ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. XLVIII, fasc. 6 - Giugno 1970

Matematica. — *Sur les surfaces algébriques possédant un faisceau de courbes elliptiques.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si dimostra che, sopra una superficie algebrica di divisore $\sigma = 2$, possono esistere più di due sistemi lineari di curve i cui doppi appartengono ad uno stesso sistema lineare.

Nous considérons dans cette Note une surface algébrique contenant un faisceau linéaire de courbes elliptiques sur lequel nous faisons l'hypothèse qu'il existe un certain nombre de courbes elliptiques isolées qui, comptées deux fois, font partie du faisceau. Nous établissons le théorème suivant:

Si sur une surface algébrique contenant un faisceau linéaire de courbes elliptiques, il existe un nombre fini supérieur à deux de courbes elliptiques isolées dont les doubles appartiennent au faisceau, la surface a la diviseur de Severi égal à deux et il existe un nombre fini supérieur à deux de systèmes linéaires de courbes dont les doubles appartiennent à un même système linéaire.

Il existe des surfaces possédant un faisceau linéaire de courbes elliptiques possédant cette propriété. De telles surfaces, de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, ont été construites par M. Burniat [1]. En généralisant le procédé utilisé par celui–ci, nous construirons des surfaces dont le genre arithmétique est supérieur à zéro et possédant un faisceau de l'espèce indiquée.

1. Soit F une surface algébrique contenant un faisceau linéaire $|\Gamma|$ de courbes elliptiques. Supposons qu'il existe sur F, $n > 2$ courbes elliptiques isolées $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ dont les doubles sont des courbes de $|\Gamma|$. On a donc

$$2\gamma_1 \equiv 2\gamma_2 \equiv \cdots \equiv 2\gamma_n \equiv \Gamma.$$

Soit $|C|$ un système linéaire non spécial et régulier, de degré ν, de genre π et de dimension

$$r = p_a + \nu - \pi + 1 > 0 .$$

Le système $|C + \gamma_1 - \gamma_2|$ a le même degré, le même genre que $|C|$ et sa dimension est au moins égale à r d'après le théorème de Riemann–Roch. On a

$$|2(C + \gamma_1 - \gamma_2)| = |2C|$$

donc la surface F a le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

Les systèmes linéaires

$$|C_{ik}| = |C + \gamma_i - \gamma_k| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

possèdent la même propriété que le système $|C + \gamma_1 - \gamma_2|$.

(*) Nella seduta del 13 giugno 1970.

(1) *Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque* (« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », 13 sem. 1954, pp. 459–463).

Observons que l'on a

$$C + 2\gamma_i \equiv C + 2\gamma_k ,$$

d'où

$$C + \gamma_i - \gamma_k \equiv C + \gamma_k - \gamma_i ,$$

donc les systèmes $|C_{ik}|$ et $|C_{ki}|$ sont identiques. Il y a $n(n-1):2$ systèmes $|C_{ik}|$ et ces systèmes sont distincts si les opérations $\gamma_i - \gamma_k , \gamma_j - \gamma_h$ sont distinctes.

Supposons pour fixer les idées que les opérations $\gamma_1 - \gamma_2 , \gamma_3 - \gamma_4$ soient identiques, c'est-à-dire que les courbes $\gamma_1 + \gamma_4 , \gamma_2 + \gamma_3$ soient équivalentes. Ces courbes déterminent un faisceau de courbes elliptiques qui doit coïncider avec $|\Gamma|$ car ses courbes ne rencontrent pas les courbes Γ en des points variables. Mais alors, les courbes $2\gamma_1$ et $\gamma_1 + \gamma_4$ sont équivalentes et il en est de même des courbes γ_1 , γ_4 contrairement à l'hypothèse.

Le théorème énoncé au début est donc démontré.

Il existe $n(n-1):2$ systèmes $|C_{ik}|$ et par conséquent $1 + n(n-1):2$ systèmes linéaires dont les doubles appartiennent au système $|2C|$.

On remarquera que la considération des opérations $\gamma_i - \gamma_k$ est analogue à celle utilisée par Severi dans son premier mémoire sur la base (2).

2. Nous allons maintenant construire une surface algébrique contenant un faisceau linéaire de courbes elliptiques possédant la propriété en question.

Soit F une surface algébrique transformée en elle-même par trois transformations birationnelles involutives T_1 , T_2 , T_3 formant un groupe trirectangle. On a donc

$$T_1 = T_2 T_3 \quad , \quad T_2 = T_3 T_1 \quad , \quad T_3 = T_1 T_2 .$$

Ces transformations engendrent sur F une involution d'ordre quatre dont nous désignerons une image par F_0.

Désignons par U_1 , U_2 , U_3 les courbes unies des involutions engendrées par T_1 , T_2 , T_3 et supposons que ces courbes n'aient aucune partie commune.

La surface F_1, image de l'involution engendrée sur F par T_1, contient une involution du second ordre dont la courbe unie est une courbe qui correspond à $U_2 + U_3$.

Soient D_1 , D_2 , D_3 les courbes de diramation qui correspondent sur F_0 respectivement aux courbes unies U_1 , U_2 , U_3.

Pour notre objet, nous supposerons que la surface F_0 est un plan (3), que D_1 est l'ensemble de n droites passant par un point O et que D_2 , D_3 sont des courbes d'ordre m passant $m-2$ fois par O.

La surface F_1 est maintenant un plan double dont la courbe de diramation est $D_2 + D_3$, c'est-à-dire une courbe d'ordre $2m$ passant $2m-4$ fois par O. Les courbes canoniques de F_1 correspondent aux adjointes à la courbe

(2) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* («Mathematische Annalen», 1906, Bd. LXII, pp. 194–225).

(3) Ces plans quadruples ont été considérés par M. P. LIBOIS, *Sur une classe de plans quadruples* (Gembloux, 1937) sous le nom de plans quadruples abéliens.

moitié de $D_2 + D_3$ [4], c'est-à-dire aux adjointes à une courbe m passant $m - 2$ fois par O. Ces adjointes sont les groupes de $m - 3$ droites passant par O.

A une droite passant par O correspond sur F_1 une courbe elliptique Γ_1 et ces courbes forment un faisceau $|\Gamma_1|$. Le système canonique de F_1 est formé par les groupes de $m - 3$ courbes du faisceau $|\Gamma_1|$ et le genre géométrique de la surface est donc $p_g = m - 2$.

3. Observons que les courbes d'ordre m passant $m - 2$ fois par O forment un système linéaire de dimension $3m - 1$. Rapportons projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace linéaire S_{3m-1} a $3m - 1$ dimensions. Au plan F_0 correspond une surface F'_0 d'ordre $4(m - 1)$. Au domaine du point O correspond une courbe rationnelle G_0 d'ordre $m - 2$. Aux droites passant par O correspondent des coniques rencontrant la courbe G_0 en un point. Aux courbes D_2, D_3 correspondent des sections hyperplanes de F'_0.

Si nous désignons par $x_0, x_1, \cdots, x_{3m-1}$ les coordonnées des points de S_{3m-1} et par $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ deux hyperplans de cet espace, en joignant aux équations de F'_0 l'équation

$$x_{3m}^2 = \varphi_1 \varphi_2 ,$$

nous obtenons, dans un espace S_{3m} à $3m$ dimensions les équations de F_1.

A la courbe G_0 correspond sur F_1 une courbe G_1 de genre $3m + 2$ rencontrant les courbes elliptiques Γ_1 en deux points.

4. La surface F est la surface double F_1, la courbe de diramation étant formée de n courbes du faisceau $|\Gamma_1|$, courbes que nous désignerons par $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \cdots, \Gamma_{1n}$.

Une courbe Γ_1 ne rencontrant pas la courbe de diramation, il lui correspond sur F une courbe elliptique Γ formant un faisceau linéaire $|\Gamma|$.

A la courbe G_1 correspond sur F une courbe G de genre $6m + n + 3$.

Aux courbes $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \cdots, \Gamma_{1n}$ correspondent des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$. Une courbe Γ rencontre la courbe G en quatre points, mais les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ ne rencontrent cette courbe qu'en deux points. Il en résulte que les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ comptées deux fois sont des courbes de $|\Gamma|$. Ce faisceau linéaire satisfait donc aux conditions imposées au début.

Observons qu'à une courbe canonique de F_1, formée de $m - 3$ courbes Γ_1, correspond une courbe formée de $m - 3$ courbes Γ qui, jointe à la courbe unie, donne une courbe canonique de F. Le système canonique de F est donc

$$|\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + (m - 3)\Gamma|$$

et le genre géométrique de cette surface est $p_g = m - 2$.

Le système bicanonique de F est

$$|2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \cdots + 2\gamma_n + 2(m - 3)\Gamma| = |(2m + n - 6)\Gamma|$$

et son bigenre est $P_2 = 2m + n - 5$.

(4) Voir ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologne, Zanichelli, 1949), p. 78.

ROMA, 1970 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei