NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. GODEAUX

Sur les faisceaux de cubiques planes cuspidales

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 12-24

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__12_0>

[H'5i]

SUR LES FAISCEAUX DE CUBIQUES PLANES CUSPIDALES;

PAR L. GODEAUX,
Professeur à l'École militaire (Bruxelles).

Considérons une cubique plane cuspidale C (c'est-à-dire possédant un point de rebroussement ou cuspide). On sait que, par un point P de C passe une seule tangente à cette courbe dont le point de contact Q soit différent de P. Inversement, la tangente en un point Q de la courbe C à cette courbe, la rencontre encore en un point P. On a ainsi une correspondance birationnelle (P, Q), non involutive, entre les points de la courbe C [1]. Considérons maintenant un faisceau |C| de cubiques planes cuspidales C. Par un point P du plan passe une seule courbe de |C|; à ce point P faisons correspondre, sur cette courbe, un point Q par la construction qui vient d'être indiquée. Inversement, à un point Q du plan, faisons correspondre le point P appartenant à la courbe de |C| passant par Q. Nous avons ainsi défini une correspondance birationnelle entre les points P, Q du plan. C'est cette correspondance birationnelle que nous nous proposons d'étudier dans cette Note.

1. Il résulte tout d'abord d'un théorème de M. Bertini [2], que si les courbes d'un faisceau possèdent

[1] *Voir*, par exemple, CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçons sur la Géométrie* (traduction Benoist), tome II, Paris, 1880, p. 341 et suiv.

[2] BERTINI, *Sui sistemi lineari* (*Rend. Ist. Lomb.*, 1880) ou *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Pise, 1907, p. 227. Pour une autre démonstration, voir SEVERI, *Geometria Algebrica*, p. 28; Padoue, 1908, ou *Algebraische Geometrie*; Leipzig, 1921, p. 21.

toutes un point singulier, celui-ci est fixe, c'est-à-dire est commun à toutes les courbes du faisceau.

Cela étant, dans un faisceau $|C|$ de cubiques planes cuspidales, le point de rebroussement est un point fixe A. Nous allons de plus montrer que *toutes les courbes* C *ont même tangente de rebroussement.*

Choisissons, comme triangle de référence, le triangle formé par la tangente de rebroussement $x_1 = 0$, la tangente d'inflexion $x_3 = 0$ et la droite $x_2 = 0$ joignant le point de rebroussement A au point d'inflexion d'une des courbes du faisceau. L'équation de cette courbe pourra s'écrire

$$x_3^2 - 3x_1^2x_3 = 0.$$

L'équation d'une autre cubique du faisceau pourra s'écrire

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) \equiv a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_2 + 3 c x_1 x_2^2 + d x_2^3 \\ + g x_1^2 x_3 + h x_2^2 x_3 + l x_1 x_2 x_3 = 0, \end{aligned}$$

avec la condition $l^2 - 4gh = 0$ exprimant que le point A est de rebroussement.

Une courbe quelconque du faisceau $|C|$ est représentée par

$$f(x_1, x_2, x_3) + \lambda(x_2^3 - 3x_1^2x_3) = 0. \tag{1}$$

Pour que cette courbe possède un point de rebroussement en A, on doit avoir

$$l^2 - 4h(g - 3\lambda) = 0,$$

quel que soit λ; h et l doivent donc être nuls et le résultat annoncé en résulte.

2. Nous allons montrer que le faisceau $|C|$ possède une cubique dégénérée en trois droites issues de A et

une autre cubique dégénérée en la droite $x_1 = 0$ et une conique tangente en A à la droite $x_1 = 0$.

Il suffit, en effet, de prendre $\lambda = \frac{1}{3} g$ pour obtenir une courbe décomposée en trois droites b_1, b_2, b_3 passant par A.

Prenons au contraire $\lambda = -d$; la cubique du faisceau se décompose en la droite a, d'équation $x_1 = 0$ (tangente de rebroussement) et une conique Γ, tangente à la droite a au point A $(x_1 = x_2 = 0)$.

Nous connaissons donc deux courbes

$$b_1 + b_2 + b_3, \quad a + \Gamma,$$

du faisceau, qui nous permettent de le définir.

Observons tout d'abord que tout point commun à ces courbes est commun à toutes les courbes du faisceau $|C|$, et réciproquement. Il en résulte que les courbes du faisceau ont en commun :

1° Les points B_1, B_2, B_3 où les droites b_1, b_2, b_3 rencontrent respectivement la conique Γ en dehors de A;

2° Le point A.

On en conclut que le point A absorbe six intersections de deux cubiques du faisceau.

3. Prenons actuellement comme triangle de référence le triangle formé par la droite $a(x_1 = 0)$, la droite b_1 $(x_2 = 0)$ et la tangente $x_3 = 0$ à la conique Γ au point B_1.

La conique Γ a pour équation

$$x_1 x_3 - c x_2^2 = 0;$$

soit d'autre part

$$a x_1 x_2 + b x_2^2 + d x_1^2 = 0$$

l'équation quadratique des droites b_2, b_3. Toute courbe du faisceau $|C|$ aura une équation de la forme

$$(2)\qquad x_1(x_2x_3 - cx_2^2) + \lambda x_2(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) = 0.$$

C'est cette équation (2) que nous prendrons désormais pour définir le faisceau $|C|$, λ étant le paramètre variable.

4. Proposons-nous de rechercher le lieu des points d'inflexion des courbes du faisceau. On sait que les points d'inflexion d'une courbe sont situés sur la hessienne de cette courbe. Dans le cas de la courbe (2), la hessienne se réduit à

$$x_1^2[\lambda(ax_1 + 3bx_2) - cx_1] = 0.$$

La droite

$$(3)\qquad \lambda(ax_1 + 3bx_2) - cx_1 = 0$$

détermine sur la cubique (2), en dehors du point A, l'unique point d'inflexion de cette courbe.

Le lieu des points d'inflexion des courbes de $|C|$ s'obtiendra en éliminant λ entre les équations (2) et (3); on obtient ainsi la droite $x_1 = 0$ et la cubique

$$(4)\qquad ax_1^2x_3 - 2bcx_2^3 + cdx_1^2x_2 + 3bx_1x_2x_3 = 0,$$

qui possède, en A, un point double ordinaire dont l'une des tangentes est la droite $a(x_1 = 0)$ et qui passe par les points B_1, B_2, B_3.

5. Considérons le réseau de cubiques planes représenté par l'équation

$$(5)\qquad x_1(x_1x_3 - cx_2^2) + \lambda x_2(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) + \mu x_2(x_1x_3 - cx_2^2) = 0,$$

où λ, μ sont des paramètres variables.

Toutes ces courbes (5) ont, en général, un point double ordinaire au point A, l'une des tangentes étant la droite $a(x_1 = 0)$, l'autre étant la droite $x_1 + \mu x_2 = 0$.

De plus, les courbes (5) passent par les points B_1, B_2, B_3.

Les courbes du réseau (5) données par $\mu = 0$ sont précisément les courbes du faisceau $|C|$; par suite, si les courbes (5) avaient en commun un point fixe distinct de A. B_1, B_2, B_3, ce point serait également commun aux courbes de $|C|$, ce qui est impossible.

Deux courbes arbitraires du réseau (5) ont en commun neuf points parmi lesquels les points B_1, B_2, B_3, simples, et le point double A qui compte pour cinq points d'intersection, puisque la tangente a aux courbes en ce point est commune. Il en résulte que deux courbes du réseau (5) ont en commun un seul point, variable avec ces courbes.

Observons enfin que la courbe (4), lieu des points d'inflexion des courbes de $|C|$, appartient au réseau (5); on l'obtient en faisant $\lambda = \frac{c}{a}$, $\mu = 3\frac{b}{a}$.

6. Désignons par π le plan du réseau (5) et rapportons projectivement les courbes du réseau (5) aux droites d'un second plan π'. En d'autres termes, si X_1, X_2, X_3 désignent les coordonnées homogènes ponctuelles du plan π', et ρ un facteur de proportionnalité, posons

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho X_1 &= x_1(x_1 x_3 - c x_2^2), \\ \rho X_2 &= x_2(x_1 x_3 - c x_2^2), \\ \rho X_3 &= x_2(a x_1 x_2 + b x_2^2 + d x_1^2). \end{aligned} \right.$$

On déduit de ces formules, en les résolvant par rapport à x_1, x_2, x_3, et en désignant par σ un facteur de proportionnalité,

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma x_1 &= X_1^2 X_3, \\ \sigma x_2 &= X_1 X_2 X_3, \\ \sigma x_3 &= X_2^2(a X_1 + b X_2 + c X_3) + d X_1^2 X_2. \end{aligned} \right.$$

Les formules (I) et (II) définissent une correspondance birationnelle entre les points (x_1, x_2, x_3) de π et les points (X_1, X_2, X_3) de π'.

Aux droites de π' correspondent les cubiques du réseau (5) dans π, et aux droites

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

de π correspondent les cubiques

$$\alpha X_1^2 X_3 + \beta X_1 X_2 X_3 + \gamma X_2(a X_1 X_2 + b X_2^2 + c X_2 X_3 + d X_1^2) = 0 \tag{6}$$

du plan π'.

Les courbes (6) ont en commun les points fixes suivants :

Un point double $A'(X_1 = X_2 = 0)$;
Un point simple $A'_1(X_1 = 0,\ bX_2 + cX_3 = 0)$;
Un point simple $B'_1(X_2 = X_3 = 0)$;
Deux points simples

$$B'_2,\ B'_3(X_2 = 0,\ aX_1X_2 + bX_2^2 + dX_1^2 = 0).$$

Le point double A' absorbant quatre points d'intersection, car les tangentes en ce point sont variables, deux cubiques du réseau (6) ont en commun un seul point variable avec ces courbes, comme cela résulte d'ailleurs de la théorie des correspondances birationnelles.

7. Les points A, B_1, B_2, B_3 de π, A', A'_1, B'_1, B'_2, B'_3 de π' sont des points singuliers pour la correspondance qui vient d'être définie. A chacun d'eux correspondent, dans l'autre plan, une infinité de points.

Considérons par exemple le point $A'(X_1 = X_2 = 0)$. Les deux premières des formules (I) montrent que tous les points de la conique Γ $(x_1 x_3 - c x_2^2 = 0)$ correspondent à ce point.

Un raisonnement analogue montrera que : au point A'_1 correspondent les points de la droite a; aux points B'_1, B'_2, B'_3 correspondent les points respectivement des droites b_1, b_2, b_3; au point A correspondent les points des droites $X_1 = 0$, $X_3 = 0$; aux points B_1, B_2, B_3 correspondent respectivement les droites $b'_1 \equiv A'B'_1$, $b'_2 \equiv A'B'_2$, $b'_3 \equiv A'B'_3$.

Il convient d'examiner de plus près la correspondance entre le point A et les points des droites $X_1 = 0$, $X_3 = 0$.

Considérons le point donné par

$$X_1 = 0, \quad X_3 + kX_2 = 0.$$

Les formules (I) donnent

$$x_1(x_1x_3 - cx_2^2) = 0,$$
$$x_1x_3 - cx_2^2 + k(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) = 0.$$

La première de ces équations se décompose en deux autres qui représentent la droite et la conique Γ, toutes deux tangentes à la troisième courbe, quel que soit k. Il en résulte qu'aux points de la droite $X_1 = 0$ correspond le point infiniment voisin de A sur la droite a, ou mieux, les points infiniment voisins successifs à ce dernier.

Considérons maintenant le point donné par $X_3 = 0$, $X_1 = kX_2$. Les formules (1) donnent

$$x_2(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) = 0, \qquad x_1 = kx_2.$$

Il en résulte qu'aux points de la droite $X_3 = 0$ correspondent l'ensemble des points infiniment voisins de A.

8. Soit P un point du plan π; par ce point passe une cubique du faisceau $|C|$. Soit Q le point de cette courbe, distinct de P, tel que la tangente à cette courbe passe par P. Appelons T la transformation birationnelle

ainsi déterminée, comme on l'a déjà vu, entre les points P, Q du plan π.

Les points communs à toutes les courbes de $|C|$ seront des éléments singuliers de la transformation T.

D'autre part, les points P, Q coïncideront soit lorsqu'ils seront au point A de rebroussement, soit lorsqu'ils seront en un point d'inflexion d'une courbe de $|C|$. La transformation T laisse donc comme seuls points invariants le point A et les points de la cubique (4).

9. A un couple de points correspondants P, Q correspond un couple de points P', Q' du plan π' et ainsi se trouve définie une transformation birationnelle T' entre les points P', Q' du plan π'.

Cette transformation T' peut être définie directement.

Observons tout d'abord qu'aux cubiques de C correspondent, par les formules (I), les droites passant par le point $O'(X_1 = X_3 = 0)$ dans le plan π'.

Soit maintenant P' un point de π'. Les cubiques (6) passant par P' découpent, sur la droite O'P', une involution du second ordre et possédant par suite deux points de coïncidence. Il y a donc deux de ces cubiques qui touchent O'P' en un point en général distinct de P'. L'une de ces cubiques est la courbe $X_1X_2X_3 = 0$ qui possède un point double en O'; la seconde cubique est par suite rationnellement déterminée et nous désignerons par Q' le point de contact avec la droite O'P'.

Inversement, par un point Q' de π' passe une seule cubique (6) tangente en ce point à la droite O'Q'. Cette droite rencontre encore la courbe en un point P'.

Ainsi se trouve déterminée directement la transformation T'.

Observons maintenant que le point O' est certainement invariant pour T′, car il y a certainement une cubique (6) ayant un point d'inflexion en O′. Les autres points invariants pour T′ ne peuvent être que les points d'inflexion des cubiques (6) dont la tangente passe par O′. Le lieu de ces points a pour correspondant, dans π, la cubique (4), lieu des points d'inflexion des courbes de $|C|$. Or, cette cubique fait partie du réseau (5); par suite, T′ possède un point invariant et une droite de points invariants. C'est donc nécessairement une homographie.

10. Nous allons établir les formules donnant l'homographie T′.

Soient (Z_1, Z_2, Z_3) les coordonnées d'un point Q′ de π'. Pour que la tangente en ce point à une cubique (6) le contenant, passe par O′, on doit avoir

$$\beta Z_1 Z_3 + \gamma(2aZ_1Z_2 + 3bZ_2^2 + 2cZ_2Z_3 + dZ_1^2) = 0.$$

Par suite, la cubique en question a pour équation

$$\begin{vmatrix} X_1^2X_3 & X_1X_2X_3 & X_2(aX_1X_2 + bX_2^2 + cX_2X_3 + dX_1^2) \\ Z_1^2Z_3 & Z_1Z_2Z_3 & Z_2(aZ_1Z_2 + bZ_2^2 + cZ_2Z_3 + dZ_1^2) \\ 0 & Z_1Z_3 & 2aZ_1Z_2 + 3bZ_2^2 + 2cZ_2Z_3 + dZ_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées du point correspondant P′ sont de la forme

$$\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2 + k} = \frac{Y_3}{Z_3}.$$

L'équation précédente donne

$$k = -\frac{1}{b}(aZ_1 + 3bZ_2 + cZ_3),$$

et, par suite, les formules donnant l'homographie T′ sont

$$(\mathrm{T}') \qquad \frac{Y_1}{-bZ_1} = \frac{Y_2}{aZ_1 + 2bZ_2 + cZ_3} = \frac{Y_3}{-bZ_3}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que le point $O'(X_1 = X_3 = 0)$ et les points de la droite

$$aX_1 + 3bX_2 + cX_3 = 0$$

sont invariants. On vérifie que les formules (I) font correspondre à cette droite la cubique (4) du plan π.

11. Une fois connues les transformations (I), (II), (T'), on obtient sans difficulté les formules donnant la transformation T et la transformation inverse T^{-1}. Si $P(y_1, y_2, y_3)$, $Q(z_1, z_2, z_3)$ sont deux points correspondants, ρ, σ des facteurs de proportionnalité, on a

$$(\mathrm{T})\quad \left\{\begin{aligned} \rho y_1 &= -bz_1^2 z_2(z_1 z_3 - cz_2^2)(az_1 z_2 + bz_2^2 + dz_1^2),\\ \rho y_2 &= z_1 z_2(az_1 z_2 + bz_2^2 + dz_1^2)\\ &\qquad \times (az_1^2 z_3 + 2bz_1 z_2 z_3 - bcz_2^3 + cdz_1^2 z_2),\\ \rho y_3 &= 2z_2(az_1^2 z_3 + 2bz_1 z_2 z_3 - bcz_2^3 + cdz_1^2 z_2)^2\\ &\qquad + dz_1^2(z_1 z_3 - cz_2^2)\\ &\qquad \times (az_1^2 z_3 + 2bz_1 z_2 z_3 - bcz_2^3 + cdz_1^2 z_2). \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{T}^{-1})\quad \left\{\begin{aligned} \sigma z_1 &= -8b^2 y_2(y_1 y_3 - cy_2^2)^2(ay_1 y_2 + by_2^2 + dy_1^2),\\ \sigma z_2 &= 4by_2(y_1 y_3 - cy_2^2)(ay_1 y_2 + by_2^2 + dy_1^2)\\ &\qquad \times (ay_1 y_3 + by_2 y_3 + cdy_1 y_2)\\ \sigma z_3 &= (ay_1 y_3 + by_2 y_3 + cdy_1 y_2)^2\\ &\qquad \times (by_1 y_2 y_3 - ay_1^2 y_3 - cdy_1^2 y_2 - 2bcy_2^3)\\ &\qquad + 4bdy_1(y_1 y_3 - cy_2^2)^2\\ &\qquad \times (ay_1 y_3 + by_2 y_3 + cdy_1 y_2). \end{aligned}\right.$$

Ces formules montrent que les transformations T, T^{-1} sont distinctes, c'est-à-dire que T n'est pas involutive, ce qui résulte d'ailleurs de la définition géométrique de cette transformation.

On voit de plus que les courbes K, que T fait correspondre aux droites de π, sont du septième ordre. De même, les courbes K_1, que T^{-1} fait correspondre aux droites, sont du septième ordre. Mais il est aisé de voir que les courbes K, K_1 ne se comportent pas de la même manière aux points communs à toutes les courbes du faisceau $|C|$. Pour étudier les singularités de ces courbes, il nous sera plus facile d'utiliser la correspondance birationnelle entre les plans π, π', définie plus haut.

12. Soient d une droite de π, K la courbe que T lui fait correspondre. Aux courbes d, K correspondent dans π' une courbe d' du troisième ordre appartenant au réseau (6), et une courbe K' transformée de d' pour T'. Si

$$\alpha X_1^2 X_3 + \beta X_1 X_2 X_3 + \gamma X_2^2 (aX_1 + bX_2 + cX_3) + \gamma d X_1^2 X_2 = 0$$

est l'équation de d', celle de K' sera

$$\begin{aligned} -\alpha b X_1^2 X_3 &+ \beta X_1 X_3 (aX_1 + 2bX_2 + cX_3) \\ &+ \gamma X_2 (aX_1 + 2bX_2 + cX_3)^2 \\ &+ \gamma d X_1^2 (aX_1 + 2bX_2 + cX_3) = 0. \end{aligned}$$

On voit aisément que la courbe K' passe, quels que soient α, β, γ, une fois par les points $A(X_1 = X_2 = 0)$ et les points

$$X_3 = 0, \qquad (aX_1 + 2bX_2)\,[X_2(aX_1 + 2bX_2) + dX_1^2] = 0,$$

deux fois par le point

$$X_1 = 0, \qquad 2bX_2 + cX_3 = 0.$$

Les tangentes en ces points sont variables avec α, β, γ.

L'ensemble des cubiques K', obtenues en faisant varier α, β, γ, forme un réseau de degré un, c'est-à-dire que deux courbes telles que K' se rencontrent en un seul point variable avec ces courbes.

A une courbe K' correspond, dans π, une courbe du neuvième ordre qui se décompose en la conique $x_1 x_3 - c_2^2 = 0$ (puisque K' passe simplement par A) et en une courbe K du septième ordre.

La courbe K′ rencontrant les droites b'_1, b'_2, b'_3, chacune en deux points variables avec α, β, γ, en dehors de A′, la courbe K passe deux fois par chacun des points B_1, B_2, B_3, les tangentes en ces points étant variables.

La courbe K′ rencontre l'ensemble des droites $X_1 = 0$, $X_3 = 0$ en quatre points fixes, en dehors de A′. L'un de ces points est d'ailleurs double. Il en résulte que le point A est quintuple à tangentes fixes pour K, deux des tangentes étant confondues avec $a(x_1 = 0)$.

Comme nous l'avons vu, aux points de la droite $X_1 = 0$ correspondent les points infiniment voisins successifs au point infiniment voisin de A sur a. Par suite, K′ ayant un point double sur $X_1 = 0$, le point A possède deux points doubles infiniment voisins successifs situés sur la conique

$$2bx_1x_3 - bcx_2^2 + acx_1x_2 + cdx_1^2 = 0,$$

qui correspond (avec la droite $x_2 = 0$) à la droite

$$2bX_2 + cX_3 = 0.$$

Cette conique oscule précisément au point A, les deux branches de la courbe K tangentes à a.

En résumé :

La transformation T *fait correspondre aux droites des courbes* K *d'ordre sept possédant :*

Un point quintuple à tangentes fixes A *auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles ;*

Trois points doubles à tangentes variables B_1, B_2, B_3.

13. Désignons par K'_1 une courbe qui correspond, dans π', à une courbe K_1 de π. On trouve aisément que cette courbe a pour équation

$$\begin{aligned} -8b^2\alpha X_1^2 X_3 + 4b\beta X_1 X_3(aX_1 + bX_2 + cX_3) \\ + \gamma(aX_1 + bX_2 + cX_3)^2 \\ \times(-aX_1 + bX_2 - cX_3) \\ + 4db\gamma X_1^2(aX_1 + bX_2 + cX_3) = 0. \end{aligned}$$

Cette courbe K'_1 passe, quels que soient α, β, γ, simplement par les quatre points

$$X_1 = 0, \qquad bX_2 - cX_3 = 0;$$
$$X_3 = 0, \qquad (aX_1 + bX_2)\,[b^2X_2^2 - (a^2 - 4bd)X_1^2] = 0,$$

et doublement par le point $A'(X_1 = 0,\ bX_2 + cX_3 = 0)$.

On en conclut, en raisonnant comme plus haut, que :

La transformation T^{-1} *fait correspondre aux droites des courbes* K_1 *d'ordre sept possédant :*

Un point quadruple à tangentes fixes A, *la branche touchant la droite a ayant une courbe osculatrice fixe;*

Trois points triples à tangentes variables B_1, B_2, B_3.

Actuellement, la courbe de π qui correspond à K'_1 se compose d'une courbe K_1 et de la droite a $(x_1 = 0)$ comptée deux fois.