

**Geometria algebrica.** — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions contenant une congruence irrationnelle de courbes.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si dimostra che in una varietà algebrica a tre dimensioni, le superfici canoniche tagliano gruppi canonici sulle curve di una congruenza irrazionale.

Dans une Note en cours de publication dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique (novembre 1967), nous avons établi le théorème suivant: soit  $G$  une congruence algébrique de courbes algébriques  $C$  sur une variété algébrique  $V$  à trois dimensions. Sur une courbe  $C$ , le groupe  $D$  des points focaux joint au groupe  $H$  des points de rencontre de  $C$  avec une surface canonique de  $V$ , est un groupe canonique  $K$  de la courbe. On a donc

$$D + H \equiv K.$$

Si la congruence  $G$  considérée comme une variété à deux dimensions n'est ni rationnelle ni référable à une réglée et si par un point de  $V$  passe une seule courbe de la congruence, celle-ci est dépourvue de points focaux et les surfaces canoniques de  $V$  découpent sur une courbe  $C$  des groupes canoniques de celle-ci.

Nous nous proposons d'exposer une nouvelle démonstration de ce dernier théorème.

1. Commençons par établir un lemme sur une surface algébrique  $F$ , de genre géométrique  $p_g > 0$ , contenant un faisceau irrationnel  $\{C\}$  de courbes  $C$ .

Si  $L$  désigne une courbe canonique de  $F$ , on a

$$C' - C \equiv L.$$

Coupons les courbes de cette relation par une courbe  $C$ . Le faisceau  $\{C\}$  étant dépourvu de points-base, si nous désignons par  $K$  un groupe canonique de  $C$  et par  $H'$  le groupe de ses points de rencontre avec une courbe canonique  $L$ , on a

$$K \equiv H'.$$

Remarquons que le genre des courbes  $C$  est nécessairement supérieur à zéro, sans quoi on aurait  $p_g = 0$ .

(\*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

2. Considérons une variété algébrique  $V$  à trois dimensions, de genre géométrique  $P_g > 0$  et sur cette variété une congruence  $G$  de courbes algébriques  $C$ . Supposons que

1) la congruence  $G$  est d'indice un, c'est-à-dire que par un point de  $V$  passe une seule courbe  $C$ ,

2) Considérée comme une variété doublement infinie, la congruence  $G$  n'est ni rationnelle ni référable à une réglée.

Soit  $\Phi$  une surface représentant la congruence  $G$ . Aux points d'une courbe de  $\Phi$  correspondent les courbes  $C$  d'une surface  $F$  que nous dirons appartenir à la congruence. Sur cette surface, les courbes  $C$  forment un faisceau irrationnel.

Si  $M$  désigne une surface canonique de  $V$ , nous avons

$$F' - F \equiv M.$$

En coupant par une courbe  $C$ , on obtient

$$(C, F' - F) \equiv (C, M).$$

Le premier membre est le groupe  $H'$  des points de rencontre de  $C$  avec une courbe canonique de  $F$ . La relation précédente montre que le groupe  $H'$  est équivalent au groupe  $H$  des points de rencontre de  $C$  avec une surface canonique. On a donc finalement.

$$H \equiv K.$$

Remarquons que les courbes  $C$  ne peuvent être rationnelles.

3. Nous allons appliquer ce théorème à la variété  $V$  représentant les couples de points d'une surface algébrique  $F_0$  de genre géométrique  $p_g > 0$  et d'une courbe  $C_0$  de genre  $\pi > 0$ , dont Severi a déterminé le système canonique (1).

Aux points de  $C_0$  correspondent sur  $V$  des surfaces  $F$ , birationnellement identiques à  $F_0$ , formant un faisceau  $\{F\}$  de genre  $\pi$ .

Aux points de  $F_0$  correspondent des courbes  $C$  de genre  $\pi$ , birationnellement identiques à  $C_0$ , formant une congruence  $G$  d'indice un, de mêmes caractères que  $F_0$ .

Aux groupes canoniques de  $C_0$  correspondent dans  $\{F\}$  des groupes canoniques de  $\{F\}$ . Soient  $F_1, F_2, \dots, F_{2\pi-2}$  les surfaces de  $\{F\}$  constituant un de ces groupes.

Aux courbes canoniques de  $F_0$  correspondent des surfaces  $\Phi$  appartenant à la congruence  $G$ . Soient  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{p_g}$  les surfaces de  $G$  correspondant à des courbes canoniques de  $F_0$  linéairement indépendantes.

(1) SEVERI, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 2<sup>o</sup> sem. 1909, pp. 33-87).

Le système canonique de  $V$  est formé par les surfaces

$$(1) \quad \Sigma \lambda_{ik} F_i \Phi_k,$$

les surfaces  $\Sigma \lambda_{ik} F_i$  formant un groupe canonique de  $\{F\}$ . Les surfaces qui figurent dans l'expression (1) ne sont pas toutes indépendantes, le système canonique de  $V$  ayant la dimension  $P_g - 1 = p_g \pi - 1$ .

Considérons un point de  $F_0$  qui n'appartienne pas à toutes les courbes canoniques et la courbe  $C$  qui lui correspond. Cette courbe  $C$  appartient à  $p_g - 1$  des surfaces  $\Phi$ . Soit pour fixer les idées  $\Phi_1$  la surface qui ne la contient pas. Les points de rencontre de la courbe  $C$  avec les surfaces (1) sont donnés par

$$\Phi_1 \Sigma \lambda_{i,1} F_i$$

et  $\Sigma \lambda_{i,1} F_i$  constitue un groupe canonique de  $\{F\}$ .

La courbe  $C$  ne rencontre pas  $\Phi_1$  puisque  $G$  est dépourvue de points-base, mais elle rencontre la surface  $\Sigma \lambda_{i,1} F_i$  suivant un groupe canonique de la courbe, conformément au théorème.

4. Retournons au cas général. Il convient d'examiner de plus près le cas où les courbes  $C$  sont elliptiques. Dans cette hypothèse, les surfaces canoniques de  $V$  ne rencontrent pas les courbes  $C$ .

Commençons par considérer le cas d'une surface  $F$  de genre géométrique  $p_g > 0$  contenant un faisceau irrationnel  $\{C\}$  de courbes elliptiques. Soit  $\varphi$  une courbe représentant les courbes  $C$  de  $\{C\}$ .

Si  $p_g = 1$ , la courbe canonique de  $F$  se compose d'un nombre fini  $p$  de courbes  $C$  et éventuellement de parties elliptiques de courbes  $C$ , le groupe des  $p$  points correspondant sur  $\varphi$  aux courbes  $C$  étant isolé.

Si  $p_g > 1$ , toute courbe  $C$  appartient à  $p_g - 1$  courbes canoniques et le système canonique est constitué par une série linéaire de courbes  $C$  (à laquelle correspond sur  $\varphi$  une série linéaire), jointe éventuellement à des parties elliptiques de courbes  $C$ .

5. Considérons maintenant la variété  $V$  de genre géométrique  $P_g > 0$ , contenant une congruence irrationnelle  $G$  de courbes elliptiques  $C$ .

Si  $P_g = 1$ , la surface canonique de  $V$  est une surface de la congruence  $G$  à laquelle correspond sur la surface  $\Phi$  image de  $G$  une courbe isolée.

Si  $P_g > 1$ , toute courbe  $C$  de  $G$  appartient à  $P_g - 1$  surfaces canoniques de  $V$ . Le système canonique de cette variété est constitué par un système linéaire de surfaces de la congruence. A ces surfaces correspondent sur  $\Phi$  un système linéaire complet de courbes (2).

(2) Au sujet de ce théorème, voir un mémoire de M. L. ROTH, *On threefolds which contain congruences of elliptic curves* (« Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », 1952, pp. 387-424).

Ce résultat peut être étendu. Supposons que la variété  $V$  de genre  $P_g > 0$ , contienne une congruence algébrique  $G$  de courbes elliptiques  $C$ . Si une courbe  $C$  contient  $d$  points focaux et rencontre une surface canonique en  $h$  points, on a  $d + h = 0$ , donc  $d = h = 0$ .

Une congruence algébrique de courbes elliptiques est donc dépourvue de points focaux et les courbes de la congruence ne rencontrent pas les surfaces canoniques.

Si  $P_g = 1$ , la surface canonique est une surface isolée de la congruence.

Si  $P_g > 1$ , toute courbe  $C$  appartient à  $P_g - 1$  surfaces canoniques de  $V$  et celles-ci sont des surfaces de la congruence formant un système linéaire.