travaux de Hürwitz et de Severi forment la base des recherches modernes sur la théorie des correspondances. C'est surtout en Italie que cette théorie fut développée, mais il y a lieu de signaler un important travail de Lefschetz, où ce géomètre applique, aux correspondances, ses profondes recherches de topologie.

C'est à l'exposé des recherches qui prirent naissance dans les travaux de Hurwitz et de Severi qu'est consacré le présent fascicule; nous nous sommes surtout attaché à faire connaître les méthodes utilisées par les géomètres.

Un premier paragraphe est consacré à la variété de Jacobi attachée à une courbe algébrique. Cette variété s'introduit immédiatement par l'inversion des intégrales abéliennes; il nous a paru utile de l'introduire par une voie géométrique, due à Castelnuovo.

Dans le second paragraphe, nous considérons les involutions appartenant à une courbe algébrique, c'est-à-dire les correspondances $(1, n)$ entre deux courbes algébriques. La théorie de ces involutions conduit à un problème difficile, dont la solution semble encore lointaine : celui de l'existence de courbes contenant une involution d'ordre n dont la courbe image est donnée *a priori*. Nous signalons les travaux auxquels ce problème a donné naissance.

Nous avons réparti l'exposé des recherches sur les correspondances entre deux courbes algébriques, distinctes ou coïncidantes, en trois paragraphes, où nous considérons successivement le point de vue géométrique, le point de vue transcendant et le point de vue topologique. Ce n'est pas évidemment qu'il existe des cloisons étanches entre ces trois points de vue; au contraire, ils sont souvent étroitement mêlés dans maints Mémoires. Mais il nous a paru que cette subdivision nous permettait plus de clarté dans l'exposé des méthodes utilisées.

Le point de vue géométrique est à la base de l'important Mémoire de Severi auquel il a été fait allusion plus haut; il a surtout été utilisé par ce géomètre et par ses élèves.

C'est au point de vue transcendant que s'était placé Hurwitz. Une interprétation heureuse des formules de Hurwitz a permis à Rosati d'associer à une correspondance entre les points d'une ou de deux courbes algébriques, une homographie hyperspatiale à coefficients rationnels. Cette idée de Rosati s'est révélée très féconde; elle est en relation étroite avec le point de vue adopté par Scorza et Cotty dans l'étude des fonctions abéliennes.

Le théorème de R. Torelli, sur l'identité birationnelle de deux courbes ayant même tableau de périodes d'intégrales normales de première espèce, se rattache directement au point de vue transcendant. Nous nous sommes borné à citer ce théorème, ayant eu l'occasion d'exposer ailleurs les travaux qui y ont conduit.

Le point de vue topologique a surtout été considéré par Lefschetz, comme nous le disions plus haut. Il a aussi été utilisé par Chisini dans d'intéressantes recherches.

La liste des travaux consacrés à la théorie des correspondances entre les courbes algébriques, placée à la fin du fascicule, est, croyons-nous, complète. Les nombres, en caractères gras, placés à la suite d'un nom, renvoient à cette liste.

Liége, le 11 novembre 1940

I. — Variété de Jacobi.

1. Rappel de quelques propriétés de la géométrie sur une courbe algébrique. — Soit C une courbe algébrique irréductible de genre p.

Une série linéaire de dimension r de groupes de n points de la courbe C est un ensemble rationnel de groupes de n points tel que r points de la courbe appartiennent (en général) à un seul groupe. Cette série est représentée par la notation g_n^r ou par la notation $|G|$, G étant un groupe de la série.

Deux groupes de points G_1, G_2, appartenant à une même série linéaire, sont dits équivalents. On écrit $G_1 \equiv G_2$. L'ensemble des groupes équivalents à un groupe donné est une série linéaire complète.

La somme $|G+H|$ de deux séries linéaires $|G|$, $|H|$ est la série linéaire complète comprenant tous les groupes de points équivalents à tout groupe formé d'un groupe de $|G|$ et d'un groupe de $|H|$.

La différence $|G-H|$ de deux séries linéaires $|G|$, $|H|$, lorsqu'elle existe, est la série linéaire formée des groupes de points qui, joints à un groupe de $|H|$, sont équivalents aux groupes de $|G|$. Cette série est unique et indépendante du choix du groupe H (théorème du reste).

Dans une série linéaire $|G|$ de dimension 1, il existe un nombre fini de groupes contenant un point double ; l'ensemble de ces points est le jacobien G_J de la série. Les jacobiens des différentes séries de dimension 1 extraites d'une série quelconque $|G|$ sont équivalents et appartiennent à une série linéaire : la série jacobienne $|G_J|$ de $|G|$. On a

$$|(G+H)_J| = |G_J + 2H| = |H_J + 2G|$$

et, par conséquent, lorsque la soustraction est possible,

$$|G_J - 2G| = |H_J - 2H|.$$

La série

$$|K| = |G_J - 2G|,$$

si elle existe, est la série canonique de la courbe C ; elle a l'ordre $2p-2$ et la dimension $p-1$. Elle n'existe pas sur les courbes rationnelles ; sur les courbes elliptiques, elle a l'ordre et la dimension zéro.

L'indice de spécialité i d'un groupe G est le nombre de groupes canoniques K linéairement indépendants, contenant ce groupe. Si le groupe G est formé de n points, il appartient à une série linéaire complète de dimension $n-p+i$ (théorème de Riemann-Roch). Un groupe dont l'indice de spécialité est nul est dit non spécial; il est dit spécial dans le cas contraire.

2. Correspondances entre les groupes de p points d'une courbe de genre p. — Un groupe de p points d'une courbe C de genre p est en général non spécial. S'il est spécial, son indice de spécialité est égal à l'unité et il appartient à une série linéaire g_p^1. S'il n'est pas spécial, il est isolé; on convient de dire qu'il forme une série linéaire g_p^0 de dimension zéro.

Une série linéaire d'ordre $2p$ est certainement non spéciale et sa dimension est égale à p. Un groupe A de p points appartient à un seul groupe d'une série g_{2p}^p donnée; ce groupe est complété par un groupe de p points A'. On obtient ainsi une correspondance entre les groupes de p points de la courbe C, appelée correspondance de seconde espèce. Par sa définition même, cette correspondance est involutive.

Observons que si A est spécial, le groupe A' ne peut être spécial, mais dans la correspondance, tous les groupes de la série g_p^1 contenant A correspondent à A'.

Les groupes de $2p$ points de la courbe C sont en nombre ∞^{2p} et se distribuent en ∞^p séries linéaires de dimension p. Il existe par conséquent ∞^p correspondances de seconde espèce entre les groupes de p points de C.

Une correspondance de seconde espèce est complètement déterminée lorsque l'on se donne deux groupes de p points homologues.

Considérons deux séries g_{2p}^p distinctes, c'est-à-dire deux correspondances de seconde espèce et soient A'_0, A' les groupes que la première fait correspondre à deux groupes A_0, A et A''_0, A'' les groupes que la seconde fait correspondre à A_0, A. On a, par définition,

$$A + A' \equiv A_0 + A'_0, \qquad A + A'' \equiv A_0 + A''_0,$$

d'où

$$A'' \equiv A' + A''_0 - A'_0.$$

Les groupes A'_0, A''_0 étant fixés, cette relation définit une correspondance entre les groupes de p points de C, dans laquelle A'' est l'homologue de A' et, en particulier, A''_0 est celui de A'_0. Cette correspondance est appelée correspondance de première espèce ; elle est le produit de deux correspondances de seconde espèce. Une correspondance de première espèce est complètement déterminée par deux groupes de p points homologues et il existe par conséquent ∞^p de ces correspondances; on peut en effet choisir un des groupes une fois pour toutes et choisir arbitrairement le second.

Une correspondance de première espèce ne peut posséder un groupe uni sans se réduire à l'identité.

Une correspondance de première espèce est transformée en son inverse par toute correspondance de seconde espèce; elle est transformée en elle-même par toute correspondance de première espèce. On obtient ainsi un groupe mixte, transitif, de ∞^p correspondances permutables entre les groupes de p points de la courbe C de genre p.

Pour $p = 1$, on retrouve le groupe des transformations birationnelles d'une courbe elliptique en soi. L'extension au cas de p quelconque est due à Castelnuovo [7]. Récemment, Chisini [18] a repris la question pour en déduire une théorie géométrique des intégrales abéliennes de première espèce attachées à une courbe algébrique. Il établit qu'une correspondance de première espèce peut s'exprimer comme produit de p correspondances de première espèce convenablement choisies, les exposants s'interprètent comme sommes de valeurs d'intégrales de première espèce aux points de certains groupes de p points de la courbe.

3. Variété de Jacobi. — Imaginons une variété à p dimensions dont les points représentent les séries linéaires d'ordre p (de dimension zéro ou 1) appartenant à la courbe C. Cette variété V_p est la variété de Jacobi attachée à la courbe C.

Aux correspondances entre les groupes de p points de la courbe C qui viennent d'être définies, correspondent des transformations birationnelles de la variété V_p en elle-même. La variété de Jacobi possède donc un groupe mixte transitif de ∞^p transformations birationnelles deux à deux permutables en elle-même; c'est par conséquent, d'après un théorème classique de M. Picard [49]. une variété abélienne.

Si nous désignons par $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_p(x)$ un système de p intégrales normales de première espèce de C, et si nous posons

$$U_i \equiv u_i(x_1) + u_i(x_2) + \ldots + u_i(x_p) \qquad (\text{mod périodes}),$$

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant p points de la courbe C (ou de la surface de

Riemann correspondante), les coordonnées des points de V_p pourront être représentées par

$$X_i = \varphi_i(U_1, U_2, \ldots, U_p),$$

les fonctions φ étant abéliennes.

Observons que la courbe C possède ∞^{p-2} séries linéaires spéciales g_p^1 auxquelles correspondent sur V_p les points d'une variété V'_{p-2} à $p-2$ dimensions. Cette variété est irréductible, car ses points représentent les groupes de $p-2$ points de C, obtenus en soustrayant les séries g_p^1 de la série canonique g_{2p-2}^{p-1}. La présence de cette variété V'_{p-2} indique que, pour $p \geqq 3$, la variété de Jacobi n'est pas la variété abélienne la plus générale.

4. Représentation des séries linéaires d'ordre quelconque. — Les groupes de $n > p$ points de la courbe C sont en nombre ∞^n et se répartissent en ∞^p séries linéaires de dimension $n-p$. Lorsque $n \leqq 2p-2$, certaines de ces séries peuvent cependant être spéciales et avoir une dimension supérieure à $n-p$.

Fixons, sur la courbe C, un groupe G de $n-p$ points. En soustrayant des différentes séries d'ordre n de la courbe C le groupe G, on obtient les ∞^p séries d'ordre p de la courbe. Inversement, en ajoutant le groupe G aux séries d'ordre p de la courbe, on obtient les ∞^p séries linéaires d'ordre n. On peut donc dire que la variété de Jacobi V_p attachée à une courbe algébrique C, représente les ∞^p séries linéaires d'ordre $n \geqq p$ appartenant à la courbe, p étant le genre de celle-ci.

II. — Involutions appartenant a une courbe algébrique.

5. Définitions. — Considérons deux courbes algébriques irréductibles C de genre p, et Γ, de genre π. Supposons qu'il existe entre les courbes Γ et C une correspondance algébrique telle qu'à un point de Γ correspondent n points de C, un point de C étant l'homologue d'un seul point de Γ. Les ∞^1 groupes de n points de C qui correspondent aux points de Γ forment une involution γ_n, d'ordre n et de genre π. Un point de C appartient à un seul groupe de γ_n.

Un point de la courbe C qui absorbe deux des points du groupe de γ_n auquel il appartient, est appelé point double de l'involution.

Le point de Γ qui correspond à ce groupe est appelé point de diramation pour la correspondance $(1.\ n)$ existant entre Γ et C.

Certains groupes de l'involution γ_n peuvent posséder des points de multiplicités supérieures à deux; ces points sont équivalents à un certain nombre de points doubles. Les points homologues de ces groupes sur Γ sont équivalents à un certain nombre de points de diramation ordinaires.

6. **Formule de Zeuthen.** — A deux groupes de points équivalents de Γ correspondent sur C deux groupes de points équivalents et à une série linéaire de Γ correspond sur C une série linéaire

Considérons, sur la courbe Γ, une série linéaire $|G|$ d'ordre m et de dimension 1 ; soit G_j son jacobien. Appelons $|G'|$ la série linéaire, d'ordre mn et de dimension 1, formée sur C par les transformés des groupes G et $\overline{G_j}$ le transformé du groupe jacobien G_j. Le groupe jacobien G'_j de $|G'|$ est formé du groupe $\overline{G_j}$ et du groupe D des points doubles de l'involution γ_n. Par conséquent, si $|K|$ est la série canonique de Γ, $|\overline{K}|$ la série linéaire qui lui correspond sur C et $|K'|$ la série canonique de C, on a, sur cette dernière courbe,

$$|K'| = |G'_j - 2G'| = |\overline{G_j} - 2G' + D| = |\overline{K} + D|.$$

Le transformé sur C d'un groupe canonique de Γ, augmenté du groupe des points doubles de γ_n, donne un groupe canonique de C.

De la relation précédente on déduit, en appelant δ le nombre des points doubles de γ_n,

$$2n(\pi - 1) + \delta = 2(p - 1).$$

Cette formule est due à Zeuthen [92]; l'interprétation fonctionnelle d'où elle est déduite est due à Castelnuovo.

On déduit de la formule de Zeuthen que π est inférieur à p, sauf pour $p = 1$. On peut alors avoir $\pi = 1$, $\delta = 0$.

7. **Transformation des séries linéaires.** — Considérons sur C une série linéaire $|A|$ d'ordre m et de dimension 1. Aux points d'un groupe A correspondent, sur Γ, m points formant un groupe A^* qui, lorsque A varie dans la série $|A|$, décrit une série rationnelle. Par conséquent, d'après une observation d'Enriques [29], les groupes A^*

sont équivalents. Il en résulte qu'à une série $|A|$ quelconque de C correspond sur Γ une série de groupes de points appartenant à une série linéaire $|A^*|$.

Écartons le cas $p = \pi = 1$ et supposons donc $\pi < p$. Considérons sur C l'ensemble ∞^p séries $|A|$ d'ordre m. Les séries linéaires $|A^*|$ qui leur correspondent sur Γ ne peuvent être toutes distinctes, puisque ces séries sont en nombre au plus égal à ∞^π. Il existera donc sur C un ensemble de ∞^ρ séries linéaires $|A|$ auxquelles correspondent sur Γ des séries appartenant à une même série linéaire $|A^*|$. Cet ensemble est formé d'un ou de plusieurs systèmes continus; soit Σ un de ces systèmes.

Choisissons dans Σ deux séries linéaires $|A_0|$, $|A'_0|$ et considérons l'opération

$$|A'| = |A + A'_0 - A_0|.$$

qui fait correspondre à la série $|A|$, la série $|A'|$ et en particulier à $|A_0|$, la série $|A'_0|$. Lorsque la série $|A|$ décrit le système Σ, la série $|A'|$ décrit un système Σ'. Lorsque $|A|$ coïncide avec $|A_0|$, $|A'|$ coïncide avec $|A'_0|$ et par conséquent Σ et Σ' ont en commun la série $|A'_0|$. Si nous désignons par $|A'^*|$ la série linéaire qui correspond sur Γ au système Σ', les séries linéaires $|A^*|$ et $|A'^*|$ ont en commun les groupes qui correspondent aux groupes de $|A'_0|$ et par conséquent coïncident. Il en résulte que Σ' coïncide avec Σ, car autrement, Σ' ne pourrait occuper qu'un nombre fini de positions.

La correspondance entre les séries $|A|$, $|A'|$ qui vient d'être envisagée, transforme donc le système Σ lui-même. Cette correspondance est complètement déterminée par les systèmes homologues $|A_0|$, $|A'_0|$; elle ne peut posséder un élément (série linéaire) uni sans se réduire à l'identité. En supposant fixe la série $|A_0|$ et en faisant décrire à la série $|A'_0|$ le système Σ, on obtient ∞^ρ correspondances analogues à la précédente. Il est d'autre part évident que deux séries de Σ étant données, il existe une et une seule correspondance faisant passer de l'une à l'autre.

Considérons les deux correspondances définies, la première par les séries $|A_0|$, $|A'_0|$, la seconde par les séries $|A_0|$, $|A''_0|$. On a identiquement

$$|A + A'_0 - A_0 + A''_0 - A_0| = |A + A''_0 - A_0 + A'_0 - A_0|,$$

donc les deux correspondances sont permutables.

Il existe donc, dans le système Σ, un groupe transitif de ∞^ρ correspondances deux à deux permutables, entre les séries linéaires $|A|$.

Soient maintenant $|A_0|$ et $|A|$ deux séries de Σ et $|A_1|$ une série n'appartenant pas à Σ. Les séries $|A_1 + A_0 - A|$, obtenues en laissant fixes $|A_0|$ et $|A_1|$ et en faisant varier $|A|$ dans Σ, engendrent un système Σ_1 analogue à Σ et n'ayant aucune série linéaire en commun avec Σ. Il en résulte que l'ensemble des ∞_p séries linéaires $|A|$ est formé de $\infty^{p-\rho}$ systèmes analogues à Σ, une série $|A|$ appartenant à un seul de ces systèmes.

8. Correspondance entre les variétés de Jacobi attachées aux courbes C et Γ. — Les ∞^p séries linéaires $|A|$ de C sont représentées par les points de la variété de Jacobi V_p attachée à C. A un système Σ correspond sur V_p une variété à ρ dimensions que nous désignerons encore par Σ; cette variété possède un groupe transitif de ∞^ρ transformation deux à deux permutables en elle-même; c'est donc une variété abélienne. Il existe par conséquent sur V_p une congruence d'ordre 1, $\{\Sigma\}$, de $\infty^{p-\rho}$ variétés abéliennes Σ, n'ayant deux à deux aucun point commun.

Les correspondances entre les séries $|A|$ de C ne transformant pas Σ en lui-même, font correspondre à Σ un système analogue Σ_1 de la congruence $\{\Sigma\}$. A ces correspondances sont homologues, sur la variété V_p, des transformations de première espèce de V_p, ne transformant pas Σ en elle-même, mais transforment la congruence $\{\Sigma\}$ en elle-même. On en conclut que la congruence $\{\Sigma\}$, où les variétés Σ sont considérées comme éléments, est à son tour une variété abélienne.

Aux $\infty^{p-\rho}$ séries linéaires $|A^*|$ de Γ correspondent des points de la variété de Jacobi Ω_π attachée à cette courbe; on a donc $p-\rho \leqq \pi$. Supposons que l'on puisse avoir $p-\rho < \pi$; les séries linéaires $|A^*|$ sont alors représentées sur Ω_π par une variété $\Omega'_{p-\rho}$, abélienne comme la congruence $\{\Sigma\}$. Les transformations de première espèce de Ω_π, ou bien transforment $\Omega'_{p-\rho}$ en elle-même, ou bien font correspondre à $\Omega'_{p-\rho}$ des variétés analogues, formant une congruence abélienne $\{\Omega'_{p-\rho}\}$ d'ordre 1. Il existerait donc sur Γ des séries linéaires d'ordre m, analogues à $|A^*|$, mais provenant de séries linéaires d'ordre m de C non considérées plus haut, contrairement à l'hypothèse. On a donc $p-\rho=\pi$.

La variété V_p contient donc une congruence d'ordre 1, abélienne,

$\{\Sigma\}$, formée de ∞^π variétés abéliennes Σ, de dimension $p-\pi$, ne se rencontrant pas deux à deux. Entre les points de la variété Ω_π et les variétés Σ de la congruence $\{\Sigma\}$, on a une correspondance rationnelle $(1, \eta)$, η étant au plus égal à n.

D'après un théorème de Castelnuovo [9], la variété V_p contient une seconde congruence abélienne d'ordre 1, $\{\Sigma\}$, formée de $\infty^{p-\pi}$ variétés abéliennes Σ' à π dimensions, ne se rencontrent pas deux à deux. Une variété Σ et une variété Σ' se rencontrent en un nombre fini ν de points.

A une série linéaire $|A^*|$ de Γ correspondent $\eta\nu$ séries linéaires $|A|$ de C, dont la somme donne la série linéaire transformée de $|A^*|$. On a $\eta\nu \leqq n$.

La courbe C possède deux systèmes complets d'intégrales réductibles de première espèce : l'un comprend π intégrales indépendantes à 2π périodes réduites, l'autre $p-\pi$ intégrales indépendantes à $2(p-\pi)$ périodes réduites.

9. **Existence des involutions.** — L'étude des involutions appartenant à une courbe algébrique conduit au probleme suivant : Étant donnée une courbe algébrique Γ irréductible, quel est le nombre de courbes C birationnellement distinctes contenant une involution d'ordre n représentée par Γ, les points de diramation étant fixés sur cette courbe ?

Le problème a été posé dans toute sa généralité et sous sa forme topologique par Hurwitz [38]. Considérons une surface de Riemann représentant la courbe Γ, surface que nous désignerons encore par Γ. Traçons, sur la surface Γ, 2π cycles $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_\pi, \beta_\pi$, issus d'un point O et formant un système de rétrosections. Soient ensuite δ points $a_1, a_2, \ldots, a_\delta$ choisis sur Γ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\delta$ des lacets les joignant au point O, lacets ne se coupant pas deux à deux et ne rencontrant pas les coupures α, β. Affectons des signes $+$ et $-$ les bords des lacets et cycles tracés sur Γ et supposons qu'un chemin entourant O et parcouru dans le sens positif les rencontre dans l'ordre $\lambda_1^+\lambda_2^+ \ldots \lambda_\delta^+ \alpha_1^+ \beta_1^+ \alpha_1^- \beta_1 \ldots \alpha_\pi^+ \beta_\pi^+ \alpha_\pi^- \beta_\pi^-$. Attachons enfin à chacun des chemins λ, α, β des substitutions L, A, B, portant sur n objets et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les substitutions L, A, C forment un groupe transitif.

2° On a

$$L_1 L_2 \ldots L_3 A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_\pi B_\pi A_\pi^{-1} B_\pi^{-1} = 1.$$

Imaginons n feuillets recouvrant la surface de Riemann Γ et soudons ces feuillets le long des coupures L, A, B de manière qu'ils présentent, le long de chaque coupure, la substitution correspondante. Nous obtiendrons ainsi une surface de Riemann C. Le problème consiste à évaluer le nombre de surfaces de Riemann distinctes que l'on peut obtenir par ce procédé.

Comessatti [19] a étudié le problème dans le cas $n = 2$. L'involution γ_2 définit alors une transformation birationnelle T de la courbe C en elle-même; la série canonique $|K'|$ de C est transformée en elle-même par T et contient deux séries partielles composées au moyen de γ_2 (c'est-à-dire dont les groupes sont formés de groupes de γ_2). L'une, jointe aux points doubles de l'involution, est la transformée de la série canonique $|K|$ de Γ; l'autre a l'ordre $2p-2$ et la dimension $p-\pi-1$, il correspond sur Γ une série linéaire $|H|$, non spéciale, d'ordre $p-1$ et de dimension $p-\pi-1$, liée à la série canonique de Γ et au groupe Δ des points de diramation par la relation fonctionnelle

$$|2H| = |2K + \Delta|.$$

Soient deux courbes C, C' contenant des involutions γ_2, γ', représentées par Γ et ayant sur cette courbe le même groupe Δ de diramation (ou des groupes équivalents). Si les courbes C, C' sont birationnellement équivalentes, les séries $|H|$, $|H'|$ qui leur correspondent, coïncident. Par conséquent, le nombre de courbes C birationnellement distinctes, répondant à la question, est égal au nombre de séries linéaires que l'on obtient par bisection de la série $|2K + \Delta|$. Comessatti établit que ce nombre est égal à $2^{2\pi}$. Dans le cas où le groupe de diramation manque, ce nombre doit cependant être diminué d'une unité, si l'on s'en tient aux courbes C irréductibles.

L'involution γ_n appartenant à C est dite cyclique lorsqu'il existe une transformaiton birationnelle de la courbe C en elle-même, de période n, engendrant chaque groupe de l'involution. Si $\varphi(x, y) = 0$ est l'équation de Γ, supposée plane, et $R(x, y)$ un polynome, les équations d'une courbe C contenant une involution γ_n cyclique, peuvent s'écrire

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z = \sqrt[n]{R(x, y)}.$$

Chisini [16] s'est proposé de construire la courbe C en partant de la courbe Γ, lorsque celle-ci est privée de points de diramation et que les substitutions A, B le long des cycles α, β de la surface de Riemann Γ sont données. En tout point de rencontre, les courbes $\varphi = 0$, $R = 0$ doivent avoir des contacts d'ordres multiples de n; les points de contact forment le groupe de diramation apparente. Entre autres propriétés, Chisini établit que si deux courbes C, C' sont construites en partant de deux groupes équivalents de diramation apparente, elles sont birationnellement identiques.

Le problème a été repris récemment par Defrise [28] dans le cas où l'involution γ_n est cyclique ou, plus généralement, engendrée par un groupe abélien de transformations birationnelles de la courbe C en elle-même, la courbe Γ possédant ou non des points de diramation. Indiquons rapidement la méthode suivie dans le cas le plus simple, où γ_n est cyclique et où il n'y a pas de points de diramation. Defrise appelle séries semblables les séries linéaires de la courbe Γ dont les transformées sur C appartiennent à une même série linéaire. Il y a en général n d'un ordre donné,

$$|G_1|,\ |G_2|,\ |G_3| = |2G_2 - G_1|,\ \ldots,\ |G_n| = (n-1)G_2 = (n-2)G_1|$$

et les multiples d'ordre n de ces séries appartiennent à la même série

$$nG_1 \equiv nG_2 \equiv \ldots \equiv nG_n.$$

A toute similitude donnée sur la courbe Γ correspond une et une seule classe de courbes C irréductibles, deux à deux birationnellement équivalentes. Quand la courbe Γ est à modules généraux, on obtient, par la considération des diverses similitudes possibles, $(n^{2\pi}-1):(n-1)$ courbes C birationnellement distinctes.

Dans le cas général, le problème dont il est question ici est encore loin d'être résolu. Signalons que d'importantes recherches touchent ce problème et différentes questions connexes ont été publiées récemment par Comessati [23].

III. — Correspondances entre deux courbes algébriques. Le point de vue géométrique.

10. **Définitions.** — Soient C_1, C_2 deux courbes algébriques irréductibles, de genres p_1, p_2, distinctes ou superposées. Supposons

qu'à un point de C_1 correspondent α_2 points de C_2 et à un point de C_2, α_1 points de C_1. Les courbes C_1, C_2 sont liées par une correspondance (α_1, α_2) que l'on suppose algébrique. On désignera par T l'opération qui fait passer de C_1 à C_2 et par T^{-1} celle qui fait passer de C_2 à C_1.

Soit C une courbe dont les points représentent les couples de points de C_1, C_2 homologues dans la correspondance. La courbe C est algébrique et la correspondance sera dite irréductible si la courbe C est irréductible. A un point de C_1 correspondent α_2 points de C et à un point de C_2, α_1 points de C. La courbe C contient deux involutions : l'une γ_1 d'ordre α_2, représentée par C_1 et l'autre γ_2, d'ordre α_1, représentée par C_2. Si l'on désigne par T_1 l'opération qui fait passer de C_1 à C, par T_2 celle qui fait passer de C_2 à C, on a $T = T_1 T_2^{-1}$.

Parmi les groupes de α_2 points de C_2 correspondant aux points de C_1, il y en a en général un nombre fini contenant un point double. Ces points doubles forment le groupe D_2 des points doubles de la correspondance sur C_2. Les points de C_1 auxquels correspondent sur C_2 des groupes contiennent des points doubles, sont les points de diramation de la correspondance sur C_1; ils forment un groupe Δ_1. La correspondance possède de même un groupe de points doubles D_1 sur C_1 et un groupe de points de diramation Δ_2 sur C_2. Le groupe Δ_1, par exemple, est également le groupe de diramation de la correspondance T_1 entre C_1 et C.

Sur la courbe C_1, par exemple, les groupes de α_1 points qui correspondent aux points de C_2 forment une série non linéaire d'ordre α_1 et d'indice α_2, c'est-à-dire qu'un point de C_1 appartient à α_2 groupes de la série.

11. Formule de Zeuthen. — Désignons par p le genre de la courbe C, par δ_1 le nombre des points de diramation sur C_1, par δ_2 le nombre de points de diramation sur C_2. La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance $(1, \alpha_2)$ entre les courbes C_1, C_2, donne

$$2\alpha_2(p_1 - 1) + \delta_1 = 2(p-1)$$

et à la correspondance $(1, \alpha_1)$ entre C_2 et C,

$$2\alpha_1(p_2 - 1) + \delta_2 = 2(p-1).$$

En éliminant p, on obtient la formule de Zeuthen relative à la correspondance T,

$$2\alpha_2(p_1-1)+\delta_1=2\alpha_1(p_2-1)+\delta_2.$$

Severi [71] a donné une interprétation fonctionnelle de la formule de Zeuthen. Si K_1 est un groupe canonique de C_1, K_1^* son transformé sur C_2, K_2 un groupe canonique de C_2 et K_2^* son transformé sur C_1, on a, sur la courbe C_2,

$$K_1^*+D_2\equiv\alpha_1 K_2+\Delta_2$$

et sur C_1

$$K_2^*+D_1\equiv\alpha_2 K_1+\Delta_1.$$

12. Correspondance entre les séries linéaires. — Considérons, sur C_1, les ∞^{p_1} séries linéaires $|A_1|$ d'un certain ordre n. Aux groupes d'une série $|A_1|$ correspondent, sur C_2, des groupes de $n\alpha_2$ points appartenant à une même série linéaire $|A_2|$. Supposons que les séries $|A_1|$ qui donnent naissance à la même série linéaire $|A_2|$ formant un ou plusieurs systèmes continus et soient Σ_1 un de ces systèmes, ρ_1 sa dimension. En reprenant le raisonnement fait plus haut dans l'étude des involutions, on démontre qu'il existe, entre les séries linéaires $|A_1|$ de Σ_1, un groupe transitif de ∞^{ρ_1} correspondances deux à deux permutables. Les systèmes Σ_1 sont en nombre $\infty^{p_1-\rho_1}$ et une série linéaire $|A_2|$ appartient à un seul de ces systèmes.

Si nous désignons par V_1 la variété de Jacobi attachée à la courbe C_1, aux $\infty^{p_1-\rho_1}$, systèmes Σ_1 correspondent sur cette variété des variétés abéliennes Σ_1, à ρ_1 dimensions, forment une congruence linéaire abélienne $\{\Sigma_1\}$ et ne se coupent pas deux à deux. On arrive évidemment à la même congruence en partant de séries linéaires d'un autre ordre de la courbe C_1.

De même, il existe sur la variété de Jacobi V_2 attachée à la courbe C_2, une congruence abélienne linéaire $\{\Sigma\}$, formée de $\infty^{p_2-\rho_2}$ variétés abéliennes Σ_2, de dimensions ρ_2 ne se rencontrant pas deux à deux.

Considérons maintenant, sur la courbe C, les ∞^{p} séries linéaires $|G|$ d'un certain ordre. A une série linéaire $|G|$ correspond, sur C_1, une série linéaire $|H_1|$ et, sur C_2 une série linéaire $|H_2|$. Supposons que les séries $|G|$ donnant naissance aux mêmes séries linéaires $|H_1|$, $|H_2|$ forment un ou plusieurs systèmes continus et soient σ un de ces systèmes, ρ sa dimension. On démontre qu'il existe, entre les ∞^{ρ} séries linéaires de σ, un groupe transitif de ∞^{ρ} correspondances deux à deux permutables. Il existe $\infty^{p-\rho}$ systèmes σ et sur la variété de Jacobi V attachée à la courbe C, il correspond aux systèmes σ de variétés abéliennes σ formant une congruence abélienne d'ordre 1, $\{\sigma\}$.

Les séries linéaires $|G|$ qui donnent naissance, sur la courbe C_1 seule, à une même série linéaire $|H_1|$, forment un ou plusieurs systèmes continus σ_1 à $p-\rho_1$ dimensions. De même, les séries linéaires, $|G|$ donnant, sur la courbe C_2 seule, naissance à une même série linéaire $|H_2|$ forment un ou plusieurs systèmes continus σ_2, à $p-p_2$ dimensions.

Deux systèmes σ_1, σ_2 ont en commun un ou plusieurs systèmes σ. Lorsque σ_2 varie, ce système σ engendre σ_1 et les séries $|H_2|$ homologues sur C_2 donnent, sur C_1, la série linéaire $|H_1|$ homologue du système σ_1. Ces séries $|H_2|$ forment donc des systèmes analogues à Σ_2.

Sur la variété de Jacobi V, nous avons deux congruences abéliennes $\{\sigma_1\}$, $\{\sigma_2\}$, de dimensions p_1, p_2, formées de variétés abéliennes σ_1, σ_2 de dimensions respectives $p-p_1$, $p-p_2$. Deux variétés σ_1, σ_2 se rencontrent suivant une ou plusieurs variétés σ. Les variétés σ appartenant à une variété σ_1 forment une congruence abélienne d'ordre 1 à $p-p_1-\rho$ dimensions, à laquelle correspond, sur V_2, une variété Σ_2. On a donc $p-p_1-\rho=\rho_2$. En intervertissant les rôles de C_1, C_2, on a de même $p-p_2-\rho=\rho_1$. Par suite, on a $p_1-\rho_1=p_2-\rho_2$. Les congruences $\{\Sigma_1\}$ sur V_1 et $\{\Sigma_2\}$ sur V_2 ont donc la même dimension.

13. Correspondances entre les points d'une courbe algébrique. — Supposons maintenant les courbes C_1, C_2 superposées et, pour simplifier les notations, considérons une correspondance algébrique irréductible (α, β) entre les points a, b d'une courbe C. La théorie géométrique que nous allons résumer est due à Severi [73]; on en trouvera un exposé détaillé dans le *Trattato di Geometria algebrica* de l'auteur.

La correspondance T considérée fait correspondre, à un point a de C un groupe B de β points de C. Supposons qu'il existe un nombre entier γ tel que le groupe $\gamma a+B$ varie dans une série linéaire lorsque a décrit la courbe C. Le nombre γ est appelé *valence* (valenza, Wertigkeit) de la correspondance T. Ce nombre peut être positif, négatif ou nul. Lorsque γ est négatif, la définition signifie que, si T fait correspondre à un point a_1 de C un groupe B_1, on a

$$(-\gamma)a+B_1\equiv(-\gamma)a_1+B.$$

Sur une courbe C de genre supérieur à zéro, une correspondance ne peut avoir qu'une seule valence.

Considérons sur la courbe C deux correspondances T_1, T_2, faisant correspondre à un point a respectivement les groupes B_1, B_2. On appelle somme $T_1 + T_2$ des correspondances T_1, T_2, l'opération qui fait correspondre au point a le groupe de points $B_1 + B_2$.

Si les correspondances T_1, T_2 ont des valences, respectivement γ_1, γ_2, le groupe $(\gamma_1 + \gamma_2)a + B_1 + B_2$ varie évidemment dans une série linéaire lorsque a décrit la courbe C et la correspondance $T_1 + T_2$ a donc la valence $\gamma_1 + \gamma_2$.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ les points qu'une correspondance T_1 fait correspondre à un point a et $B_1, B_2 \ldots, B_\beta$ les groupes que T_2 fait correspondre respectivement à $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$. On appelle produit $T_1 T_2$ des correspondances $T_1 T_2$ l'opération qui fait correspondre au point a le groupe de points $B_1 + B_2 + \ldots + B_\beta$.

Supposons que T_1, T_2 aient respectivement les valences γ_1, γ_2 et soient $b'_1, b'_2, \ldots, b'_\beta$ les points que T_1 fait correspondre à un point a; $B'_1, B'_2, \ldots, B'_\beta$ les groupes que T_2 fait correspondre à $b'_1, b'_2, \ldots, b'_\beta$. Les groupes $\gamma_2 b_1 + B_1$, $\gamma_2 b_2 + B_2$, $\ldots$, $\gamma_2 b_\beta + B_\beta$; $\gamma_2 b'_1 + B'_1$, $\gamma_2 b'_2 + B'_2$, $\ldots$, $\gamma_2 b'_\beta + B'_\beta$ appartiennent à une même série linéaire, donc on a

$$\begin{aligned}&\gamma_2(b_1 + b_2 + \ldots + b_\beta) + B_1 + B_2 + \ldots + B_\beta \\ &\quad \equiv \gamma_2(b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_\beta) + B'_1 + B'_2 + \ldots + B'_\beta.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\gamma_1 a + b_1 + b_2 + \ldots + b_\beta \equiv \gamma_1 a' + b'_1 + \ldots + b'_\beta,$$

donc

$$\gamma_1 \gamma_2 a + \gamma_2(b_1 + b_2 + \ldots + b_\beta) \equiv \gamma_1 \gamma_2 a' + \gamma_2(b'_1 + b'_2 + \ldots - b'_\beta).$$

En comparant à la relation fonctionnelle précédente, on a

$$\gamma_1 \gamma_2, a + B'_1, + B'_2 + \ldots + B'_\beta \equiv \gamma_1 \gamma_2 a' + B_1 + B_2 + \ldots + B_\beta.$$

La correspondance $T_1 T_2$ a donc la valence $-\gamma_1 \gamma_2$.

Soit, sur la courbe C, une série linéaire simplement infinie g^1_n, d'ordre n. Faisons correspondre à un point de C les $n - 1$ points qui complètent le groupe de la série contenant ce point. La correspondance ainsi définie est involutive, ses indices sont $\alpha = \beta = n - 1$, et elle a la valence 1. On l'appelle correspondance élémentaire.

La somme de γ correspondances élémentaires est une correspondance de valence γ et le produit de cette correspondance par une nouvelle correspondance élémentaire est une correspondance de valence $-\gamma$. Ainsi se trouve établie l'existence de correspondances à valence.

14. Correspondances de valence nulle. — Prenons pour la courbe C un modèle projectif plan et soit

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

son équation. Soit T une correspondance de valence nulle sur la courbe C. A un point a, T fait correspondre un groupe B variable dans une série linéaire. Les groupes B sont donc découpés sur la courbe C, en dehors de certains points fixes, par les courbes d'un système linéaire

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0,$$

où les paramètres λ sont des fonctions rationnelles des coordonnées de a. La correspondance peut donc être représentée par une équation

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = 0,$$

où Φ est un polynome d'une part en x et d'autre part en x'. On en déduit que le nombre de points unis de la correspondance (points qui sont leurs propres homologues) est égal à $\alpha + \beta$, α et β étant les indices de la correspondance.

La représentation précédente de la correspondance T de valence zéro montre que la correspondance inverse T^{-1} a également la valence zéro. Ce résultat s'étend aux correspondances à valence γ; il est d'ailleurs immédiat pour les correspondances sommes et produits de correspondances élémentaires.

Soit T une correspondance de valence γ. Au moyen de $\gamma + 1$ correspondances élémentaires, construisons une correspondance T' de valence $-\gamma$. La correspondance T + T' a la valence nulle et il en est de même de son inverse. Soient A, A_1 les groupes que T^{-1} fait correspondre à des points b, b_1 et A', A'_1 les groupes que $(T)^{-1}$ fait correspondre aux mêmes points. On a

$$-\gamma b + A' \equiv -\gamma b_1 + A'_1, \qquad A + A' \equiv A_1 + A'_1,$$

d'où

$$\gamma b + A \equiv \gamma b_1 + A_1.$$

La correspondance T^{-1} a donc la même valence que T.

15. **Principe de correspondance de Cayley-Brill.** — Le principe de correspondance de Cayley-Brill est la généralisation, aux correspondances ayant une valence, du principe de correspondance de Chasles pour les courbes rationnelles.

Considérons tout d'abord une correspondance élémentaire et soient A, B les groupes que la correspondance et son inverse font correspondre à un point a (A et B coïncident). Le groupe $\overline{U}$ des points unis de la correspondance n'est autre que le jacobien de la série linéaire $|a + A|$ définissant la correspondance. On a donc

$$\overline{U} \equiv A + B + 2a + K,$$

$|K|$ étant la série canonique de C.

Le groupe de points unis d'une somme de correspondance est évidemment formé des points unis de ces correspondances, par suite si T_1 est une somme de λ correspondances élémentaires, le groupe $\overline{\overline{U}}$ de m points unis satisfait à la relation fonctionnelle

$$\overline{U} \equiv A + B + 2\lambda a + \lambda K,$$

A et B étant les groupes que T_1 et T_1^{-1} font correspondre au point a.

Soit maintenant T une correspondance de valence négative γ. Considérons la correspondance T_1 précédente pour $\lambda = -\gamma$. Le groupe des points unis de la correspondance à valence nulle $T + T_1$ est évidemment équivalent à la somme des groupes que cette correspondance et son inverse font correspondre à un point par conséquent, le groupe U des points unis de T satisfait à la relation fonctionnelle

$$U \equiv A + B + 2\gamma a + \gamma K,$$

A et B étant les groupes que T et T^{-1} font correspondre au point a.

Soit enfin T une correspondance à valence positive γ. En construisant une correspondance T' de valence $-\gamma$ et ensuite la somme $T + T'$, on voit que le groupe des points unis de T satisfait à la relation fonctionnelle précédente, qui est donc vraie dans tous les cas.

Si α, β sont les indices de la correspondance et u le nombre des points unis, on a donc

$$u = \alpha + \beta + 2\gamma p;$$

c'est la formule de Cayley-Brill.

16. Correspondances dépendantes. — Soient $T_1, T_2, \ldots, T_r$ r correspondances quelconques, à valence ou non, et $B_1, B_2, \ldots, B_r$ les groupes qu'elles font correspondre à un point a. On dira que ces correspondances sont dépendantes suivant les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ si le groupe de points

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_r B_r$$

varie dans une série linéaire lorsque a décrit C, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ étant des nombres positifs ou négatifs. Dans le cas où il n'est pas possible de trouver des entiers tous différents de zéro de manière à satisfaire à cette condition, les correspondances sont dites indépendantes.

Le concept de correspondance à valence rentre dans le précédent. Si en effet T est une correspondance à valence γ et I la correspondance identique, le groupe $B + \gamma I$ varie dans une série linéaire et T, I sont dépendantes suivant les nombres $1, \gamma$.

Si les correspondances $T_1, T_2, \ldots, T_r$ sont dépendantes suivant les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, il en est de même de leurs inverses, c'est-à-dire que si $A_1, A_2, \ldots, A_r$ sont les groupes que $T_2^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_r^{-1}$ font correspondre à un point b, le groupe

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r A_r$$

varie dans une série linéaire lorsque b décrit C.

Si $U_1, U_2, \ldots, U_r$ sont les groupes de points unis des correspondances $T_1, T_2, \ldots, T_r$, on a

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_r U_r \equiv \lambda_1(A_1 + B_1) + \lambda_2(A_2 + B_2) + \ldots + \lambda_r(A_r + B_r).$$

17. Base du système des correspondances sur une courbe. — Étant donnée une courbe irréductible C, de genre p, on peut déterminer sur cette courbe un nombre fini μ de correspondances indépendantes telles que toute correspondance dépende des précédentes suivant des nombres $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$. On a d'ailleurs $\mu \leqq 2p^2$. Les correspondances constituent une base pour les correspondances appartenant à C.

Ce théorème a été établi par Severi [73] en utilisant un résultat obtenu par voie transcendante par Hurwitz [36]; c'est le théorème d'Abel qui permet le passage du point de vue analytique au point de vue géométrique.

La question peut revêtir un autre aspect. Soient C_1, C_2 deux courbes algébriques irréductibles de genres p_1, p_2 et F la surface qui représente les courbes de points de ces courbes. Cette surface a été étudiée par Severi [73], De Franchis [25] et Maroni [45]; elle possède deux faisceaux de courbes unisécantes. L'un de ces faisceaux est formé des courbes K_1 qui représentent les couples de points de C_1, C_2 contenant un point fixe de C_2, l'autre est formé de courbes K_2 représentant les couples de points de C_1, C_2 contenant un point fixe de C. Une correspondance quelconque T, d'indices α_1, α_2, entre les courbes C_1, C_2 est représentée par une courbe T tracée sur la surface F; cette courbe rencontre les courbes K_1 en α_1 points et les courbes K_2 en α_2 points. Severi [73] démontre que l'on peut trouver, sur F, un certain nombre de courbes, au plus égal à $p_1 p_2$, telles que toute courbe tracée sur la surface puisse s'obtenir par addition et soustraction de ces courbes et des courbes K_1, K_2. Si les courbes C_1, C_2 sont birationnellement identiques, on retrouve le résultat obtenu pour les correspondances entre les points d'une courbe.

On peut également considérer la surface qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe C. Cette surface a été étudiée par Severi [72] et de Franchis [25, 26]; le problème dont il est question ici, transporté sur cette surface, a été étudié par Severi [73].

On sait que Severi a étendu la théorie de la base pour les courbes tracées sur une surface, à une surface quelconque (¹).

18. Formule de Schubert. — Comme application de la théorie des correspondances, Severi [XII] a démontré une formule, établie par une autre voie par Schubert, donnant le nombre de groupes de $r+1$ points communs à une série linéaire g_n^r, d'ordre n et de dimen-

(¹) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (*Math. Annalen*. t. 62, 1906,); *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1908); *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 30, 1910).

sion r, et à une série γ_m, simplement infinie, d'ordre m et d'indice ν, appartenant à une courbe C.

Soit $Z_{r,n}$ ce nombre. Étant donné un point P de la courbe, désignons par Q les points des groupes de γ_m contenant P et par R les points des groupes de la série g_n^r contenant r points Q appartenant à un même groupe de γ_m.

La correspondance T_1, entre les points P, Q, est involutive et a les indices égaux à $\nu(m-1)$. La correspondance T, entre les points P, R, a pour indices

$$(m-r)Z_{r-1,n-1}, \quad \nu\binom{m-1}{r}(n-r).$$

P étant donné, les $\nu\binom{m-1}{r}$ groupes de g_n^r contenant les points R homologues de P, contiennent $\binom{m-2}{r-1}$ fois chaque point Q homologue de P. Lorsque P varie, ces $\binom{m-1}{r}$ groupes décrivent une série linéaire, donc la correspondance

$$T+\binom{m-2}{r-1}T_1$$

a la valence zéro. Les points unis de cette correspondance sont les points unis de T et ceux de T_1 comptés $\binom{m-2}{r-1}$ fois. Les premiers forment les groupes de $r+1$ points cherchés et sont donc au nombre de $(r+1)Z_{n,r}$. Les points unis de T_1 sont les points doubles de γ_m; soit d leur nombre. On a donc

$$(n-r)Z_{r-1,n-1}+\nu\binom{n-1}{r}(n-r) \\ +2\nu(m-1)\binom{m-2}{r-1}=(r+1)Z_{r,n}+\binom{m-2}{r-1}d.$$

Pour $r=1$, on a $Z_{0,n-1}=\nu(n-1)$. On en déduit, de proche en proche,

$$Z_{r,n}=n\nu\binom{m-1}{r}-\frac{1}{2}(m-2)d.$$

19. Théorème de Castelnuovo. — *Considérons, sur la courbe* C, *une série γ_m d'ordre m et d'indice ν. Construisons sur* C *une série linéaire g^{m-1}_{m-1+p}, non spéciale, d'ordre $m-1+p$ et de dimension*

$m-1$, *telle que chaque groupe de* γ_m *ne soit pas contenu dans un groupe de cette série. Il suffit pour cela de déterminer* g_{m-1+p}^{m-1} *par un de ses groupes formé en ajoutant un groupe non spécial de* p *points arbitrairement choisis, à un groupe de* $m-1$ *points tirés d'un groupe de* γ_m.

D'après la formule de Schubert, le nombre z des groupes de γ_m appartenant à la série g_{m-1+p}^{m-1} est donné par

$$z = \nu(m+p-1) - \frac{1}{2}d.$$

On a $z \geqq 0$, donc $d \leqq 2\nu(m+p-1)$.

Supposons que l'on ait $z=0$. Cela signifie que parmi les ∞^p séries y_{m-1+p}^{m-1} de la courbe C, une série ne contiendra pas en général de groupe de γ_m; mais si une série particulière contient un groupe de γ_m, elle les contient tous. On peut construire une de ces séries particulières de la manière suivante : considérons une série g_{m+p}^m quelconque (non spéciale) et un groupe de γ_m. Il y a un groupe de la série g_{m+p}^m qui contient le groupe de γ_m choisi; soit G le groupe de p points qui, avec le groupe de γ_m, forme le groupe considéré de g_{m+p}^m. Les groupes de g_{m+p}^m contenant un point P de G forment une série g_{m-1+p}^{m-1} contenant un groupe de γ_m et par conséquent tous les groupes de γ_m. Il en résulte que la série d'ordre m, formée par les groupes de g_{m+p}^m contenant G, contient tous les groupes de γ_m. Par conséquent [10] :

Une série algébrique irréductible ∞^1, γ_m, *d'ordre* m *et d'indice* ν, *contient au plus* $2\nu(n+p-1)$ *points doubles. Si le maximum est atteint, et seulement dans ce cas, la série est formée de groupes équivalents.*

On déduit de ce théorème une propriété importante, établie par voie transcendante par Severi [1] :

Si une série algébrique irréductible ∞^1, γ_m, *d'ordre* m *et d'indice* ν *est telle que les* ν *groupes passant par un point* P *varient dans une série linéaire, les groupes de* γ_m *sont équivalents.*

---

[1] *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, t. 12, 3e série, 1906; *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alle riduzione a forma normale degli integrali di Picard* (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 21, 1906).

En effet, faisons correspondre à un point P les $\nu(m-1)$ points des groupes de γ_m contenant P. La correspondance ainsi obtenue est involutive et a la valence ν; elle possède donc $2\nu(m+p-1)$ points doubles. Par le théorème de Castelnuovo, les groupes de γ_m sont donc équivalents.

20. Remarque. — Le théorème de Castelnuovo a été l'origine de plusieurs recherches importantes.

Le nombre z, introduit par Castelnuovo, a été appelé défaut d'équivalence de la série γ_m par R. Torelli. Celui-ci [87] a étudié en particulier les séries non linéaires d'ordre p, d'indice p et de genre p appartenant à une courbe de genre p. Il a utilisé les résultats obtenus pour démontrer l'identité birationnelle de deux courbes ayant même tableau de périodes des intégrales abéliennes. Nous avons rendu compte de ses recherches dans une conférence faite au Séminaire de M. Hadamard [31].

Allen [1] a considéré les séries de groupes de points d'ordre n, d'indice ν et de dimension ρ, et le nombre des groupes d'une telle série qui appartiennent à des groupes d'une série linéaire d'ordre $m-\rho+p$ et de dimension $m-\rho$.

Comessatti [21], partant d'une série γ_m d'indice ν simplement infinie, introduit p nombres Z_0. $Z_1, \ldots, Z_{p-1}$ de la manière suivante : Z_r est le nombre des groupes d'une série linéaire non spéciale d'ordre $(r+1)(m-1)+p$ et de dimension $(r+1)(m-1)$, contenant (partiellement) r groupes de γ_m. Le nombre Z_0 est donc le nombre z de Castelnuovo. Comessatti démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que, parmi les sommes des p intégrales abéliennes de première espèce indépendantes de C, étendues aux groupes de la série γ_m, il y en ait $r \leqq p$ qui soient indépendantes, est que Z_r soit nul sans que $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}$ le soient. Pour $r=0$, on retrouve le résultat de Castelnuovo par l'intermédiaire du théorème d'Abel.

Castelnuovo [12] a retrouvé les nombres de Comessatti dans la théorie des fonctions abéliennes.

21. Relations entre les caractères d'une correspondance. — La considération de la surface F, qui représente les couples de points de deux courbes C_1, de genre p_1, et C_2, de genre p_2, a permis d'introduire certains caractères d'une correspondance T entre C_1, C_2 et d'obtenir des propriétés de ces correspondances.

Une correspondance T, d'indices α, β, entre les courbes C_1, C_2 est représentée sur F par une courbe T dont le genre π et le degré ν sont des caractères de la correspondance. Les courbes K_1 découpent sur la courbe T des groupes de α points formant une involution possédant δ_1 points doubles. De même, les courbes K_2 découpent sur T une involution d'ordre β possédant δ_2 points doubles. De Franchis [26] a établi que l'on a

$$2(\pi - 1) - \nu = 2\beta(p_1 - 1) + 2\alpha(p_2 - 1),$$
$$2\alpha\beta - \nu = 2\alpha(\beta + p_2 - 1) - \delta_2 = 2\beta(\alpha + p_1 - 1) - \delta_1.$$

Severi [74] a ensuite établi que ν est au plus égal à $2\alpha\beta$ et que ν est précisément égal à $2\alpha\beta$ lorsque les groupes de points qui correspondent sur une des courbes aux points de l'autre, varient dans une série linéaire.

Supposons maintenant que les courbes C_1, C_2 soient birationnellement identiques. En d'autres termes, supposons que F représente les courbes de points ordonnés d'une courbe C de genre p. A deux points P_1, P_2 de C correspondent sur F deux points P_{12}, P_{21} représentant respectivement les couples P_1, P_2 et P_2, P_1. Les points P_{12}, P_{21} engendrent sur F une involution I_2 d'ordre 2 dont la courbe unie est le lieu des points qui représentent les couples de C formés de deux points superposés. Le degré de T est nécessairement pair et nous poserons $\nu = 2\nu'$. On a toujours $\nu' \leqq \alpha\beta$, l'égalité ayant lieu lorsque T a la valence zéro.

Severi [74] a établi que si u désigne le nombre des points unis de la correspondance T, on a

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leqq 4p(\alpha\beta - \nu'),$$

l'égalité ayant lieu lorsque et seulement lorsque la correspondance a une valence. Une correspondance dépendant de l'identité, a une valence.

Considérons la correspondance T^{-1}. Les correspondances T et T^{-1} ont en commun un certain nombre d de couples de points homologues. Rosati [51] a démontré que l'on a

$$(\alpha - \beta)^2 + \nu \leqq u + 2d \leqq (\alpha + \beta)^2 - \nu.$$

Cédant au désir d'établir la théorie des correspondances sans recourir à la théorie des surfaces, Severi [77] est revenu plus tard sur ces questions. La définition du degré ν d'une correspondance T d'indices α, β entre deux courbes C_1, C_2 peut se faire en calquant celle du degré d'une courbe tracée sur une surface. Si la correspondance T est variable dans un système continu de correspondances de mêmes indices, le degré de T est égal au nombre de couples communs à deux correspondances du système. En particulier, si T a la valence zéro, elle appartient toujours à un système continu et son degré est égal à $2\alpha\beta$. Si la correspondance T est isolée, on construit une correspondance T′ telle que $T + T'$ ait la valence zéro; le degré de T est égal au nombre des couples communs à T et à une correspondance du système défini par $T + T'$, diminué du nombre des couples communs à T et T′. Ce degré est indépendant du choix de la correspondance T′.

Severi introduit ensuite les correspondances complémentaires de T. Sur C_2 par exemple, fixons un groupe G_2 de p_2 points et un groupe particulier $\overline{A}_2$ correspondant, par T, à un point $\overline{a}_1$ de C_1. A un point a_1 de C_1, ayant pour homologue sur C_2 le groupe A_2, faisons correspondre le groupe $\overline{A}_2 + G_2 - A_2$. On définit ainsi la correspondance complémentaire S_2 de T. Si α', β' sont les indices de S_2, on a $\beta' = p_2$ et $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha_0} z$, α_0 étant l'indice de la série engendrée sur C_2 par les groupes A_2 et z le défaut d'équivalence de cette série (α_0 est égal à α, sauf si les groupes A_2 sont formés par des groupes d'une involution existant sur C_2). Cela étant, le degré de la correspondance T est égal à $2\left(\alpha\beta - \frac{\alpha}{\alpha_0} z\right)$. Comme z est supérieur ou égal à zéro, on retrouve le théorème de Severi.

Ajoutons que le degré d'une correspondance variable dans un système continu est nécessairement positif ou nul.

22. Applications de la théorie des correspondances. — La théorie des correspondances permet d'établir aisément un certain nombre de théorèmes [XII]. Nous établirons en premier lieu le théorème de Schwarz-Klein [66, 39] : *une courbe de genres $p > 1$ n'admet qu'un nombre fini de transformations birationnelles en elle-même.*

Supposons que la correspondance T entre les courbes C_1, C_2 soit birationnelle. On a $\alpha = \beta = 1$, $p_1 = p_2 = p$ et le degré de T est égal à $2(1-z)$. Le nombre z est le défaut d'équivalence de la série γ_1 des points de C_2, c'est-à-dire le nombre de ces points appartenant à une série non spéciale g_p^0, on a donc $z = p$. Le degré de T est donc égal à $-2(p-1)$. Si $p > 1$, ce degré est négatif et la correspondance est isolée. L'énoncé en résulte.

Démontrons maintenant qu'*une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité, ne peut contenir une infinité continue d'involutions irrationnelles.*

Considérons, sur une courbe C, une involution γ_m d'ordre m et de genre π. Elle définit une correspondance symétrique $(m-1, m-1)$ entre les points de deux courbes C_1, C_2 birationnellement identiques à C. Le degré de cette correspondance est égal à $2(m-1)^2 - 2z$, où z est le nombre de groupes de $m-1$ points de C_2, homologues des points de C_1, appartenant à une série linéaire non spéciale d'ordre $m-2+p$ et de dimension $m-2$. Si d est le nombre des points doubles de γ_m, on a

$$2z = 2(m-1)(m+p-2) + (m-2)d.$$

Par la formule de Zeuthen, on a

$$d = 2(p-1) - 2m(\pi - 1),$$

donc

$$2z = 2(m-1)^2 + 2(p-1) + 2m(m-2)(\pi - 1).$$

Le degré de la correspondance est donc égal à

$$-2(p-1) - 2m(m-2)(\pi - 1).$$

Ce degré est par conséquent négatif, car $p > 1$, $\pi \geqq 1$. Par suite, l'involution γ_m est isolée.

On sait d'ailleurs que le théorème est encore vrai si la courbe C est de genre $p = 1$, les involutions étant alors nécessairement elliptiques et privées de points unis.

La propriété précédente permet d'établir facilement le théorème obtenu par voie analytique, à la même époque et d'une manière indépendante, par G. Humbert [35] et Castelnuovo [6] : *sur une courbe algébrique, une série d'indice* 1 *et de dimension supérieure à* *l'unité, est linéaire, ou chacun de ses groupes est formé de groupes d'une involution.*

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas d'une série γ_m^2, d'ordre $m > 2$ et de dimension 2. Écartons le cas où les groupes de γ_m^2 sont formés de couples de groupes d'une involution et celui où les groupes sont équivalents. Les groupes de la série γ_m^2 passant par un point forment une involution γ_{m-1}, variable avec le point. La courbe posséderait donc une série continue d'involutions irrationnelles, ce qui est impossible.

De Franchis [26] a donné des démonstrations géométriques des théorèmes de Schwarz-Klein et de Humbert-Castelnuovo en utilisant la théorie des surfaces. On doit à R. Torelli [83] une démonstration du dernier de ces théorèmes, basée sur la théorie des correspondances, obtenue en *restant* sur la courbe.

D'autres applications de la théorie des correspondances à la géométrie sur une courbe algébrique, sont dues à Comessatti [20], Göhner [33] et R. Torelli [84].

IV. — Correspondances entre deux courbes algébriques. Le point de vue transcendant.

23. Entiers caractéristiques d'une correspondance. — Considérons une correspondance irréductible T, d'indices α, β, entre les points x, y d'une courbe C de genre p. Nous désignerons également par C la surface de Riemann correspondant à la courbe C.

A un point x de C correspondent β points y', y'', ..., y^β. Considérons un système de p intégrales de première espèce indépendantes $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_p(x)$ de la courbe C et formons les sommes $u_k(y') + u_k(y'') + \ldots + u_k(y^\beta)$. Considérées comme fonctions de x, ces sommes sont des intégrales de première espèce et lorsque l'on fait décrire à x un cycle fermé sur C, les quantités y', y'', ..., y^β subissent une certaine permutation. On a

$$u_k(y') + u_k(y'') + \ldots + u_k(y^\beta) = \Sigma \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p),$$

les coefficients π_{ki} étant indépendants de x et les quantités π_k étant des constantes d'intégration.

Supposons que les p intégrales $u_k(x)$ soient des intégrales normales, dont le tableau des périodes relatives au système de rétrosections σ_i, σ_{i+p} correspondant, soit :

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_p & \sigma_{p+1} & \sigma_{p+2} & \dots & \sigma_{2p} \\ u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1p} \\ u_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_p & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{array}\right| \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Lorsque le point x décrit le cycle σ_l, $u_l(x)$ devient $u_l(x)+1$ et l'on a

$$(1) \qquad \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} a_{ki} \qquad (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \dots,\ p),$$

h_{kl} et g_{il} étant des entiers.

Lorsque le point x décrit le cycle σ_{l+p}, on obtient

$$(2) \qquad \sum_i a_{il}\pi_{ki} = \mathrm{H}_{kl} + \sum_i \mathrm{G}_{il} a_{ki} \qquad (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \dots,\ p),$$

H_{kl} et G_{il} étant des entiers.

L'élimination des π_{kl} entre les équations (1) et (2) donne les p^2 relations

$$(3) \qquad \sum_i h_{ki} a_{il} + \sum_i \sum_m g_{mi} a_{km} a_{il} = \mathrm{H}_{kl} + \sum_i \mathrm{G}_{il} a_{ki}$$
$$(i,\ k,\ l,\ m = 1,\ 2,\ \dots,\ p).$$

Les nombres h_{ki}, g_{mi}, H_{kl}, G_{il} sont les p^2 entiers caractéristiques de la correspondance T; ils ont été introduits par Hürwitz [36].

24. Classification des correspondances. — Deux cas peuvent se présenter suivant que les équations (3) sont vérifiées identiquement ou donnent les relations entre les $\frac{1}{2}p(p+1)$ périodes a_{ik}. Dans le premier cas, tous les entiers caractéristiques de la correspondance T dont les indices sont différents, sont nuls et l'on a de plus

$$h_{11} = h_{22} = \dots = h_{pp} = \mathrm{G}_{11} = \mathrm{G}_{22} = \dots = \mathrm{G}_{pp},$$
$$g_{11} = g_{22} = \dots = g_{pp} = \mathrm{H}_{11} = \mathrm{H}_{22} = \dots = \mathrm{H}_{pp} = 0.$$

Si l'on désigne par $-\gamma$ la valeur commune des quantités h_{ii}, g_{ii}, on a

$$u_k(y') + u_k(y'') + \dots + u_k(y^\beta) + \gamma u_k(x) = \pi_k \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

et en utilisant le théorème d'Abel, on voit que la correspondance T a la valence γ.

Dans la seconde hypothese, la correspondance T est appelée singulière.

Hürwitz remarque incidemment que les correspondances singulières ne peuvent exister que sur des courbes à modules particuliers. Cependant, pour que cette proposition soit complètement établie, il faut encore prouver que les relations (3) sont indépendantes des $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ relations qui lient les périodes u_{ik}, relations qui ne sont pas connues. En d'autres termes, il faut établir qu'il existe des courbes à modules généraux privées de correspondances singulieres. Dans ce but, Severi [75] a considéré les correspondances entre les points d'une courbe variable dans un système linéaire ∞^2 au moins sur une surface algébrique régulière et a établi que cette courbe ne possède en général que des correspondances à valence [78]. D'autres démonstrations de cette propriété ont été données par Zariski [91] et Lefschetz [43].

25. **Représentation et existence des correspondances.** — Hürwitz [36] a poursuivi l'étude des correspondances entre les points d'une courbe C en utilisant les fonctions θ relatives à la surface de Riemann C. Il a démontré que toute correspondance algébrique, singulière ou non, peut être représentée par deux équations algébriques entre les coordonnées des points homologues x, y. Si la correspondance est à valence positive ou nulle, elle peut être représentée par une seule équation.

Le nombre de points unis d'une correspondance est donné par

$$\alpha+\beta-(h_{11}+h_{22}+\ldots+h''_p+G_{11}+G_{22}+\ldots+G_{pp}).$$

Si la correspondance a une valence γ, on retrouve la formule de Cayley-Brill.

Tout système de solutions des équations (1), (2) donne une correspondance entre les points de C.

Supposons que l'on ait μ solutions du système des équations (1) et (2) et soient $\pi_{ik}^{(1)}, \pi_{ik}^{(2)}, \ldots, \pi_{ik}^{(\mu)}$ les valeurs de π_{ik} dans ces solutions. Si les p^2 équations

$$\lambda_1\pi_{kl}^{(1)}+\lambda_2\pi_{kl}^{(2)}+\ldots+\lambda_\mu\pi_{kl}^{(\mu)}=0 \qquad (k,\, l=1,\, 2,\, \ldots,\, p)$$

ne sont satisfaites que pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\mu = 0$, les correspondances données par les solutions envisagées sont indépendantes; elles sont dépendantes dans le cas contraire. Il existe, sur une courbe C, $\mu \leqq 2p^2$ correspondances indépendantes et toute autre correspondance en est dépendante.

La transformation inverse T^{-1} de T admet des entiers caractéristiques h'_{ik}, g'_{ik}, H'_{ik} et G'_{ik} donnés par

$$h'_{ik} = G_{ki}, \qquad g'_{ik} = -g_{ki}, \qquad H'_{ik} = -H_{ki}, \qquad G'_{ik} = h_{ki}.$$

26. Interprétation géométrique des formules de Hürwitz. — On doit à Rosati [53] une élégante interprétation des formules de Hürwitz.

Sur la surface de Riemann C, tout cycle σ est homologue à une combinaison linéaire à coefficients entiers des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$:

$$\sigma \sim m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \ldots + m_{2p} \sigma_{2p}.$$

Interprétons $m_1, m_2, \ldots, m_{2p}$ comme coordonnées homogènes d'un point P d'un espace linéaire S_{2p-1} à $2p - 1$ dimensions. A chaque cycle de C correspond un point rationnel (c'est-à-dire dont les coordonnées sont rationnelles) de S_{2p-1} et réciproquement. A des cycles distincts correspondent des points indépendants et réciproquement.

D'autre part, à une intégrale de première espèce

$$u(x) = \mu_1 u_1(x) + \mu_2 u_2(x) + \ldots + \mu_p u_p(x)$$

de C, associons l'hyperplan de S_{2p-1} qui a pour coordonnées les périodes de $u(x)$ le long des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$. Les hyperplans ainsi obtenus passent par l'espace à ϖ_0, à $p - 1$ dimensions, intersections des hyperplans de S_{2p-1} dont les coordonnées sont respectivement données par les lignes horizontales du tableau des périodes de $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_p(x)$. A un hyperplan passant par ϖ_0 correspond une intégrale de première espèce de C, définie à un facteur constant et à une constante additive près.

Si un point rationnel de S_{2p-1} appartient à un hyperplan passant par ϖ_0, l'intégrale qui correspond à cet hyperplan a une période nulle le long du cycle homologue de P, et réciproquement.

Dans la correspondance T, lorsque le point x décrit un cycle σ, les points homologues $y', y'', \ldots, y^{\beta}$ se permutent entre eux et décrivent un cycle σ', homologue de σ. Si nous désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ les coordonnées du point de S_{2p-1} représentant σ et par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2p}$ celles du point représentant σ', nous aurons

$$\begin{gathered}\rho x'_i = h_{i1}x_1 + h_{i2}x_2 + \ldots + h_{ip}x_p + H_{i1}x_{p+1} + H_{i2}x_{p+2} + \ldots + H_{ip}x_{2p}\\ \rho x'_{p+i} = g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + \ldots + g_{ip}x_p + G_{i1}x_{p+1} + G_{i2}x_{p+2} + \ldots + G_{ip}x_{2p}\\ (i = 1, 2, \ldots, p),\end{gathered}$$

c'est-à-dire, dans S_{2p-1}, une homographie rationnelle Ω, associée à T.

Lorsque le point x décrit σ, à une intégrale de première espèce $u(x)$ correspond une intégrale

$$u'(x) = u(y') + u(y'') + \ldots + u(y^{\beta}),$$

et la période de $u'(x)$ le long de σ est égale à la période de $u(x)$ le long de σ'.

Si nous prenons, dans la gerbe de sommet ϖ_0, les hyperplans correspondant aux horizontales de la table des périodes, la correspondance entre les intégrales $u(x)$, $u'(x)$ se traduit par

$$\rho\xi'_i = \pi_{1i}\xi_1 + \pi_{2i}\xi_2 + \ldots + \pi_{pi}\xi_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

c'est-à-dire par une homographie ω dans cette gerbe.

Eh bien, les équations (3) de Hürwitz expriment que l'espace complexe ϖ_0 est transformé en lui-même par Ω (il en est par suite de même du complexe conjugué $\bar{\varpi}_0$ de ϖ_0) et que l'homographie ω est déterminée, dans la gerbe de sommet ϖ_0, par Ω^{-1}.

Réciproquement, si une homographie rationnelle Ω de S_{2p-1}, transforme l'espace ϖ_0 en lui-même, il existe une infinité de systèmes de valeurs des entiers caractéristiques h, g, H, G, satisfaisant aux équations (1), (2) et (3), les entiers de deux quelconques de ces systèmes étant proportionnels. Sur la courbe C, ces systèmes d'entiers donneront une infinité de correspondances, deux à deux dépendantes.

Observons qu'à une correspondance ayant une valence, correspond, dans S_{2p-1}, l'homographie identique et réciproquement, à l'homographie identique correspondent les correspondances à valence.

En particulier, à une correspondance à valence zéro, pour laquelle les entiers h, g, H, G sont tous nuls, correspond une homographie dégénérée, que l'on conviendra d'appeler homographie nulle et de représenter par le symbole O.

27. **Remarque.** — C'est une étude sur les intégrales abéliennes réductibles qui a conduit Rosati [52] à représenter les cycles d'une surface de Riemann par les points rationnels et les intégrales abéliennes de première espèce par des hyperplans d'un espace S_{2p-1}. A la même époque, le même problème a conduit Scorza à une représentation en quelque sorte corrélative de la précédente. Scorza fait correspondre à une intégrale abélienne de première espèce le point de l'espace S_{2p-1} dont les coordonnées sont les périodes de cette intégrale le long de $2p$ rétrosections de la surface de Riemann; ces points appartiennent à un espace linéaire complexe à $p-1$ dimensions (indépendant de son conjugué). Scorza a utilisé ultérieurement cette représentation dans des travaux remarquables sur les fonctions abéliennes [69]. Dans cette voie, et dans le cas $p=2$, il avait été précédé par un élève de G. Humbert, Cotty [24]. Les recherches de Scorza furent indépendantes de celles de Cotty.

28. **Réciprocité associée à une correspondance.** — Considérons, dans S_{2p-1}, le système nul Λ d'équations

$$\rho\xi_i = -x_{p+i}, \qquad \rho\xi_{p+i} = x_i \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

et la réciprocité $R = \Omega\Lambda$, dont les équations s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho\xi'_i &= -g_{i1}x_1 - g_{i2}x_2 - \ldots - g_{ip}x_p - G_{i1}x_{p+1} - G_{i2}x_{p+2} - \ldots - G_{ip}x_{2p} \\ \rho\xi'_{p+i} &= h_{i1}x_1 + h_{i2}x_2 + \ldots + h_{ip}x_p + H_{i1}x_{p+1} + H_{i2}x_{p+2} + \ldots + H_{ip}x_{2p} \\ &\qquad (i=1, 2, \ldots, p). \end{aligned}$$

L'espace ϖ_0 ne peut contenir aucun point réel et n'a donc aucun point commun avec son conjugué $\overline{\varpi}_0$. Les espaces ϖ_0 et $\overline{\varpi}_0$ sont unis tant pour les homographies Ω et le système nul Λ que pour les réciprocités R.

A la correspondance T, on associe la réciprocité rationnelle R et inversement. Aux correspondances à valence est associé le système nul Λ. Les réciprocités associées à une correspondance T et à son inverse T^{-1} sont inverses l'une de l'autre.

Soient G_1 et G_{-1} les groupes de points de C qu'une correspondance T et son inverse T^{-1} font correspondre à un point x. Si les correspondances T et T^{-1} sont dépendantes, la différence $G_1 - G_{-1}$ ou la somme $G_1 + G_{-1}$ varie dans une série linéaire lorsque le point x décrit C. Dans le premier cas, Rosati [51, 52] dit que la correspondance T est symétrique, dans le second hémisymétrique. A une correspondance symétrique correspond un système nul rationnel et à une correspondance hémisymétrique, une polarité rationnelle, et inversement.

S'il existe, sur une courbe C, μ correspondances indépendantes, μ_1 correspondances symétriques indépendantes et μ_2 correspondances hémisymétriques indépendantes, on a $\mu = \mu_1 + \mu_2$ et $\mu_1 \leqq p^2$, $\mu_2 \leqq p^2$. Ces correspondances jouent un rôle dans la construction d'une base pour l'ensemble des correspondances appartenant à une courbe algébrique. Comessatti (1) a obtenu d'importants résultats dans cet ordre d'idées.

29. Extensions du concept de valence. — Rosati a été conduit à étendre successivement le concept de valence de deux manières, la première extension rentrant d'ailleurs dans la seconde.

Soit Ω l'homographie rationnelle de S_{2p-1} associée à une correspondance T. Supposons que l'homographie

$$a_0\Omega^l + a_1\Omega^{l-1} + \ldots + a_{l-1}\Omega + a_l \mathrm{I},$$

où I désigne l'homographie identique et où $a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l$ sont des entiers, ait pour homologue sur C une correspondance de valence nulle, c'est-à-dire soit l'homographie que nous avons convenu d'appeler homographie nulle. On écrira donc

$$a_0\Omega^l + a_1\Omega^{l-1} + \ldots + a_{l-1}\Omega + a_l \mathrm{I} = 0$$

et l'on supposera que l est le plus petit entier donnant lieu à cette relation. On a $l \leqq 2p$.

On a nécessairement $a_0 = 1$ et l'équation

$$\psi(z) = z^l + a_1 z^{l-1} + \ldots + a_{l-1} z + a_l = 0$$

est appelée équation minima de Ω ou de T, Rosati [54] appelle valences les racines rationnelles, donc entières, changées de signes, de l'équation précédente. Si k est le nombre de ces racines distinctes, la correspondance T est appelée k-valente. Pour $l = 1$, on retrouve le concept ordinaire de valence.

---

(1) *Intorno ad un nuovo carattere delle matrice di Riemann* (*Memorie Accad. d'Italia*, 1936).

La seconde extension du concept de valence est introduite par Rosati [55] de la manière suivante : l'équation caractéristique de l'homographie Ω coïncide avec le déterminant de l'homographie $\Omega - \rho I$. Convenons d'écrire ce déterminant sous la forme $|\Omega - \rho I|$, l'équation caractéristique de Ω étant donc

$$\Omega(\rho) = |\Omega - \rho I| = 0.$$

L'espace ϖ_0 et son conjugué $\bar{\varpi}_0$ sont unis pour Ω. Dans la gerbe de sommet ϖ_0, Ω^{-1} détermine l'homographie ω et dans la gerbe de sommet $\bar{\varpi}_0$, l'homographie conjuguée $\bar{\omega}$. En désignant encore par I l'homographie identique dans ces gerbes, les équations caractéristiques des homographies ω, $\bar{\omega}$ s'écrivent

$$\omega(\rho) = |\omega - \rho I| = 0, \qquad \bar{\omega}(\rho) = |\bar{\omega} - \rho I| = 0.$$

On a

$$\Omega(\rho) = \omega(\rho).\bar{\omega}(\rho).$$

Les valences généralisées de la correspondance T sont, changées de signe, les racines de l'équation $\omega(\rho) = 0$. Ces nombres sont réels ou imaginaires.

Soit Ω' l'homographie rationnelle associée à la correspondance T^{-1} inverse de T. L'espace ϖ_0 est uni pour Ω' et dans la gerbe ayant cet espace pour sommet, Ω'^{-1} détermine une homographie ω'. On a

$$\omega'(\rho) \equiv \bar{\omega}(\rho)$$

et par conséquent

$$\Omega(\rho) = \omega(\rho).\omega'(\rho).$$

Le premier membre $\psi(z)$ de l'équation minima de Ω est le plus petit multiple commun des polynomes $\omega(\rho)$, $\omega'(\rho)$ et par conséquent les valences généralisées au sens donné primitivement à ce mot se retrouvent parmi les valences généralisées au second sens du mot.

Les valences généralisées de T et de T^{-1} sont des imaginaires conjuguées. Une correspondance symétrique a toutes ses valences réelles et réciproquement. Une correspondance hémisymétrique a toutes ses valences imaginaires pures et réciproquement.

30. **Représentation des systèmes d'intégrales abéliennes réductibles.** — Supposons que la courbe C possède un système linéaire

d'intégrales de première espèce réductibles, ayant r périodes réduites ($0 < r < 2p$). On peut trouver, sur la surface de Riemann C, $2p - r$ cycles distincts le long desquels ces intégrales ont des périodes nulles. Les hyperplans de la gerbe de sommet ϖ_0, représentant ces intégrales dans S_{2p-1}, doivent passer par les $2p - r$ points rationnels représentant ces cycles. Supposons que le système d'intégrales envisagé ait la dimension $q - 1$ et soit complet; les hyperplans correspondant aux intégrales de ce système passent par un espace σ à $2p - q - 1$ dimensions. Cet espace σ devrant contenir les $2p - r$ points réels envisagés et l'espace ϖ_0 (qui ne contient aucun point réel), on a $r \leqq p + q$.

Si le système complet d'intégrales réductibles considéré possède $r = 2q$ périodes réduites, il sera, suivant une dénomination introduite par Severi [76], appelé système régulier.

On sait que Poincaré [50] a démontré que si une courbe algébrique de genre p contient un système régulier d'intégrales réductibles, de dimension $q - 1$, elle en possède un second de dimension $p - q - 1$. En utilisant la représentation précédente, ce théorème a été démontré très simplement par Rosati [52].

Dans l'hypothèse où se place Poincaré, l'espace σ à $2p - q - 1$ dimensions contient $2(p - q)$ points rationnels indépendants; ces points déterminent un espace rationnel $\rho_{2p-2q-1}$ à $2p - 2q - 1$ dimensions coupant ϖ_0 suivant un espace linéaire à $p - q - 1$ dimensions. L'espace polaire de cet espace par rapport au système nul Λ est un espace σ' à $p + q - 1$ dimensions contenant ϖ_0 (qui est double pour Λ) et l'espace polaire ρ'_{2q-1} de $\rho_{2p-2q-1}$ par rapport à Λ. Puisque $\rho_{2p-2q-1}$ est rationnel de même que le système nul Λ, l'espace ρ'_{2q-1} est rationnel et contient $2p$ points rationnels indépendants. Il en résulte qu'aux hyperplans passant par σ' correspondent ∞^{p-q-1} intégrales réductibles ayant $2(p - q)$ périodes réduites, ce qui démontre le théorème de Poincaré.

31. Correspondances spéciales. — Une correspondance spéciale est une correspondance à laquelle est homologue, dans l'espace S_{2p-1}, une homographie Ω singulière. Le déterminant $\Omega(0)$ de cette homographie est nul et par conséquent une correspondance spéciale a au moins une de ses valences généralisées nulle. La réciproque est évidente.

Supposons que le déterminant $\Omega(0)$ de Ω ait la caractéristique r, $(0 < r < 2p)$, c'est-à-dire que ses mineurs d'ordre $r+1$ soient tous nuls mais que l'un au moins de ses mineurs d'ordre r ne soit pas nul. L'homographie Ω est singulière d'espèce $2p-r$ et elle possède deux espaces singuliers σ, σ', le premier à $2p-r-1$ dimensions, le second à $r-1$ dimensions. A un point de σ, Ω fait correspondre un point indéterminé et à un point n'appartenant pas à σ, un point de σ'. L'homographie Ω revient à une homographie générale dans laquelle aux espaces linéaires à $2p-r$ dimensions passant par σ correspondent les points de σ'. L'homographie inverse Ω^{-1} fait correspondre à un hyperplan passant par σ' un hyperplan indéterminé et à un hyperplan ne passant pas par σ', un hyperplan passant par σ. L'homographie Ω^{-1} revient à une homographie générale entre les espaces à $r-2$ dimensions appartenant à σ' et les hyperplans passant par σ,

Dans la gerbe de sommet ϖ_0, Ω^{-1} détermine l'homographie ω; celle-ci est donc singulière et possède deux espaces singuliers τ, τ' (passant par ϖ_0), le premier contenant σ' et le second σ. Soit $p+q-1$ la dimension de τ; l'espace τ' aura $2p-q-1$ dimensions. Aux ∞^{p-q-1} hyperplans passant par τ, ω fait correspondre des hyperplans indéterminés passant par ϖ_0 et aux ∞^{q-1} hyperplans contenant ϖ_0 et rencontrant τ suivant un même espace à $p+q-2$ dimensions, correspond un même hyperplan passant par τ'.

L'homographie Ω étant rationnelle, ses espaces singuliers σ, σ' sont également rationnels; σ contient $2p-r$ points rationnels indépendants et σ' contient r points rationnels indépendants. Or, un espace linéaire à $p+q-1$ dimensions passant par ϖ_0 ne peut contenir plus de $2q$ points rationnels indépendants, sans quoi, il existerait une relation linéaire entre les intégrales homologues de $p-q$ hyperplans indépendants passant par cet espace. On doit donc avoir, en considérant σ, $r \leqq 2q$. De même, en considérant σ', on aura

$$2p-r \leqq 2(p-q), \qquad \text{d'où} \qquad r = 2q.$$

Cela étant, aux hyperplans passant par τ correspondent ∞^{p-q-1} intégrales réductibles ayant $2(p-q)$ périodes réduites et aux hyperplans passant par τ', ∞^{q-1} intégrales réductibles ayant $2q$ périodes réduites. A la correspondance spéciale T sont donc associés deux systèmes réguliers Σ, Σ', d'intégrales réductibles, de dimensions $q-1$ et $p-q-1$.

Une intégrale de première espèce $u(x)$, homologue d'un hyperplan passant par τ, a pour correspondante à l'intégrale

$$u(y') + u(y'') + \ldots + u(y^\beta),$$

qui reste constante lorsque le point x décrit la courbe C. A une intégrale $u(x)$ n'appartenant pas au système précédent, correspond une intégrale appartenant au système régulier Σ. Donc les sommes des intégrales de première espèce aux points homologues d'un point x engendrent le système Σ et les mêmes sommes restent constantes lorsqu'il s'agit d'intégrales du système Σ'.

Rosati [53] a ainsi établi une liaison entre les systèmes réguliers d'intégrales réductibles de la courbe C et les correspondances spéciales existant entre les points de cette courbe. Il a poursuivi son raisonnement dans l'hypothèse où les espaces σ, σ' ne sont pas indépendants. Supposons que ces espaces aient précisément en commun un espace linéaire σ_1 dont le nombre de dimensions $2q_1 - 1$ est nécessairement impair. Dans ces conditions, Ω détermine dans σ' une homographie singulière dont le premier espace singulier est σ_1 et le second, un espace σ'_1 à $2(q-q_1)-1$ dimensions. Il en résulte qu'aux points de S_{2p-1}, Ω^2 fait correspondre les points de σ'_1. On peut alors reprendre le raisonnement fait précédemment. L'homographie Ω^2 est l'homologue de la correspondance T^2, les hyperplans passant par ϖ_0 et σ'_1 ont pour homologues les intégrales d'un système régulier Σ_1 de dimension $p-q+q_1-1$ et la somme des valeurs d'une intégrale quelconque de ce système aux points du groupe que T^2 fait correspondre à un point x, reste constante lorsque x décrit C.

Les espaces σ_1 et σ'_1 peuvent à leur tour se rencontrer suivant un espace σ_2, et ainsi de suite. Il y a deux cas à considérer suivant qu'aucune puissance de T n'est une correspondance à valence nulle ou qu'il existe un nombre i tel que T^{i+1} et par suite T^{i+2}, ... soient à valence nulle. Dans le premier cas, on parviendra à un système régulier de $p-q+q_1+q_2+\ldots+q_{i-1}$ intégrales réductibles tel que les sommes des valeurs de toute intégrale de ce système aux points des groupes que T^i, T^{i+1}, ... font correspondre à x, reste constante lorsque x varie. Dans le second cas, le résultat précédent sera encore obtenu pour la correspondance T^i, mais toute intégrale de C donnera évidemment des sommes constantes de valeurs aux points que T^{i+1}, T^{i+2}, ... font correspondre à x.

32. Interprétation des valences généralisées. — Soit γ une valence généralisée (réelle ou complexe) de la correspondance T. Cela signifie que la correspondance $T+\gamma I$, où I désigne l'identité, est spéciale. Il existe donc un système régulier Σ d'intégrales réductibles tel que, pour toute intégrale $u(x)$ de ce système, la somme

$$u(y')+u(y'')+\ldots+u(y^\beta)+\gamma u(x)$$

reste constante lorsque x décrit la courbe C. Rosati [55] associe le système Σ à la valence γ. Il considère également les systèmes réguliers d'intégrales réductibles correspondant aux correspondances $(T+\gamma I)^2$, $(T+\gamma I)^3$, ..., systèmes qui peuvent coïncider ou non avec Σ suivant que les espaces singuliers de l'homographie homologue de $T+\gamma I$ dans l'espace S_{2p-1} ne se rencontrent pas ou se rencontrent.

L'introduction des systemes réguliers associés aux valences permet de donner une nouvelle forme à l'expression du nombre des points unis d'une correspondance donnée par Hürwitz. Soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ les valences généralisées de T et q_1-1, q_2-1, ..., q_k-1 les dimensions des systèmes réguliers d'intégrales réductibles qui leur sont associés. La correspondance T^{-1} a les valences $\bar\gamma_1, \bar\gamma_2, \ldots, \bar\gamma_k$ imaginaires conjuguées de celles de T (avec les mêmes multiplicités) et les systèmes réguliers d'intégrales réductibles ont les mêmes dimensions que ceux associés aux valences de T. Cela étant, le nombre des points unis de la correspondance T est égal à

$$\alpha+\beta+(\gamma_1+\bar\gamma_1)q_1+(\gamma_2+\bar\gamma_2)q_2+\ldots+(\gamma_k+\bar\gamma_k)q_k.$$

En particulier, si toutes les valences de T sont réelles, c'est-à-dire si T est une correspondance symétrique, le nombre précédent est exprimé par

$$\alpha+\beta+2(\gamma_1 q_1+\gamma_2 q_2+\ldots+\gamma_k q_k).$$

33. Application à une involution appartenant à une courbe algébrique. — Soit, sur une courbe C de genre p supérieur à l'unité, une involution γ_n d'ordre n et de genre π. Appelons T la correspondance obtenue en considérant comme homologue d'un point x les $n-1$ points qui, avec x, forment un groupe de γ_n. La correspondance T est symétrique.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les points d'un groupe de γ_n. Au point A_1, T fait correspondre le groupe G_1 des points $A_2, A_3, \ldots, A_n$ et au point A_2, par exemple, le groupe $A_1, A_3, A_4, \ldots, A_n$. Par conséquent, au point A_1, T^2 fait correspondre le groupe

$$G_2 \equiv (n-1)A_1 + (n-2)G_1.$$

On a donc

$$T^2 - (n-2)T - (n-1)I = 0,$$

et les valences de T sont 1 et $1-n$.

La courbe C possède deux systèmes réguliers d'intégrales réductibles, l'un de dimension $\pi - 1$, l'autre de dimension $p - \pi - 1$. Les intégrales du second donnent des sommes constantes aux points d'un groupe de γ_n, donc il est associé à la valence 1. L'autre est associé à la valence $1-n$. Si δ désigne le nombre des points unis de T, c'est-à-dire le nombre des points doubles de γ_n, on a

$$\delta = 2(n-1) + 2[p - \pi + (1-n)\pi],$$

formule qui coïncide avec celle de Zeuthen. Celle-ci apparaît donc comme un cas particulier du principe de correspondance.

34. **Recherches ultérieures sur les correspondances entre les points d'une courbe algébrique.** — Rosati, en utilisant l'association entre les correspondances appartenant à une courbe algébrique et les homographies rationnelles d'un espace S_{2p-1}, a poursuivi ses recherches tant sur les correspondances que sur les systèmes réguliers d'intégrales réductibles.

A une correspondance spéciale sont attachés deux systèmes réguliers d'intégrales réductibles. Inversement, à un système régulier Σ d'intégrales réductibles, sont attachés deux *réseaux* de correspondances spéciales. L'un de ces réseaux comprend les correspondances telles que les sommes des intégrales de première espèce, étendues aux points des groupes homologues d'un point de la courbe, appartiennent à Σ. Le second est formé des correspondances pour lesquelles les mêmes sommes, relatives aux intégrales de Σ, sont constantes. En partant de là, Rosati [60] a pu compléter les résultats obtenus par Severi [76] et Scorza [69] sur les intégrales abéliennes réductibles.

Deux correspondances T_1, T_2 sont appelées permutables lorsque l'expression $T_1T_2 - T_2T_1$ est une correspondance de valence nulle.

Cette notion a été rencontrée par Rosati [58] dans l'étude des *ordres* de correspondances. Il appelle ainsi des ensembles de correspondances fonctions rationnelles d'une correspondance régulière donnée. Soit T une correspondance régulière, c'est-à-dire une correspondance telle que les systèmes réguliers d'intégrales réductibles associés à ses valences généralisées, soient indépendants.

L'ordre déduit de T est l'ensemble des correspondances θ définies par la relation $l\theta = F(T)$ où l est un entier et $F(T)$ un polynome à coefficients rationnels. Les correspondances de cet ensemble sont deux à deux permutables.

La notion de correspondances permutables a d'autre part conduit Rosati [61] à l'étude de nombreux problèmes, par exemple à l'étude des correspondances permutables avec leurs inverses.

Parmi celles-ci, on rencontre les correspondances hermitiennes, correspondances définies par $T.T^{-1} = kI$, où k est un entier positif. Rosati [63] a également étudié les courbes sur lesquelles l'ensemble des correspondances satisfait à certaines conditions de permutabilité.

Enfin, Rosati [53, 57] a étudié d'une manière détaillée les correspondances appartenant à une courbe de genre deux.

35. **Correspondances entre deux courbes algébriques.** — Les résultats de Hürwitz peuvent s'étendre aux correspondances algébriques T, d'indices α, β, entre deux courbes algébriques irréductibles C de genre p et D, de genre q.

Fixons, sur la surface de Riemann C, un système de $2p$ rétrosections σ_i, σ_{p+i} $(i = 1, 2, \ldots, p)$ et désignons par $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_p(x)$ les intégrales normales de première espèce de C, par a_{ki} la période de $u_k(x)$ le long du cycle σ_{p+i}. Soient de même τ_i, τ_{q+i} $(i = 1, 2, \ldots, q)$ un système de rétrosections de la surface de Riemann D, $v_1(y)$, $v_2(y)$, $\ldots$, $v_q(y)$ les intégrales de première espèce de D et b_{ki} la période de $v_k(y)$ le long du cycle τ_{q+i}. Si à un point y de D correspondent α points x', x'', $\ldots$, x^{α} de C, on a les relations

$$u_k(x') + u_k(x'') + \ldots + u_k(x^{\alpha}) = \sum_i \pi_{ki} v_i(y) + \pi_k$$

$$(i = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, p),$$

les π_k étant des constantes d'intégration et les constantes π_{ki} étant liées par les relations

$$(1)\qquad \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} a_{ki},$$

$$(2)\qquad \sum_j \pi_{kj} b_{jl} = \mathrm{H}_{kl} + \sum_i \mathrm{G}_{il} a_{ki}$$

$$(i,\ k = 1, 2, \ldots, p;\ j,\ l = 1, 2, \ldots, q).$$

Les entiers h, g, H, G doivent satisfaire aux relations

$$(3)\qquad \sum_j h_{kj} b_{jl} + \sum_j \sum_m g_{mj} a_{km} b_{jl} = \mathrm{H}_{kl} + \sum_i \mathrm{G}_{il} a_{ki}$$

$$(i,\ k,\ m = 1, 2, \ldots, p;\ j,\ l = 1, 2, \ldots, q).$$

L'opération T^{-1} donne, d'une manière analogue,

$$v_k(y') + v_k(y'') + \ldots + v_k(y^{\beta}) = \sum_i \pi'_{ki} u_i(x) + \pi'_k$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, q)$$

et les relations

$$(1')\qquad \pi'_{kl} = h'_{kl} + \sum_j g'_{jl} b_{kj},$$

$$(2')\qquad \sum_i \pi'_{ki} a_{il} = \mathrm{H}'_{kl} + \sum_j \mathrm{G}'_{jl} b_{kj},$$

$$(3')\qquad \sum_i h'_{ki} a_{il} + \sum_i \sum_n g'_{ni} b_{kn} a_{il} = \mathrm{H}'_{kl} + \sum_j \mathrm{G}'_{jl} b_k$$

$$(i,\ l = 1, 2, \ldots, p;\ j,\ k,\ n = 1, 2, \ldots, q).$$

Rosati (56) démontre que l'on a

$$h'_{kl} = \mathrm{G}_{lk}, \qquad g'_{kl} = -g_{lk}, \qquad \mathrm{H}'_{kl} = -\mathrm{H}_{lk}, \qquad \mathrm{G}'_{kl} = h_{lk}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, q).$$

Faisons maintenant correspondre aux cycles de C les points rationnels d'un espace S_{2p-1} et aux cycles de D, les points rationnels d'un espace S_{2q-1}. Aux intégrales de première espèce de C, faisons correspondre les hyperplans de S_{2p-1} dont les coordonnées sont les périodes de ces intégrales le long des cycles σ_i, σ_{p+i}; les hyperplans obtenus passent par un espace α_0 à $p-1$ dimensions. Un procédé analogue fait correspondre aux intégrales de première espèce de D les hyperplans de S_{2q-1} passant par un espace β_0 à $q-1$ dimensions.

Associons à la correspondance T l'homographie Ω

$$\rho x_i = h_{i1}y_1 + h_{i2}y_2 + \ldots + h_{iq}y_q + H_{i1}y_{q+1} + H_{i2}y_{q+2} + \ldots + H_{iq}y_{2q}$$
$$\rho x_{p+i} = g_{i1}y_1 + g_{i2}y_2 + \ldots + g_{iq}y_q + G_{i1}y_{q+1} + G_{i2}y_{q+2} + \ldots + G_{iq}y_{2q}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

entre les espaces S_{2p-1} et S_{2q-1} et l'homographie ω,

$$\rho\eta'_i = \pi_{1i}\xi'_1 + \pi_{2i}\xi'_2 + \ldots + \pi_{pi}\xi'_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

entre les gerbes de sommets β_0, α_0.

Les relations (1), (2) et (3) expriment que l'homographie ω est déterminée par l'homographie

$$\rho\eta_i = h_{1i}\xi_1 + h_{2i}\xi_2 + \ldots + h_{pi}\xi_p + g_{1i}\xi_{p+1} + g_{2i}\xi_{p+2} + \ldots + g_{pi}\xi_{2p},$$
$$\rho\eta_{q+i} = H_{1i}\xi_1 + H_{2i}\xi_2 + \ldots + H_{pi}\xi_p + G_{1i}\xi_{p+1} + G_{2i}\xi_{p+2} + \ldots + G_{pi}\xi_{2p}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, q)$$

entre les hyperplans de S_{2q-1} et S_{2p-1}.

Supposons $p \geqq q$; il existe dans S_{2p-1} un espace à $p+q-1$ dimensions, passant par α_0, tel que ω fait correspondre aux hyperplans passant par cet espace des hyperplans indéterminés de la gerbe de sommet β_0. Plus généralement, supposons qu'il existe un espace σ, de dimension $p+\rho-1$, contenant α_0, tels qu'aux hyperplans passant par cet espace correspondent des hyperplans indéterminés de la gerbe de sommet β_0. Aux hyperplans de la gerbe de sommet α_0 ne contenant pas σ, correspondent des hyperplans passant par un espace σ', à $2q-\rho-1$ dimensions, contenant β_0. Dans ces conditions, la matrice des coefficients de ω a pour caractéristique ρ, et Rosati démontre que la matrice des coefficients de Ω a la caractéristique 2ρ. On en déduit qu'à la correspondance T sont associés deux systèmes réguliers d'intégrales réductibles : l'un, appartenant à la courbe C, de dimension $p-\rho-1$, est formé des intégrales dont les sommes des valeurs aux points des groupes de C qui correspondent aux points de D, sont constantes; l'autre, appartenant à la courbe D, de dimension $\rho-1$, est formé des sommes des intégrales de C étendues aux mêmes groupes de points.

La matrice des coefficients de l'homographie associée à T^{-1} a également la caractéristique ρ, de sorte qu'il existe deux systèmes réguliers d'intégrales réductibles, de dimensions $q-\rho-1$, $\rho-1$, respectivement sur les courbes D, C, ayant des propriétés analogues aux précédentes.

Le nombre ρ est le rang de la correspondance T.

Si l'on désigne par γ_α la série d'indice β formée par les groupes de points de C qui correspondent aux points de D et par δ_β la série d'indice α engendrée par les groupes de D qui correspondent aux points de C, on voit que le nombre des sommes indépendantes données par les intégrales de C étendues aux groupes de γ_α est égal à celui des sommes indépendantes données par les intégrales de D étendues aux groupes de δ_β, remarque déjà faite par Comessatti [21]. De plus, le système régulier d'intégrales réductibles dont les intégrales donnent des sommes constantes le long des groupes de γ_α, jouit de la même propriété vis-à-vis de la série engendrée par les β groupes de γ_α passant par un même point de C. C'est là une remarque importante faite antérieurement par Severi ([1]).

Rosati poursuit l'étude des correspondances entre les courbes C et D en introduisant sur C la correspondance TT^{-1} et sur D, la correspondance $T^{-1}T$ (correspondances latérales de T). Il étudie aussi les involutions d'ordres α, β existant sur la courbe qui représente les couples de points homologues de la correspondance T, au point de vue des intégrales réductibles.

36. **Séries non linéaires de groupes de points sur une courbe.** — Considérons, sur une courbe C de genre p, une série γ_n non linéaire, d'ordre n et d'indice ν, c'est-à-dire une correspondance (n, ν) entre les points de C et ceux de la courbe C′ qui représente la série. Soit T la correspondance entre les points de C que l'on obtient en considérant comme homologues d'un point P les $\nu(n-1)$ points appartenant aux groupes de γ_n contenant C. La correspondance T est symétrique et possede p valences généralisées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, réelles et négatives. Castelnuovo [12] a montré que l'équation

$$(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_p)=0,$$

ayant ces valences comme racines, a pour coefficients les nombres Z_1, $Z_2, \ldots, Z_{p-1}$ introduits par Comessatti [21].

Désignons par R_2 la correspondance symétrique de la courbe C dans laquelle, à un point P, correspondent les groupes de $n-1$ points

([1]) *Il teorema d'Abel* (*loc. cit.*).

qui, chacun avec un des points que T fait correspondre à P, forment des groupes de γ_n ne contenant pas P. Désignons de même par R_3 la correspondance symétrique dans laquelle, à un point P, correspondent les groupes de $n-1$ points qui, chacun avec un des points que R_2 fait correspondre à P, forment des groupes de γ_n. Et ainsi de suite. Rosati [59] montre que le nombre Z_r de Comessatti, s'exprime en fonction des nombres de points unis des correspondances T, R_2, R_3, ..., R_r.

37. **Courbes contenant une infinité continue de correspondances algébriques.** — Schwarz [66] a démontré qu'une courbe algébrique de genre $p>1$ ne peut contenir une infinité de transformations birationnelles en elle même. Castelnuovo [11] s'est proposé de généraliser ce résultat en considérant les courbes qui possèdent une infinité continue de correspondances dont un des indices est constant.

Supposons qu'une correspondance T entre les points d'une courbe C varie dans un système continu, le second indice β restant constant. Les entiers caractéristiques h, g, H, G de Hürwitz de la correspondance restent nécessairement fixes lorsque T varie et il en est de même des constantes π_{ik} qui s'expriment en fonction des entiers h, g et des périodes des intégrales normales attachées à C.

Désignons par X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ik} les groupes de β points que k correspondances T_1, T_2, ..., T_k du système font correspondre à un point x_i de $C(i=1, 2, \ldots)$. L'application des formules de Hurwitz et du théorème d'Abel montre que l'on a les équivalences

$$X_{11}+X_{22}\equiv X_{21}+X_{12},$$
$$X_{11}+X_{22}+X_{33}\equiv X_{12}+X_{21}+X_{33}\equiv X_{11}+X_{23}+X_{32}\equiv\ldots$$

et, d'une manière plus générale, que le groupe $X_{11}+X_{22}+\ldots+X_{kk}$ définit une série linéaire d'ordre $k\beta$ comprenant tous les groupes analogues. Soit r_k la dimension de cette série. Lorsque $k\leqq\beta+1$, un des ∞^2 groupes de β points, homologues des points de C dans les correspondances considérées, impose au moins $k-1$ conditions aux groupes de la série précédente qui doivent le contenir. Il en résulte que l'on a $r_k\geqq r_{k-1}+k-1$, d'où, comme $r_2\geqq 1$, $r_k\geqq\frac{1}{2}k(k-1)$. Pour $k=\beta+1$, la série considérée est nécessairement non spéciale, d'où $r_{\beta+1}=\beta(\beta+1)-p$ et par conséquent $p\leqq\frac{1}{2}\beta(\beta+1)$.

Le genre p de la courbe C est donc au plus égal à $\frac{1}{2}\beta(\beta+1)$. Castelnuovo démontre que la limite supérieure peut effectivement être atteinte. Dans ce cas, la courbe C peut être transformée birationnellement en une courbe plane d'ordre $\beta+2$, privée de points multiples.

Pour $\beta=1$, on retrouve le théorème de Schwarz. Lorsque β est supérieur à l'unité, chacune des correspondances est une correspondance élémentaire, formée au moyen d'une série linéaire $g^1_{\beta+1}$ découpée sur C par les droites passant par un point de la courbe ou, si celle-ci possède des transformations birationnelles en elle-même. par des transformées de ces séries.

V. — Correspondances entre deux courbes algébriques. Le point de vue topologique.

38. Remarque préliminaire. — Le point de vue topologique a déjà été utilisé d'une manière plus ou moins explicite dans les recherches dont il vient d'être rendu compte; Chisini et Lefschetz ont utilisé systématiquement la topologie pour étudier les correspondances entre deux courbes algébriques, distinctes ou non. Le premier y a été conduit par le désir de donner une forme topologique au théorème d'Abel. Nous indiquerons successivement les procédés de démonstration utilisés par Chisini et Lefschetz; nous indiquerons également en quoi consiste la forme topologique donnée au théorème d'Abel par le premier. Il convient de remarquer que les résultats obtenus par Chisini et Lefschetz sont, en partie, plus généraux que ceux qui précèdent, en ce sens qu'ils restent vrais pour des correspondances plus générales que les correspondances algébriques.

39. Principe de correspondance sous forme topologique. — Chisini [17] considère, entre les points d'une surface de Riemann R de genre p, une correspondance T d'indices α, β, continue, transformant une aire infinitésimale en une aire infinitésimale et conservant en outre les sens de parcours. Par là, il faut entendre que si P_0 et P'_0 sont deux points homologues ordinaires, si un point P tourne autour de P_0, son homologue P' tourne autour de P'_0, les sens de rotation étant les mêmes. Prenons comme modèle de la surface R une sphère avec p anses. En assimilant chacune de celles-ci à un tore relié à la sphère par un tube, appelons σ_i un cercle méridien de la $i^{\text{ième}}$ anse et τ_i son cercle de gorge, par exemple. L'ensemble des $2p$ cycles σ_i, τ_i constitue un système de rétrosections de R. Découpons la surface le long des cycles σ_i et appelons σ'_i, σ''_i les bords de la coupure. Par déformation continue, nous pouvons ramener R à une sphère R_0 forée de $2p$ trous, dont les bords correspondent à σ'_i, σ''_i; on peut de plus supposer que ces bords sont des petits cercles de R_0,

A un point x de R_0, T fait correspondre les β points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\beta$ de R_0. Considérons la fonction uniforme de la variable complexe x,

$$y = (x - x'_1)(x - x'_2)\ldots(x - x'_\beta).$$

Cette fonction y a comme zéros les u points unis de T et comme pôles, les deux points x qui correspondent au point $x' = \infty$ et le point $x = \infty$, qui est un pôle d'ordre β.

Lorsque le point x se meut sur la surface R, un des points x' peut franchir le cycle σ_i et par conséquent, sur R_0, passer brusquement de σ_i à σ''_i. La fonction y n'est donc pas continue sur R_0. Observons que le fait précédent se produit lorsque x franchit la ligne L_i que T^{-1} fait correspondre à σ_i. Les cycles L_i. σ'_i, σ''_i partagent R_0 en un certain nombre d'aires partielles dans chacune desquelles la fonction y est continue. Si l'on désigne par Θ la somme des accroissements que subit l'argument θ de y lorsque x parcourt le contour de chacune de ces aires, l'indicateur logarithmique de Cauchy, utilisé successivement dans chacune des aires, donnera

$$u = \alpha + \beta + \Theta.$$

Pour évaluer Θ, Chisini considère en premier lieu la ligne K_i que T fait correspondre à σ_i. Si, sur la surface R, K_i rencontre σ_i en un point M et si à ce point correspondent sur R_0 le point M′ de σ'_i et le point M″ de σ''_i, la ligne K_i, sur R_0, sera interrompue en M′, M″. Chisini complète la ligne K_i de R_0 par un segment M′M″ tracé sur la sphère. Ceci fait, après avoir convenu d'une orientation des petits cercles σ'_i, σ''_i déduite de l'orientation de σ_i, il démontre que l'accroissement de l'angle θ est égal à la différence $\lambda_i - \mu_i$, où λ_i est le nombre de fois que la ligne K_i modifiée entoure le cercle σ'_i et μ_i le nombre de fois que la même ligne entoure le cercle σ''_i. Passant ensuite à la ligne L_i, que T^{-1} fait correspondre à σ_i, le même raisonnement montre que l'accroissement de θ est égal à $\lambda'_i - \mu'_i$, où λ'_i et μ'_i ont la même signification que λ_i et μ_i. On obtient finalement

$$\theta = \Sigma(\lambda_i - \mu_i) + \Sigma(\lambda'_i - \mu'_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En retournant à la surface R, le segment M'M″ ajouté tantôt à la ligne K_i devient le cycle σ_i conjugué de σ_i. Si, sur la surface R, on a

$$K_i \sim \sum_j a_{ij}\sigma_j + \sum_j b_{ij}\tau_j, \qquad L_i \sim \sum_j a'_{ij}\sigma_j + \sum_j b'_{ij}\tau_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

il vient

$$\lambda_i - \mu_i = -a_{ii}, \qquad \lambda'_i - \mu'_i = -a'_{ii},$$

et, par conséquent,

$$u = \alpha + \beta - \Sigma(a_{ii} + a'_{ii}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Dans sa démonstration, Chisini considère en premier lieu le cas d'une correspondance biunivoque, pour passer ensuite au cas d'une correspondance (α, β).

40. Aspect topologique du théorème d'Abel. — Le théorème d'Abel donne la condition nécessaire et suffisante pour que deux groupes de n points donnés sur une courbe de genre p, soient équivalents : les sommes des valeurs prises par les intégrales de première espèce aux points de chacun des groupes, ne diffèrent que par des périodes. On peut aussi lui donner la forme suivante : Pour qu'une série γ_n d'ordre n appartienne à une série linéaire d'ordre n, il faut et il suffit que les sommes des valeurs prises sur les intégrales de première espèce aux points d'un groupe de la série, restent constantes lorsque ce groupe décrit la série.

Pour donner une forme topologique au théorème d'Abel, Chisini [17] considère en premier lieu une série linéaire g_n^1 sur la courbe C et prend, pour modèle de la surface de Riemann R de C, une surface formée de n feuillets superposés à un plan complexe ϖ. Les points de ce plan représentent les groupes de la série g_n^1 et précisément, un point P de ϖ représente le groupe formé des points P_1, $P_2, \ldots, P_n$ distribués sur les n feuillets de R et superposés à P. Lorsque P décrit dans ϖ un cycle fermé σ, l'ensemble des points P_1, $P_2, \ldots, P_n$ revient à sa position de départ, les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$

ayant subi une certaine substitution S. Soit σ' le cycle, fermé, décrit par l'ensemble des points $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Si h est la période de S, lorsque P décrit h fois σ, chacun des points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ revient à sa position initiale et l'on a $h\sigma' \sim 0$, donc $\sigma' \sim 0$.

Considérons maintenant une série γ_n dont les groupes appartiennent à une série linéaire g_n^r, par exemple à une série g_n^2 de dimension deux. Ces groupes sont représentés par les points complexes d'un plan et par conséquent par les points réels d'un espace S_4 à quatre dimensions. Soit D la surface de S_4 représentant les groupes de g_n^r ayant un point double. On peut démontrer qu'un chemin fermé L, tracé dans S_4, peut se ramener, par une déformation continue, sans traverser la surface D, à un chemin correspondant à une série linéaire g_n^1. Remplaçons la ligne L par une ligne polygonale A_1, $A_2, \ldots, A_m, A_1$ suffisamment voisine. Dans l'espace à trois dimensions déterminé par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, on peut déformer cette ligne, sans traverser D, de manière à la remplacer par une ligue plane d'extrémités A_1, A_4. Cet espace rencontre en effet D suivant une courbe d et il suffit, dans la déformation, de respecter les enroulements éventuels de la ligne polygonale autour de d. Cela étant, dans l'espace à trois dimensions déterminé par le plan de la ligne obtenue et par A_5, on peut déformer la ligne A_1, A_4, A_5 de manière à la ramener à une ligne plane, et ainsi de suite. On aura finalement remplacé la ligne L, par déformation continue, sans traverser D, par une ligne fermée tracée dans un plan α. Si ce plan ne représente pas les groupes d'une série linéaire g_n^1, il existe des plans ϖ ayant cette propriété, rencontrant α suivant des droites. Dans l'espace à trois dimensions déterminé par α et par un de ces plans ϖ, on peut déformer la ligne d'une manière continue, en respectant ses enroulements autour de la courbe section de D par cet espace, de manière à obtenir une ligne située dans le plan ϖ considéré. En d'autres termes, au point de vue topologique, la série γ_n ne diffère pas d'une série linéaire g_n^r. Lorsqu'un groupe d'une série γ_n varie et revient à sa position initiale, la somme des cycles décrits par ses points est homologue à zéro. C'est la traduction topologique de la condition nécessaire du théorème d'Abel.

Inversement, soit sur la surface de Riemann R une série γ_n d'ordre n et d'indice ν, telle que lorsqu'un groupe de γ_n varie et revient à sa position initiale, ses points décrivent des cycles dont la somme est homologue à zéro. Considérons la correspondance symétrique T, obtenue en faisant correspondre à un point les $\nu(n-1)$ points des groupes de γ_n contenant ce point et distincts de ce point. Si un point décrit un cycle σ_i, ses $\nu(n-1)$ points homologues décrivent des cycles dont la somme est égale à $-\nu\sigma_i$. Le principe de correspondance donne donc $2\nu(n+p+1)$ points unis pour T, c'est-à-dire autant de points doubles de γ_n. Le défaut d'équivalence de Castelnuovo de cette série est donc nul et la série appartient à une série linéaire. Ceci démontre complètement le théorème topologique d'Abel.

Chisini a d'ailleurs donné une autre démonstration de cette seconde partie, sans utiliser le principe de correspondance, mais en se fondant encore sur le résultat de Castelnuovo. Remarquons d'ailleurs que celui-ci peut être établi en utilisant le principe de correspondance.

41. Correspondance entre deux surfaces de Riemann. — Soient deux surfaces de Riemann R de genre p et S de genre q, entre lesquelles existe une correspondance T d'indices α, β. Pour étudier cette correspondance, Lefschetz [42] considère la variété riemannienne à quatre dimensions représentant les couples de points de R, S ou, suivant la terminologie usitée en topologie, le produit $R \times S$ des surfaces R, S. A la correspondance T est homologue, sur la variété $R \times S$, un cycle à deux dimensions Γ.

Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ un système fondamental de cycles de R et par $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2q}$ un système analogue de S. Si a désigne un point de R et b un point de S, les cycles $a \times \tau_1, a \times \tau_2, \ldots, a \times \tau_{2q}$, $\sigma_1 \times b, \sigma_2 \times b, \ldots, \sigma_{2p} \times b$ constituent un système fondamental de cycles linéaires de $R \times S$. D'autre part, un système fondamental de cycles à deux dimensions est constitué sur $R \times S$ par les cycles $a \times S$, $R \times b$, $\sigma_i \times \tau_j$. On aura donc

$$(1) \quad \Gamma \sim \varepsilon . a \times S + \varepsilon' . R \times b + \Sigma \varepsilon_{ij} \sigma_i \times \tau_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, 2, \ldots, q),$$

les ε étant des entiers.

En représentant par $(M.N)$ l'indice de Kronecker de deux cycles orientés M, N, on a

$$(\Gamma . R \times b) = \alpha, \quad (T . a \times S) = \beta, \quad (a \times S . a \times S) = (R \times b . R \times b) = 0,$$
$$(a \times S . R \times b) = 1, \quad (a \times S . \sigma_i \times \tau_j) = (R \times b . \sigma_i \times \tau_i) = 0.$$

Par conséquent, on a $\varepsilon = \alpha$, $\varepsilon' = \beta$.

Représentons par Tm le transformé sur S d'un cycle m de R. On a

$$(\Gamma . \sigma_i \times \tau_j) = -(T\sigma_i . \tau_j),$$

le premier indice étant calculé sur $R \times S$, le second sur S.

La correspondance définit sur S les homologies

$$T\sigma_i = \sum_j c_{ij}\tau_j.$$

De l'homologie (1) on déduit, en tenant compte des relations précédentes et de la formule,

$$(\sigma_i \times \tau_j . \sigma_h \times \tau_k) = -(\sigma_i . \sigma_h)(\tau_j . \tau_k),$$

les équations

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij}(\sigma_i . \sigma_h)(\tau_j . \tau_k) = \sum_m c_{hm}(\tau_m . \tau_k).$$

Représentons par ε la matrice $\|\varepsilon_{ij}\|$, par c, la matrice $\|c_{hm}\|$ et par A, B les matrices

$$\|(\sigma_i . \sigma_h)\|, \quad \|(\tau_j . \tau_k)\|.$$

Les matrices A, B sont alternées et leurs déterminants sont égaux à ± 1. On peut donc écrire

$$A'\varepsilon B = cB,$$

d'où, puisque la transposée A' de A est égale à $-A$,

$$\varepsilon = -A^{-1}c.$$

L'homologie (1) est ainsi complètement déterminée.

42. Couples communs à deux correspondances. — Considérons, entre les surfaces de Riemann R, S, une seconde correspondance T^* d'indices α^*, β^*, représentée sur la variété $R \times S$ par

$$\Gamma^* \sim \alpha^* . a \times S + \beta^* . R \times b + \Sigma \varepsilon^*_{ij} \sigma_i \times \tau_j.$$

Le nombre de couples communs aux deux correspondances T, T^* est évidemment égal à $(\Gamma . \Gamma^*)$, c'est-à-dire à

$$\alpha\beta^* + \alpha^*\beta + \Sigma \varepsilon_{ij} \varepsilon^*_{hk}(\sigma_i \times \tau_j . \sigma_h \times \tau_k),$$

ou encore à

$$\alpha\beta^* + \alpha^*\beta - \Sigma \varepsilon_{ij} \varepsilon^*_{hk}(\sigma_i . \sigma_h).(\tau_j . \tau_k),$$

la sommation s'étendant sur les quatre indices i, $h = 1, 2, \ldots, 2p$, j, $k = 1, 2, \ldots, 2q$.

Le dernier terme de la somme précédente est égal à la trace de la matrice $\varepsilon' A \varepsilon^* B$. Supposons que nous ayons, pour T^*,

$$T^* \sigma_h = \sum_k c^*_{hk} \tau_k.$$

Le dernier terme considéré est égal à la trace de la matrice $c'(A')^{-1} c^* B'$, ou encore à la trace de la matrice $B(c^*)' A^{-1} c$, ou enfin à celle de la matrice $B c' A^{-1} c^*$. Finalement, le nombre des couples communs aux deux correspondances est égal à

$$\alpha\beta^* + \alpha^*\beta - \text{trace } B c' A^{-1} c^*.$$

En particulier, le degré de la correspondance T a pour valeur

$$2\alpha\beta - \text{trace } B c' A^{-1} c.$$

43. Correspondances entre les points d'une surface de Riemann. — Les résultats précédents sont applicables au cas où la surface S coïncide avec la surface R. Il existe alors, sur la variété riemannienne $R \times R$, un cycle à deux dimensions Γ_0 qui correspond aux couples de points de R formés de deux points superposés; ce cycle Γ_0 représente la correspondance identique T_0. Les couples communs à T et à T_0 sont les points unis de T; leur nombre est fourni par la formule précédente, où T^* coïncide avec T_0.

Pour la correspondance T_0, on a $\alpha^* = \beta^* = 1$, $c^* = 1$ et $\varepsilon^* = -A^{-1}$. Par conséquent, le nombre des points unis de T est égal à

$$\alpha + \beta - \text{trace } A c' A^{-1}.$$

Mais on a

$$\text{trace } A c' A^{-1} = \text{trace } c' = \text{trace } c,$$

donc le nombre des points unis de T est finalement

$$\alpha + \beta - (c_{11} + c_{22} + \ldots + c_{2p,2p}).$$

44. Existence des correspondances. — L'existence d'une correspondance algébrique T entre les surfaces de Riemann R et S revient à celle d'une courbe algébrique ayant pour surface de Riemann le cycle Γ défini par l'homologie (1) du n° 42, donnée *a priori*.

Lefschetz (¹) a démontré que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le cycle Γ corresponde à une courbe algébrique, effective ou virtuelle (c'est-à-dire différence de deux courbes effectives), sont que les périodes des intégrales doubles de première espèce de la variété $R \times S$, relatives à ce cycle, soient nulles.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ un système de p intégrales indépendantes de première espèce de la surface R et $v_1, v_2, \ldots, v_q$ un système de q intégrales indépendantes de première espèce de S. Les intégrales doubles de première espèce de la variété $R \times S$ sont les intégrales $\iint du_i\, dv_j$.

Désignons par μ_{ik} la période de u_i le long du cycle σ_k et par ν_{ik} celle de v_i le long de τ_k. Représentons par μ, ν les matrices $\|\mu_{ik}\|$, $\|\nu_{ik}\|$.

Les intégrales u_i sont constantes le long des courbes $a \times S$ et les intégrales v_i sont constantes le long des courbes $R \times b$. Par conséquent, pour exprimer que les intégrales doubles de premiere espèce ont des périodes nulles le long du cycle Γ, il suffit d'écrire les égalités

$$\sum_{jh} \varepsilon_{jh} \mu_{ij} \nu_{kh} = 0,$$

c est-à-dire

$$\mu \varepsilon \nu' = 0.$$

Nous avons donc, entre les matrices de Riemann μ de R et ν de S, ce que Scorza [69] a appelé une relation simultanée. S'il existe λ relations simultanées indépendantes entre les matrices μ, ν, Scorza appelle λ le caractère simultané des deux matrices.

Lorsque $\lambda = 0$, les seules correspondances existant entre R et S sont les correspondances à valence nulle (²), pour lesquelles on a $\varepsilon = 0$. L'existence d'autres correspondances entre R et S exige $\lambda > 0$.

Supposons $\lambda > 0$. On peut alors trouver une matrice ε, non nulle, telle que le cycle Γ corresponde à une courbe algébrique effective ou virtuelle. Dans ce dernier cas, on peut toujours trouver deux entiers α_1, β_1 tels que le cycle $\Gamma + \alpha_1 . R \times b + \beta_1 . a \times S$ corresponde à une

(¹) *L'anlysis situs et la Géométrie algébrique*. Paris, 1929 (*voir* p. 72).

(²) Les groupes de points de S correspondant aux points de R, appartiennent à une série linéaire d'ordre β, et inversement.

courbe effective. Lorsque $\lambda > 0$, il existe donc des correspondances à valence différente de zéro entre les surfaces de Riemann R, S, c'est-à-dire entre les courbes qu'elles représentent. Le nombre des correspondances indépendantes (au sens de Hurwitz et de Severi) entre les deux courbes est égal à λ.

Ce qui précède s'étend aux correspondances entre les points d'une surface de Riemann R. Le nombre de correspondances indépendantes est égal au nombre de matrices ε linéairement indépendantes donnant $\mu\varepsilon\mu' = 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

Ouvrages généraux.

I. P. Appell, E. Goursat et P. Fatou. — Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris, t. I, 1929; t. II, 1930.

II. H. F. Baker. — Abel's theorem and the allied theory, including the theory of the theta functions, Cambridge, 1897.

III. Principles of geometry, vol. VI, Cambridge, 1933.

IV. L. Berzolari. — Algebraische Transformationen und Korrespondenzen. Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III 2, Leipzig, 1933.

V. A. Brill. — Ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen, Braunschweig, 1925.

VI. A. Clebsch et F. Lindemann. — Leçons sur la géométrie, t. III (trad. Benoist), Paris, 1883.

VII. F. Enriques. — Courbes et fonctions algébriques d'une variable, Paris, 1927.

VIII. F. Enriques et O. Chisini. — Lezioni sulla teoria geometrica della equazioni e delle funzioni algebriche, Bologne, t. I, 1915; t. II, 1918; t. III, 1924; t. IV, 1934.

IX. F. Klein et R. Fricke. — Vorlesungen über die Theorie der elliptische Modulfunktionen, Leipzig, t. I, 1890; t. II, 1892.

X. E. Picard. — Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques, Paris, 1931.

XI. E. Picard et G. Simart. — Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, Paris, t. I, 1897; t. II, 1906.

XII. F. Severi. — Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig, 1921.

XIII. Trattato di Geometria algebrica, Bologne, 1926.

Mémoires.

1. E. S. Allen. — Sopra le serie algebriche appartenenti ad una curva algebrica (*Rend. Accad. Lincei*, 2e sem. 1913).
   Su alcuni caratteri di una serie algebrica e la formola di de Jonquières per serie qualsiasi (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 37, 1914).
2. A. Bloch. — Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension (*Jour. Math.*, 1926).

3. A. Brill. — Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve (*Math. Annalen,* Bd. 6, 1872).

Ueber die Correspondenzformel (*Idem,* Bd. 7, 1874).

Ueber algebraische Correspondenzen (*Idem,* Bd. 31, 1888; Bd. 36, 1890).

4. A. Brill et M. Noether. — Die Entwicklung der Theorie der algebraische Functionen in älterer und neuerer Zeit (*Jahresberichte der Deutsche Math. Verein,* t. III, 1894).

5. Burkhardt. — Sur le principe de correspondance (*C. R. Ac. Sc.,* t. 126, 1898).

6. G. Castelnuovo. — Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica (*Rend. Accad. Lincei,* 2e sem. 1891, Memorie scelte, Bologne, 1937).

7. G. Castelnuovo. — Le corrispondenze univoche tra i gruppi di p punti, sopra una curva di genere p (*Rend. Ist. Lombardo,* 1892, Memorie scelte).

8. G. Castelnuovo. — Sulla linearità delle involuzioni piu volte infinite appartenenti ad una curva algebrica (*Atti Acad. Torino,* t. 28, 1893. Memorie scelte.)

9. G. Castelnuovo. — Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare (*Rend. Acad. Lincei,* 1er sem. 1905, Memorie scelte).

10. G. Castelnuovo. — Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica (*Rend. Acad. Lincei,* 1er sem. 1906, Memorie scelte).

11. G. Castelnuovo. — Sulle curve che possegono una infinità continua di corrispondenze algebriche (*Scritti matematici offerti ad E. d'Ovidio,* Turin, 1918, Memorie scelte).

12. G. Castelnuovo. — Sulle funzioni abeliane (*Rend. Accad. Lincei,* 1er sem. 1921, Memorie scelte).

13. A. Cayley. — Note sur la correspondance de deux points sur une courbe (*C. R. Ac. Sc.,* t. 62, 1866; *Mathem. Papers,* t. V).

On the correspondence of two points on a curve (*Proc. of the London math. Soc.,* 1866; *Mathem. Papers,* t. VI).

Second memoir on the curves which satisfy given conditions; the principle of correspondence (*Philos. Trans.,* 1868; *Mathem. Papers,* t. VI).

14. S. Cherubino. — Identità birazionale di due curve algebriche (*Rend. Seminario matem. di Roma,* 1939).

15. O. Chisini. — Le corrispondenze (2,2) fra curve algebriche (*Annali di Matematica,* t. 24, 1915, 3e série).

16. O. Chisini. — Sulle superficie di Riemann multiple, prive di punti di diramazione (*Rend. Accad. Lincei,* 1er sem. 1915).

17. O. Chisini. — Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico (*Rend. Ist. Lombardo,* 1921).

Il genral principio topologico di corrispondenza (*Rend. Ist. Lombardo,* 1924).

18. O. Chisini. — Sulle trasformazioni di prima specie dei gruppi di p punti (*Rend. Ist. Lombardo,* 1929).

Gli integrali abeliani di prima specie dal punto di vista geometrico (*Rend. Ist. Lombardo,* 1930).

19. A. Comessatti. — Sulle curve doppie di genere qualunque e particolarmente sulle curve ellittiche doppie (*Mem. Accad. Torino*, 1909).

20. A. Comessatti. — Determinazione dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad $r+1$ serie lineari g_n^r (*Atti Ist. Veneto*, 1909-1910).

Sui gruppi di r punti comuni ad r serie lineari di dimensione $r-1$ (*Atti Ist. Veneto*, 1912-1913).

21. A. Comessatti. — Sulle serie algebriche semplicementi infinite di gruppi di punti appartementi ad una curva algebrica (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 6, 1913).

22. A. Comessatti. — Sulle trasformazioni hermitiani delle varietà di' Jacobi (*Atti Accad. Torino*, t. 50, 1914-1915).

23. A. Comessatti. — Curve algebriche e funzioni fuchsiane (*Atti Ist. Veneto*, 1928-1929).

Sulle curve di Galois (*Rend. Accad. Lincei*, 1er sem. 1929).

Le involuzioni sulle curve algebriche ed il teorema generale di diramazione per le funzioni fuchsiane (*Memorie Accad. Lincei*, 1929).

Sulle superficie multiple cicliche (*Rend. Seminario matem. Padova*, 1930).

Sur les involutions dépourvues de points unis appartenant à une courbe algébrique (*Bull. Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1937).

24. A. Cotty. — Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1912).

25. M. De Franchis — Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 17, 1903).

26. M. De Franchis. — Sulle corrispondenze algebriche fra due curve (*Rend. Accad. Lincei*, 1er sem. 1903).

27. M. De Franchis. — Intorno alle varietà multiple cicliche senza diramazione. Complementi alla nota «Intorno...» (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 48, 1924).

28. P. Defrise. — Sur les courbes multiples cycliques (*Rend. Seminario matem. Roma*, 1936).

Les courbes multiples abéliennes sans points de diramation (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1938).

Sur les courbes possédant une involution cyclique, hyperelliptique, sans points multiples (*Idem*).

Les courbes multiples abéliennes avec points de diramation (*Bull. Sc. Mathém.*, 1938).

Sur les courbes possédant une involution abélienne hyperelliptique, sans point multiple (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1938).

Sur certaines involutions sans points multiples appartenant à une courbe algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1939).

29. F. Enriques. — Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 10, 1896).

30. G. Fabbrizzi. — Sugli integrali abeliani riducibile (*Giornale di Battaglini*, 1919).

31. L. Godeaux. — Les recherches de R. Torelli sur les courbes algébriques ayant même tableau de périodes des intégrales abéliennes (*Bull. Sc. Math.*, 1926).

32. L. Godeaux. — Sur certaines involutions cycliques appartenant aux courbes algébriques (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1929).

33. O. Göhner. — Ueber Systeme algebraischer Korrespondenzen (*Dissertation*, Tubingue, 1913).

34. W. V. D. Hodge. — A theorem on algebraic correspondences (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1936).

35. G. Humbert. — Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques (*Journ. Mathém.*, 1894).

36. A. Hürwitz. — Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip (*Berichte K. Gesell. zu Leipzig*, 1886; *Math. Werke*, t. I, Bâle, 1932).

37. A. Hürwitz. — Ueber diejenigen algebraischen Gebilde welche eindeutigen Transformationen in sich zulassen (*Math. Annalen*. t. 32, 1888; *Math. Werke*, t. I).

38. A. Hürwitz. — Ueber Riemann'sche Flachen mit gegebenen Verzweigungspunkten (*Math. Annalen*, t. 39, 1891 ; *Math. Werke*, t. I).

39. A. Hürwitz. — Ueber algebraischen Gebilde mit eindeutigen Transformationem in sich (*Math. Annalen*, t. 41, 1893) ; *Math. Werke*, t. I).

40. F. Klein. — Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig, 1882).

41. S. Lefschetz. — Intersections and transformations of complexes and manifolds (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1926).

42. S. Lefschetz. — Correspondences between algebraic curves (*Annals of Mathem.*, 1927).

43. S. Lefschetz. — A theorem on correspondences on algebraic curves (*Amer. Journ. of mathem.*, 1928).

44. S. Lefschetz. — Singular correspondences between algebraic curves Selected topics in algebraic geometry (*Bull. nat. Research Council*, 1928).

45. A. Maroni. — Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve. algebriche unisecantisi (*Atti Accad. Torino*, t. 38, 1902-1903).

46. A. Maroni. — Sulle serie alg ebriche dotate di punti multipli variabili, appartenenti ad une curva algebrica (*Mem. Accad. Italia*, 1932).

47. P. Painlevé. — Sur les transformations rationnelles des courbes algébriques (*C. R. Ac. Sc.*, 2e sem. 1887).

Sur les équations différentielles du premier ordre (*Ann. Ec. Norm. sup.*, 1891).

Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles (Stockolm), Paris, 1897.

48. E. Picard. — Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes et, en particulier, dans le cas des courbes du second genre (*Bull. Soc. Math. France*, 1883).

49. E. Picard. — Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce (*Journ. Math.*, 1885).

Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (*Idem.*, 1889).

Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 9, 1895).

50. H. Poincaré. — Sur la réduction des intégrales abéliennes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 99, 1884).

Sur les fonctions abéliennes (*Amer. Journal of Math.*, 1886).

51. C. Rosati. — Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica (*Rend. Accad. Lincei*, 2e sem. 1913).

52. C. Rosati. — Sugli integrali abeliani riducibile (*Atti Accad. Torino*, t. 50, 1914-1915).

53. C. Rosati. — Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di une curva di genere due (*Annali di Matematica*, t. 25, 1915, 3e série).

54. C. Rosati. — Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica (*Atti Accad. Torino*, t. 51, 1915-1916).

55. C. Rosati. — Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica (*Idem.*, t. 53, 1917-1918).

56. C. Rosati. — Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche (*Annali di Matematica*, t. 28, 1918, 3e série).

57. C. Rosati. — Intorno alle corrispondenze simmetriche singolari sopra une curva di genere 2 (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 44, 1920).

58. C. Rosati. — Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di une curva algebrica (*Annali di Matematica*, t. 31, 1921, 3e série).

59. C. Rosati. — Sopra certi invarianti aritmetici delle serie algebriche semplicemente infinite, appartenenti ad una curva algebrica (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 49, 1925).

60. C. Rosati. — Sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibli e sulle reti di corrispondenze ad essi associati (*Annali di Matematica*, t. 3, 19251-1926, 4e série).

61. C. Rosati. — Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad une curva algebrica e sulle varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano (*Rend. Acad. Lincei*, 1er sem. 1927; *Annali di Matematica*, t. 6, 1928-1929, 4e série).

62. C. Rosati. — Sulle matrici di Riemann (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2e sem. 1927; (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 53, 1929).

63. C. Rosati. — Sulle corrispondenze fra curve algebriche (*Atti del Congresso int. dei Matematici*, Bologne, t. 4, 1928).

64. A. Rosenblatt. — Sur les transformations birationnelles des variétés de Jacobi en elles-mêmes (*Bull. Acad. Cracovie*, 1918).

65. P. Roth. — Ueber Flachen, die die Punktepaare zweier und einer algebraischen Kurve abbilden (*Sitzungsberichten Akad. Wien*, 1920).

66. H. A. Schwarz. — Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen veranderlichen Grossen, welche eine Schar rationaler eindeutig umkerhbarer Transformationen in sich selbst zulasse (*Journ. für Math.*, t. 87, 1875).

67. G. Scorza. — Sopra le corrispondenze (*p. p*) esistenti sulle curve di genere *p* a moduli generali (*Atti Accad. Torino*, t. 35, 1899-1900; t. 36, 1900-1901).
Intorno alle corrispondenze (*p. p*) sulle curve di genere *p* e ad alcune loro applicazioni (*Idem.*, t. 42, 1906-1907).

68. G. Scorza. — Sopra le curve canoniche di uno spazio lineare qualunque e sopra certi loro covarionti quartici (*Idem*, t. 35, 1899-1900).

69. G. Scorza. — Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 41, 1916).
Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane (*Idem.*, t. 43, 1918-1919).

70. B. Segre. — Un complemente al principio di corrispondenza, per le corrispondenze a valenza zero sulle curve algebriche (*Rend. Accad. Lincei*, 2e sem. 1936).

71. F. Severi. — Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica (*Rend. Ist. Lombardo*, 1903).

72. F. Severi. — Sulle superficie che rappresentano le coppie di unti di une curva algebrica (*Atti Accad. Torino*, t. 38, 1902-1903).

73. F. Séveri. — Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie (*Memorie Accad. Torino*, 1903).

74. F. Séveri. — Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica (*Atti Accad. Torino*, t. 48, 1912-1913).

75. F. Severi. — Les correspondances algébriques existant sur les courbes d'un système linéaire tracées sur une surface (*C. R. Acad. Sc.*, 1er sem. 1913).
Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra une superficie algebrica (*Math. Annalem*, t. 74, 1913).

76. F. Severi. — Sugli integrali abeliani riducibili (*Rend. Accad. Lincei*, 1er sem. 1914).

77. F. Severi. — Sulla teoria delle corrispondenze fra curve algebriche (*Rend. Accad. Lincei*, 1er sem. 1925).

78. F. Severi. — Sulle corrispondenze fra i punti di une curva variabile sopra une superficie algebrica (*Rend. Accad. Lincei*, 2e sem. 1927).

79. V. Snyder et F. R. Sharpe. — The construction of algebric correspondence between two algebraic curves (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 22, 1921).

30. G. Tafani. — Sulle corrispondenze tra due curve (*Giornale di Battaglini*, 1914).

81. A. Terracini. — Sulla riducibilità di alcune particolari corrispondenze algebriche (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 56, 1932).

82. J. A. Todd. — Algebraic correspondences between algebraic varieties (*Annals of Mathematics*, t. 36, 1935).

83. R. Torelli. — Sulla linearità delle involuzioni pui volte infiniti appartenenti a una curva algebrica (*Atti Ist. Veneto*, t. 47, 1907-1908).

84. R. Torelli. — Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica (*Idem*, t. 47, 1907-1908).

85. R. Torelli. — Dimostrazione di une formola di de Jonquières e suo significato geometrico (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 21, 1908).

85. R. Torelli. — Sulle curve di genere due contenenti una involuzione ellittica (*Rend. Accad. Napoli*, 1911).
87. R. Torelli. — Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica (*Rend. Accad. Lincei*, 1er sem., 1913; *Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 37, 1913).
88. R. Torelli. — Sulle varietà di Jacobi (*Rend. Accad. Lincei*, 2e sem. 1913).
89. R. Torelli. — Alcune questioni di geometria sopra une curva algebrica (*Idem*, 1er sem. 1915).
90. M. Villa. — Sulle corrispondenze a valenza positiva o nulla (*Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavie, 1936).
91. Zariski O. — On a theorem of Severi (*Amer. Journ. of Math.*, 1928).
92. H. G. Zeuthen. — Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes (*Math. Annalen*, t. 3, 1870).
Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque (*Idem*, t. 40, 1891).
93. H. G. Zeuthen. — Exemple d'une correspondance sans Werthigkeit (*Atti del IVe Congresso int. dei Matematici*, Rome, t. 2, 1908).

Additions.

G. Ascoli. — Sui gruppi di corrispondenze (2, 2) sopra una curva algebrica (*Annali di Matematica*, t. 6, 1929, 4e série).
S. Cherubino. — Su l'indice di Kronecker pei cicli analitici sulle riemanniane delle curve algebriche (*Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 1939).
Qualche applicazione dell'indice di Kronecker alle corrispondenze algebriche fra curve (*Idem*, 1940).
Sulle corrispondenze algebriche fra curve (*Idem*, 1948).
Sul criterio di equivalenza (*Rend. Circ., Matem. Palermo*, 1938-1939).
A. Weil. — Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent (*Actualités scient.*, n° 1041, 1948).
G. Zappa. — Sugli ipergruppi di corrispondenze ad indici limitati sopra una curva algebrica (*Annali di Matematica*, t. 20, 1941, 4e série).

TABLE DES MATIÈRES

I. — *Variété de Jacobi.*

II. — *Involutions appartenant à une courbe algébrique.*

III. — *Correspondances entre deux courbes algébriques. Le point de vue géométrique.*

123990. Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.
Dépôt légal imprimeur 1949, n° 553 | Dépôt légal éditeur 1949, n° 280
Achevé d'imprimer le 20 octobre 1949.