ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. LI, fasc. 5 - Novembre 1971

Geometria. — *Sulle superficie non razionali di genere nullo e di genere lineare uno.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — On considère les surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$ dont le système bicanonique est composé au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques.

Le superficie algebriche di genere $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$ sono di due specie: quelle il cui sistema bicanonico è irriducibile e quelle le cui curve bicanoniche si compongono con un fascio di curve ellittiche. Nel primo caso, si ha $P_2 = p^{(1)} > 1$; abbiamo precedentemente studiato queste superficie [1]. Nel secondo caso, la superficie contiene un fascio lineare $|C|$ di curve ellittiche e l'aggiunto a questo fascio è composto di curve ellittiche isolate parziali del fascio oppure di curve razionali. Abbiamo studiato questo caso quando l'aggiunto a $|C|$ è formato di curve ellittiche isolate [2]. Abbiamo dimostrato che il fascio $|C|$ contiene n curve ellittiche $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ di cui certi multipli sono curve del fascio:

1) si ha $2\gamma_1 \equiv 2\gamma_2 \equiv \cdots \equiv 2\gamma_n \equiv C$, $C' = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$, $P_2 = n - 1$, $P_3 = n - 2$ e il divisore di Severi della superficie è eguale a 2;

2) si ha $n = 2$, $3\gamma_1 \equiv 3\gamma_2 \equiv C$, $C' = 2\gamma_1 + 2\gamma_2$, $P_2 = 1$, $P_3 = 2$ e il divisore di Severi della superficie è eguale a 3.

Le prime superficie sono già state determinate da P. Burniat [3].

Vogliamo ora studiare le superficie quando l'aggiunto al fascio $|C|$ è composto di curve razionali.

1. Sia F una superficie algebrica non razionale di genere $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$ il cui sistema bicanonico risulti composto con le curve di un fascio di curve ellittiche, $|C|$. Supponiamo che l'aggiunto alle C non sia composto con curve ellittiche parziali del fascio. Questo aggiunto è allora una curva isolata non incontrata dalle curve C. Essa può essere composta da un gruppo di punti oppure di curve fondamentali per il fascio. Il gruppo di punti può essere sostituito da curve eccezionali fondamentali per il fascio. Possiamo considerare come generale il caso in cui esistano n curve razionali $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, di grado virtuale -1. Una curva γ_i appartiene ad una curva C del fascio ed è completata come tale da una curva δ_i ellittica. Le curve γ_i e δ_i hanno uno ed un sol punto in comune. Supporremo che per l'aggiunto C' di $|C|$ risulti:

$$C' = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n .$$

Le curve $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ non sono incontrate dalle curve C.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1971.

2. Supponiamo che le curve bicanoniche di F siano quelle composte da $m - 1$ curve C. Si ha dunque $P_2 = m$. Il biaggiunto a $|C|$ è allora $C'' = mC$. Ma questo aggiunto è aggiunto a $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ e non è incontrato da queste curve. L'insieme delle curve γ dev'essere una curva ellittica degenere, cioè queste curve hanno fra loro in comune n punti. L'aggiunto alla curva $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ è composto da m curve C.

Il triaggiunto al fascio $|C|$ è

$$|C'''| = |(m - 1) C + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n|,$$

ed il sistema tricanonico è formato dalla curva C' e da $m - 2$ curve C. Si ha $P_3 = m - 1$.

Non possiamo avere $m = 1$. In questo caso, infatti, si avrebbe $P_2 = 1$ e la superficie avrebbe una curva bicanonica d'ordine zero e sarebbe una superficie di Enriques [4]. Una superficie siffatta contiene fasci di curve ellittiche: ma Enriques ha dimostrato che un tal fascio ammette una sola curva aggiunta, composta di due curve ellittiche isolate le quali sono aggiunte l'una all'altra. Queste curve, contate due volte, sono curve del fascio (cfr. il primo caso nella Introduzione).

3. Rammentiamo che la superficie di Castelnuovo è una superficie del settimo ordine che possiede una retta tripla, r, una conica doppia, γ, che non incontra la retta r, tre punti tacnodali i cui piani tangenti passano per r. Le curve bicanoniche sono le curve C del quarto ordine tagliate, fuori di r, dai piani passanti per r. Il piano della conica γ taglia ancora la superficie secondo tre rette, r_1, r_2, r_3. L'aggiunto al sistema $|C|$ è $r_1 + r_2 + r_3$ e queste tre rette formano una cubica ellittica degenere. L'aggiunto alla curva $R \equiv r_1 + r_2 + r_3$ è la curva $2C$.

4. Consideriamo ad esempio il caso $n = 3$. Diciamo G le sezioni iperpiane della superficie F ed m_1, m_2, m_3 gli ordini delle curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Queste curve hanno a due a due un punto in comune, essendo $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ una cubica ellittica degenere.

Le curve del sistema

$$|G_1| = |2G - (m_2 + m_3)\gamma_1 - (m_3 + m_1)\gamma_2 - (m_1 + m_2)\gamma_3|$$

non incontrano le curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Possiamo supporre che la dimensione del sistema $|G|$ sia abbastanza grande perché il sistema $|G_1|$ esista.

Nel caso $m_1 = m_2 = m_3$ possiamo prendere per $|G_1|$ il sistema

$$|G - m_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)|.$$

In particolare, per la superficie di Castelnuovo, possiamo prendere il sistema delle curve tagliate dalle quadriche passante per la conica γ.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. GODEAUX, *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls,* « Journal de Mathématiques pures et appliquées », 25–41 (1935).

[2] L. GODEAUX, *Sur les surfaces algébriques de genre zéro et de genre linéaire un,* « Bulletin de l'Académie Royal de Belgique », 560–564, 649–653 (1970).

[3] P. BURNIAT, *Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque,* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », 1° sem., 459–463 (1954).

[4] F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno,* « Memorie della Società Italiana delle Scienze », 327–352 (1906). Oppure: *Memorie Scelte,* 2, 241–272.

ROMA, 1972 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei