GODEAUX, LUCIEN
1969
Boll. U. M. I.
(4), N. 4-5, pp. 570-573

# Sur un faisceau de sextiques de Halphen.

LUCIEN GODEAUX (Liège)

**Sunto.** - *Rettificazione di una nota anteriore. Vedere la introduzione.*

Le faisceau de HALPHEN de courbes du sixième ordre ayant un point double $O$ et quatre tacnodes $A, B, C, D$ dont les tangentes tacnodales passent par $O$ existe-t-il? Nous avions cru pouvoir répondre par la négative à cette question (1), mais M. PATRICK DU VAL, à la lecture de notre note, nous a communiqué une construction élégante d'un tel faisceau. Nous la résumons rapidement ci-après.

Soient $K$ une cubique plane sans point double et $O$ un de ses points sextatiques. Le tangentiel de $O$ est un point d'inflexion $I$. Les points de contact $A, B, C, D$ des tangentes à $K$ menées par $O$ sont situés par couples sur deux droites passant par $I$. Supposons pour fixer les idées que les droites $AB$ et $CD$ passent par $I$. La courbe $K$ et les coniques passant par $A, B, C, D$ sont transformées en elles-mêmes par l'homologie harmonique de centre $I$ et dont l'axe est la polaire harmonique de $I$. Il en résulte qu'il existe une conique $\Sigma$ passant par $A, B, C, D$, touchant $K$ en $A, B$ et une conique $\Sigma'$ passant par les mêmes points touchant $K$ en $C, D$. Cela étant, les sextiques

$$2\,\Sigma + OC + OD, \qquad 2\,\Sigma' + OA + OB$$

déterminent un faisceau de HALPHEN dont les courbes ont un point double en $O$ et des tacnodes en $A, B, C, D$ dont les tangentes passent par $O$.

Il nous a paru nécessaire de reprendre notre raisonnement et d'obtenir le faisceau de HALPHEN en question, dont nous donnons d'ailleurs l'équation. Nous montrons ensuite que si l'on donne une cubique irréductible $K$ passant par $O$ et touchant en $B, C, D$ les droites $OB, OC, OD$, il existe trois points $A$ tels que les points $O, A, B, C, D$ forment la base d'un faisceau de HALPHEN de l'espèce indiquée.

(1) *Impossibilité d'un certain faisceau de Halphen* (Questo Bollettino, 1968, pp. 732-735).

L'existence du faisceau de HALPHEN considéré présente un certain intérêt car M. CAMPEDELLI a démontré qu'une courbe de ce faisceau jointe aux droites $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ forme la courbe de diramation d'un plan double d'irrégularité un privé de courbe canonique et ayant une courbe bicanonique d'ordre zero [2].

**1.** Dans notre note, nous avons pris comme figure de référence le triangle $BCD$ et le point $O$ comme point unitaire. En faisant correspondre les cubiques

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 x_1^2(x_2 - x_3) + \lambda_2 x_2^2(x_3 - x_1) + \lambda_3 x_3^2(x_1 - x_2) = 0$$

aux plans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0,$$

nous obtenons la surface cubique $F$ d'équation

$$X_0^2(X_1 + X_2 + X_3) + X_1 X_2 X_3 = 0.$$

Soit

$$a_1 x_1^2(x_2 - x_3) + a_2 x_2^2(x_3 - x_1) + a_3 x_3^2(x_1 - x_2) = 0$$

une cubique $K$ irréductible passant par le point $O$. Le point de contact $A$ de la quatrième tangente à $K$ menée par $O$ a pour coordonnées $a_2 a_3$, $a_3 a_1$, $a_1 a_2$. Il lui correspond sur $F$ un point $A_1$ de coordonnées $-a_1 a_2 a_3$, $a_2 a_3(a_2 - a_3)$, $a_3 a_1(a_3 - a_1)$, $a_1 a_2(a_1 - a_2)$.

A la section de $F$ par une quadrique correspond une sextique ayant un point double en $O$ et des tacnodes en $B$, $C$, $D$. Pour que cette courbe ait également un tacnode en $A$, nous avons montré que la droite commune au plan

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

qui correspond à la courbe $K$ et au plan tangent

$$2(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)X_0 - a_1^2(a_1 - a_2 - a_3)X_1$$
$$- a_2^2(a_2 - a_3 - a_1)X_2 - a_3^2(a_3 - a_1 - a_2)X_3 = 0$$

à $F$ en $A_1$ [3] rencontre une des droites

$$X_0 = X_1 = 0, \qquad X_0 = X_2 = 0, \qquad X_0 = X_3 = 0.$$

[2] CAMPEDELLI, *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, I° sem. 1932, pp. 536-542).

[3] Dans notre note, l'équation (1) représente en coordonnées tangentielles le point $A_1$.

La condition pour que la droite rencontre la première des droites précédentes est

$$(a_2 - a_3)(a_1 - a_2 - a_3) = 0.$$

Pour $a_2 = a_3$, la courbe $K$ est réductible et on doit donc avoir $a_1 = a_2 + a_3$.

2. Quant on a $a_1 = a_2 + a_3$, l'équation de la cubique $K$ s'écrit

$$x_1(x_2 - x_3)[a_2(x_1 - x_2) - a_3(x_3 - x_1)] - x_2x_3[a_2(x_1 - x_2) + a_3(x_3 - x_1)] = 0.$$

La tangente à $K$ en $O$ a pour équation

$$a_2(x_1 - x_2) + a_3(x_3 - x_1) = 0$$

et le tangentiel $I$ de $O$ a pour coordonnées $o,\ a_3,\ a_2$.

La tangente à $K$ en $I$ a pour équation

$$a_2(x_1 + x_2) - a_3(x_1 + x_3) = 0$$

et la polaire de ce point contient cette tangente et est complétée par la droite

$$a_3(x_3 - x_1) + a_2(x_1 - x_2) = 0.$$

Le point $I$ est donc un point d'inflexion et la droite précédente est sa polaire harmonique.

Observons que les points $A$, $B$, $I$ sont en ligne droite.

L'équation de la conique $\Sigma$ est

$$\Sigma \equiv (x_2 - x_3)[a_2^2(x_1 - x_2) + a_3^2(x_3 - x_1)] + (a_2x_2 - a_3x_3)^2 = 0$$

et celle de la conique $\Sigma'$,

$$\Sigma' \equiv x_1(x_2 + x_3) - x_2x_3 = 0.$$

L'équation du faisceau de HALPHEN est donc

$$(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)\Sigma^2 + \lambda(x_2 - x_3)[a_2^2(x_1 - x_2) + a_2^2(x_3 - x_1)]\Sigma'^2 = 0$$

Les conditions $a_2 = a_3 + a_1$ et $a_3 = a_1 + a_2$ donnent deux faisceaux analogues de HALPHEN où le point $A$ occupe une autre position.

**3.** Reprenons le cas $a_1 = a_2 + a_3$. Lorsque $a_2$ et $a_3$ varient, la cubique $K$ décrit un faisceau et chaque fois, on a sur la courbe un point $A$ variable. Le lieu de ce point est la conique $\Sigma'$.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'* U. M. I.
*il 12 settembre 1969*

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna italy 1969