GODEAUX, LUCIEN
1968
Boll. U. M. I.
(4), N. 6, pp. 732-735

Impossibilité d'un certain faisceau de Halphen.

LUCIEN GODEAUX (Liége)

Sunto. - *Un fascio di Halphen di sestiche avente quattro tacnodi di cui le tangenti passino per il nono punto doppio, non può esistere.*

Dans ses recherches sur les plans doubles de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$, M. Campedelli a rencontré un plan double dont la courbe de diramation est du dixième ordre et se compose d'une sextique ayant quatre tacnodes dont les tangentes tacnodales passent par un point double pour la courbe et de ces quatre tangentes ([1]). Comme il le remarque, la courbe du sixième ordre, si elle existe, appartient à un faisceau de Halpen et il donne les conditions auxquelles elle doit satisfaire.

Reprenant la question, nous allons démontrer que la courbe du sixième ordre, supposée irréductible, ne peut exister. D'une manière précise, nous démontrons que:

Un faisceau de Halphen de sextiques ayant comme base quatre tacnodes dont les tangentes tacnodales passent par le neuvième point-base double, ne peut exister.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons la méthode élémentaire qui nous a permis d'établir l'existence des faisceaux de Halphen de sextiques, à savoir qu'en rapportons projectivement les cubiques passant par six points doubles aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique et qu'au faisceau de quadriques touchant la surface en trois points, correspondent des sextiques q'un faisceau de Halphen ([2]).

1. - Soit, si elle existe, K_6 une courbe du sixième ordre possédant quatre tacnodes (A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D') dont les

([1]) M. CAMPEDELLI, *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1° sem. 1932, pp. 358-362), *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine* (Idem, pp. 536-542).

([2]) *Sur les faisceaux de courbes planes du sixième ordre de Halphen* (Mathesis, 1925, pp. 154-157). Voir aussi notre *Introduction à la Géometrie supérieure* (Liége, 1946, pp. 125-126).

tangentes tacnodales passent par un point 0, double pour la courbe. Comme Campedelli l'a remarqué, la courbe K_6 fait partie d'un faisceau de Halphen dont les points-base occupent une situation spéciale.

Nous pouvons prendre arbitrairement trois des tacnodes (non en ligne droite) et le point 0. Nous prendrons les points B, C, D comme sommets du triangle de référence et 0 comme point unitaire. Dans ces conditions, considérons les cubiques Γ passant par les sommets du triangle de référence et y touchant les droites BO, CO, DO. Elles ont pour équation

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 x_1^2(x_2 - x_3) + \lambda_2 x_2^2(x_3 - x_1) + \lambda_3 x_3^2(x_1 - x_2) = 0.$$

Rapportons projectivement ces cubiques aux plans de l'espace, en posant

$$\frac{X_0}{x_1 x_2 x_3} = \frac{X_1}{x_1^2(x_2 - x_3)} = \frac{X_2}{x_2^2(x_3 - x_1)} = \frac{X_3}{x_3^2(x_1 - x_2)}.$$

Aux points du plan correspondent les points d'une surface cubique F d'équation

$$X_0^2(X_1 + X_2 + X_3) + X_1 X_2 X_3 = 0.$$

A la section de F par la quadrique

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{23}X_2X_3 + 2a_{31}X_3X_1 + 2a_{12}X_1X_2 + \\ + 2X_0(a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + a_{03}X_3) + a_{00}X_0^2 = 0$$

correspond la courbe du sixième ordre

$$a_{11}x_1^4(x_2 - x_3)^2 + a_{22}x_2^4(x_3 - x_1)^2 + a_{33}x_3^2(x_1 - x_2)^2 + \\ + 2a_{23}x_2^2x_3^2(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) + \dots + 2x_1x_2x_3[a_{21}x_1^2(x_2 - x_3) + \\ + \dots] + a_{00}(x_1x_2x_3)^2 = 0,$$

qui a des tacnodes en B, C, D, les tangentes tacnodales passant par O.

On observera que le plan tangent à F au point O_0 (1, 0, 0, 0) coupe la surface suivant trois droites qui correspondent aux tangentes tacnodales BO, CO, DO. Le point O_0 est donc un point de Eckardt et les sections de F par les plans passant par O_0 y ont un point d'inflexion.

2. - Soit K_3 une cubique Γ, irréductible, passant par O. Par ce point, on peut mener une quatrième tangente à la courbe ; soit A le point de contact.

A la courbe K_3 correspond sur F la section K_3' de cette surface par un plan ξ passant par O_0. Soit A_1 le point qui correspond à A.

A la courbe K_6 correspond une courbe K_6' section de F par une quadrique et cette courbe doit posséder un point double en O_0 et un tacnode en A_1. La section γ de cette quadrique par le plan ξ doit avoir un contact du troisième ordre en A_1 avec la courbe K_3' et toucher cette courbe en O_0.

Supposons que la conique γ existe et soient a la tangente à K_3' en A et p la tangente en O_0 à cette courbe. Soit en outre P le tangentiel de A sur K_3'. Dans le faisceau déterminé par la cubique K_3' et la cubique $2a+p$, il y a une courbe contenant la conique γ comme partie et complétée par la droite PO_0. Si la conique γ existe, la droite PO_0 touche K_3' en P et O_0 est le tangentiel de P.

Cette condition est nécessaire pour l'existence de γ et de K_6.

3. - Soit

$$a_1x_1^2(x_2-x_3)+a_2x_2^2(x_3-x_1)+a_3x_3^2(x_1-x_2)=0$$

l'équation de la courbe irréductible K_3. Le point A se trouve sur la polaire de O par rapport à cette courbe, c'est-à-dire sur la courbe

$$a_1x_1(x_2-x_3)+a_2x_2(x_3-x_1)+a_3x_3(x_1-x_2)=0.$$

Le point A a donc pour coordonnées a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 et le point A_1, $X_0=a_1a_2a_3$, $X_1=a_2a_3(a_3-a_2)$; $X_2=a_3a_1(a_1-a_3)$, $X_3=a_1a_2(a_2-a_1)$.

Le plan tangent à F en A_1 a pour équation

$$a_1a_2a_3X_0+a_3a_3(a_3-a_2)X_1+a_3a_1(a_1-a_3)X_2+a_1a_2(a_2-a_1)X_3=0 \tag{1}$$

et la droite a est l'intersection de ce plan et du plan ξ de K_3',

$$a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3=0. \tag{2}$$

La polaire du point O_0 par rapport à F a pour équation

$$X_0(X_1+X_2+X_3)=0.$$

Pour notre objet, la droite d'équations (1) et (2) doit rencontrer ce plan en un point de F, c'est-à-dire sur une des droites $X_0=X_1=0$, $X_0=X_2=0$, $X_0=X_3=0$. Supposons qu'elle rencontre la dernière. Cela exige $a_1=a_2$. Mais alors, la courbe K_3 contient comme partie la droite $x_2-x_1=0$ et est réductible, contrairement à l'hypothèse. On arrive à la même conclusion si a rencontre la première ou la seconde droite. Le faisceau de Halphen qui serait engendré par la courbe K_6 ne peut exister.

La courbe K_6 du plan double de Campedelli doit être dégénérée en deux cubiques.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 24 agosto 1968

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna italy 1968