SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES CONTENANT UNE INVOLUTION CUBIQUE CYCLIQUE

par **Lucien Godeaux** (Liége, Belgique)

Dans nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis ([1]), nous avons montré que sur une surface F contenant une telle involution, on peut construire des systèmes linéaires contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution dont l'un est privé de points-base, p étant l'ordre de l'involution. En supposant que ce système soit celui des sections hyperplanes, on voit que l'involution est déterminée sur F par une homographie de période p de l'espace ambiant. Dans nos recherches, nous ne sommes pas occupé de la dimension des systèmes appartenant à l'involution, c'est-à-dire des dimensions des axes ponctuels de l'homographie. Nous comblons ici cette lacune dans le cas $p=3$. La méthode suivie peut s'étendre aux involutions d'ordre supérieur tout au moins quand les points unis de l'involution sont ce que nous avons appelé des points unis symétriques. Nous espérons y revenir plus tard.

1. Soit F une surface algébrique régulière ($p_a = p_g$) contenant une involution cyclique I du troisième ordre ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Nous rappelerons diverses propriétés dont on trouvera la démonstration dans notre ouvrage cité plus haut.

([1]) On trouvera un exposé de ces recherches dans notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Ediz. Cremonese, 1963).

Nous pouvons former sur la surface F un système linéaire $|C|$ privé de points-base, contenant trois systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ composés au moyen de l'involution I et dont l'un, $|C_0|$, est dépourvu de points-base. En remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, on peut supposer que ce système est régulier.

Nous désignerons par r la dimension de $|C|$ et par r_0, r_1, r_2 les dimensions des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$.

En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, on obtient un modèle projectif de F que nous désignerons toujours par le même symbole. Sur cette surface F, que l'on peut sans restriction, supposer simple, l'involution I est engendrée par une homographie H de période trois possédant trois axes σ_0, σ_1, σ_2 respectivement de dimensions r_0, r_1, r_2. Les courbes C_0 sont découpées par les hyperplans passant par σ_1, σ_2. Il en résulte que l'espace σ_0 rencontre la surface F aux points unis de l'involution.

Nous supposerons que les courbes C_1 sont découpées sur F par les hyperplans passant par les espaces σ_0, σ_2 et les courbes C_2 par les hyperplans passant par σ_0, σ_1.

Les points unis de l'involution I sont de deux espèces:

En un point uni de première espèce, le plan tangent à F en ce point rencontre suivant une droite l'un des espaces σ_1, σ_2. Les courbes C_0 passant par le point uni y acquièrent un point triple à tangentes variables.

En un point uni de seconde espèce, le plan tangent à F rencontre en un point chacun des espaces σ_1, σ_2. Il y a deux tangentes à F en ce point unies pour l'homographie H. Les courbes C_0 passant par le point uni y acquièrent un point double à tangentes fixes: les tangentes unies pour H. Celles de ces courbes assijetties à toucher une droite distincte des tangentes unies acquièrent un point triple à tangentes variables.

Nous désignerons par A_1 un quelconque des points unis de première espèce en lequel le plan tangent rencontre σ_1 et par A_2 un point uni en lequel le plan tangent rencontre l'espace σ_2. Nous supposerons qu'il y a α_1 points A_1 et α_2 points A_2.

Un point uni de seconde espèce quelconque sera désigné par A et on appellera t_1 la tangente en ce point s'appuyant sur σ_1 et t_2 celle qui s'appuie sur σ_2. Nous désignerons par α le nombre des points A.

2. Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions. Il correspond à la surface F une surface Φ image de l'involution I en ce sens qu'à un point de Φ correspond un groupe de I.

Nous désignerons par $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent respectivement aux systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$.

Rappelons qu'à un point de première espèce correspond sur Φ un point triple à cône tangent rationnel et qu'à un point de seconde espèce correspond un point double biplanaire de la surface Φ.

Nous désignerons par n l'ordre de la surface Φ et par π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0. L'ordre de la surface F est $3n$ et le genre des sections hyperplanes est égal à $3(\pi-1)+1$.

Le système $|C|$ étant régulier, sa dimension est donnée par le théorème de Riemann-Roch,

$$r = p_a + 3n - 3(\pi-1) = p_a + 3(n-\pi+1),$$

p_a étant le genre arithmétique de F.

Le même théorème donne pour la dimension de $|\Gamma_0|$, c'est-à-dire de $|C_0|$

$$r_0 \geqslant p'_a + n - \pi + 1,$$

p'_a étant le genre arithmétique de Φ.

Entre les genres arithmétiques p_a et p'_a on a la relation

$$12(p_a+1) = 3.12(p'_a+1) - 8\alpha - 4(\alpha_1+\alpha_2),$$

c'est-à-dire

$$p_a + 1 = 3(p'_a+1) - \frac{1}{3}(2\alpha+\alpha_1+\alpha_2). \tag{1}$$

3. Les courbes C_1 sont découpées sur F par les hyperplans passant par σ_0, σ_2, par conséquent elles passent par les points A en y touchant la droite t_2, simplement par les points A_1 avec une tangente variable et doublement par les points A_2 avec des tangentes variables. Il en résulte que le degré du système $|C_1|$ est égal à $3n-2\alpha-\alpha_1-4\alpha_2$.

Le genre des courbes C_1 est égal à $3(\pi-1)+1-\alpha_2$.

Le degré du système $|\Gamma_1|$ est égal à

$$n - \frac{1}{3}(2\alpha+\alpha_1+4\alpha_2),$$

et son genre π_1 est donné par la formule de Zeuthen,

$$6(\pi_1 - 1) + 2(\alpha + \alpha_1 + 2\alpha_2) = 6(\pi - 1) - 2\alpha_2,$$

c'est-à-dire par

$$\pi_1 - 1 = \pi - 1 - \frac{1}{3}(\alpha + \alpha_1 + 3\alpha_2).$$

La dimension du système $|\Gamma_1|$ satisfait d'après le théorème de Riemann-Roch, à l'inégalité

$$r_1 \geqslant p_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{3}(\alpha + \alpha_2).$$

On trouve de même pour r_2 l'inégalité

$$r_2 \geqslant p'_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{3}(\alpha + \alpha_1).$$

4. D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$r_0 + r_1 + r_2 + 3 = r + 1,$$

c'est-à-dire

$$3(p'_a + 1) + 3(n - \pi + 1) - \frac{1}{3}(2\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) \geqslant p_a + 3(n - \pi + 1) + 1.$$

En utilisant l'équation (1), on trouve que les deux membres de l'inégalité précédante sont identiques et par conséquent c'est le signe d'égalité qui prévaut dans les inégalités précédentes. On a donc

$$r_0 = p'_a + n - \pi + 1, \qquad r_1 = p'_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{3}(\alpha + \alpha_2),$$

$$r_2 = p'_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{3}(\alpha + \alpha_1),$$

d'où

$$r_1 = r_0 - \frac{1}{3}(\alpha + \alpha_2), \qquad r_2 = r_0 - \frac{1}{3}(\alpha + \alpha_1).$$

Les nombres $\alpha + \alpha_1$ et $\alpha + \alpha_2$ sont multiples de 3.

5. Le système $|2C|$ est également transformé en lui-même par H et contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et que nous désignerons par $|(2C)_0|$, $|(2C)_1|$, $|(2C)_2|$. Ils contiennent respectivement les courbes $2C_0$, $2C_1$, $2C_2$.

Observons qu'à chacun des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ on peut attacher une racine cubique primitive de l'unité, respectivement $\varepsilon^0 = 1$, ε, ε^2. Alors aux systèmes $|(2C)_0|$, $|(2C)_1|$, $|(2C)_2|$ sont respectivement attachés les nombres 1, ε^2, ε.

Les courbes de $|(2C)_0|$ ne passent pas par les points unis de l'involution, mais il contient aussi les courbes $C_1 + C_2$. Celles-ci passent par les points unis et ont des points doubles aux points A, les tangentes étant les droites t_1, t_2. Elles ont également des points triples aux points A_1 et A_2, à tangentes variables.

Les courbes $2C_1$ ont des points de rebroussement aux points A, la tangente de rebroussement étant t_2. Elles ont un point double à tangentes variables aux points A_1 et un point quadruple à tangentes variables aux points A_2. Le système $|(2C)_1|$ contient aussi les courbes $C_0 + C_2$ qui ont un point simple aux points A en y touchant la droite t_1, un point double à tangentes variables aux points A_1 et un point simple à tangente variable aux points A_2. Il en résulte que les courbes $(2C)_1$ passent une fois par les points A en y touchant t_1, deux fois par les points A_1 et une fois par les points A_2, comme d'ailleurs les courbes C_2.

On voit de même que les courbes $(2C)_2$ se comportent aux points unis comme les courbes C_1.

6. On sait qu'un point double biplanaire est équivalent au point de vue des transformations birationnelles à deux courbes rationnelles de degré virtuel -2 se rencontrant en un point. Chacune de ces courbes correspond au point uni infiniment voision du point A sur les droites t_1, t_2. Nous désignerons par γ_{01} la *somme* des courbes homologues des points infiniment voisins de A sur la droite t_1 et par γ_{02} la somme analogue relative à la droite t_2.

Les points de diramation de Φ qui correspondent aux points unis de première espèce sont équivalents à des courbes rationnelles de degré virtuel -3. Nous désignerons par γ_1 la somme des courbes équivalentes aux points homologues des points unis A_1 et par γ_2 la somme analogue relative aux points unis A_2.

Cela posé, nous avons les relations d'équivalence

$$3\Gamma_0 \equiv 3\Gamma_1 + \gamma_{01} + 2\gamma_{02} + \gamma_1 + 2\gamma_2,$$

$$3\Gamma_0 \equiv 3\Gamma_2 + 2\gamma_{01} + \gamma_{02} + 2\gamma_1 + \gamma_2.$$

On en déduit

$$6\Gamma_0 \equiv 3(\Gamma_1 + \Gamma_2) + 3(\gamma_{01} + \gamma_{02} + \gamma_1 + \gamma_2),$$

relation qui exprime que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$ correspondent à des courbes du système $|(2C)_0|$ passant par les points unis.

On déduit aussi des relations précédentes

$$3(\Gamma_0 + \Gamma_2) \equiv 6\Gamma_1 + 3\gamma_{02} + 3\gamma_2,$$

$$3(\Gamma_0 + \Gamma_1) \equiv 6\Gamma_2 + 3\gamma_{01} + 3\gamma_1$$

et par conséquent

$$\Gamma_0 + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_1 + \gamma_{02} + \gamma_2,$$

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 \equiv 2\Gamma_2 + \gamma_{01} + \gamma_1.$$

En effet, le second membre de la première de ces relations signifie que les courbes $C_0 + C_2$ assujetties à toucher aux points A une droite distincte de t_1, t_2 et aux points A_2 quatre tangentes distinctes sont des courbes du système $|(2C)_1|$. On a une interprétation analogue pour le second membre de la seconde formule.

Liége, Décembre 1969.