ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. L, fasc. 4 - Aprile 1971

**Geometria.** — *Sur une configuration formée par trois suites de Laplace.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata [(*)] dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. – Costruzione di tre successioni di Laplace di cui l'una è inscritta nelle due altre e queste sono inscritte nella prima.

1. – Soit $(x)$ une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques $u, v$. Les points $U, V$ qui représentent les tangentes asymptotiques $xx_u, xx_v$ sur l'hyperquadrique $Q$ de Klein de $S_5$ se correspondent dans une transformation de Laplace (Bompiani, Tzitzeica). Soit

$$(L) \qquad \cdots, U^n, \cdots, U^1, U, V, V^1, \cdots, V^n, \cdots$$

la suite de Laplace à laquelle appartiennent $U, V$, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des $u$.

Rappelons [(1)] que la suite de Laplace est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique $Q$ et que les points $U^1, V^1$ ne peuvent appartenir à $Q$. Les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ sont conjugués par rapport à $Q$ et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique $\Phi_n$. On a ainsi une suite de quadriques $\Phi, \Phi_1, \cdots, \Phi_n, \cdots$ dont la première est la quadrique de Lie, deux quadriques consécutives se touchant en quatre points.

2. – Supposons que seul le point $U^n$ $(n > 1)$ en dehors des points $U, V$ appartienne à $Q$, la suite $L$ étant supposée illimitée dans les deux sens.

Les plans $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ et $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ sont distincts car autrement ils appartiendraient à $Q$ et leurs points appartiendraient également à $Q$ contrairement à l'hypothèse.

Le plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ coupe $Q$ suivant deux droites $r_1, r_2$ qui représentent deux faisceaux de rayons $(R_1, \rho_1)$ et $(R_2, \rho_2)$ dont les sommets appartiennent à la droite $r$ représentée par le point $U^n$.

La quadrique $\Phi_{n-1}$ dégénère en tant que quadrique-lieu dans le couple de plans $\rho_1, \rho_2$ et en tant que quadrique-enveloppe dans les gerbes de sommets $R_1, R_2$. Dans ces conditions, la section de $Q$ par le plan $Y^{n-1} Y^n Y^{n+1}$ doit dégénérer en deux droites représentant les faisceaux de rayons $(R_1, \rho_2)$ et $(R_2, \rho_1)$.

(*) Nella seduta del 17 aprile 1971.

(1) Nous avons exposé nos recherches sur cet objet dans *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires de l'Academie roy. de Belgique, 1964, t. XXXIV).

Désignons par $X$, $X'$ les points de recontre de la droite $Y^{n-1} Y^n$ avec $Q$ et par $Y$, $Y'$ ceux de la droite $Y^n Y^{n+1}$. Les droites projetant ces points du point $U^n$ appartiennent à $Q$. Nous supposerons que la section de $Q$ par le plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ est formée des droites $XY$ et $X' Y'$. Nous supposerons pour fixer les idées que la droite $XY$ représente le faisceau de rayons $(R_1, \rho_2)$ et la droite $X'Y'$ le faisceau $(R_2, \rho_1)$.

Le point $U^n$ est situé à l'intersection des droites $XY$ et $X'Y'$, il appartient donc au plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$, puisque la droite $r$ est commune aux plans $\rho_1, \rho_2$.

3. – Le point $U^n$ appartenant au plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$, le point $U^{n-1}$ appartient au plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$. On peut le voir par un raisonnement simple.

La droite $V^{n+1} U^n$ rencontre la droite $V^{n-1} V^n$ en un point A. Faisons varier $v$. A la droite $V^{n+1} U^n$ correspond la droite $V^{n+2} U^{n-1}$ et la droite $AA_v$ doit s'appuyer sur cette droite. D'autre part, elle doit s'appuyer sur la droite $V^n V^{n+1}$. Désignons par $A^1$ le point de rencontre des droites $AA_v$ et $V^{n+1} V^{n+2}$.

Faisons maintenant varier $u$. A la droite $V^{n+2} U^{n-1}$ correspond la droite $V^{n+1} U^n$ et au point $A^1$ nécessairement le point A. Il en résulte que les points $A$, $A^1$ sont transformés de Laplace l'un de l'autre et que $A^1$ appartient à la droite $V^{n+1} V^{n+2}$. Le point $U^{n-1}$ appartient donc au plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$.

On démontrerait de même que le points $U^{n+1}$ appartient au plan $V^n V^{n-1} V^{n-2}$.

D'une manière générale, on voit que les points $U^{n-2}, U^{n-3}, \cdots, U^{n-i}, \cdots$, appartiennent respectivement aux plans $V^{n+1} V^{n+2} V^{n+3}$, $V^{n+2} V^{n+3} V^{n+4}, \cdots$, $, \cdots, V^{n+i-1} V^{n+i} V^{n+i+1}, \cdots$. De même, le point $U^{n+i}$ appartient au plan $V^{n-i} V^{n-i+1} V^{n-i+2}$, à condition de remplacer $V^{-k}$ par $U^{k-1}$ si $k > 0$.

Appelons ligne brisée $L_1$ de Laplace le polygone formé par les segments de droites joignant deux points consécutifs de la suite L et polyèdre de Laplace $L_2$ à faces triangulaires l'ensemble des plans déterminés par trois points consécutifs de la suite L. On voit que: La ligne brisée $L_1$ est inscrite dans le polyèdre $L_2$.

4. – Considérons la droite $XY$ qui représente le faisceau de rayons $(R_1, \rho_2)$ et rencontre en X la droite $V^{n-1} V^n$ et en Y la droite $V^n V^{n+1}$. Elle passe de plus par $U^n$.

Faisons varier $u$. Au point X correspond un point de la droite $XX_u$ qui rencontre la droite $V^{n-1} V^{n-2}$ et au point Y, un point de la droite $YY_u$ qui rencontre la droite $V^n V^{n-1}$. A la droite $XY$ correspond une droite passant par le point $U^{n+1}$. Comme ce point se trouve dans le plan $V^{n-2} V^{n-1} V^n$ de même que la droite $XX_u$, la droite qui correspond à $XY$ est située dans ce plan. La droite $YY_u$ se trouve dans le plan tangent en Y à la surface (Y) et ce plan contient la droite $XY$. On en conclut que le point X est le transformé de Laplace de Y dans le sens des $u$.

On établit de même que le point Y est le transformé de Laplace de X dans le sens des $v$.

Les points X , Y étant transformés de Laplace l'un de l'autre, appartiennent à une suite de Laplace

$$(\mathrm{M}) \qquad \cdots, X^n, \cdots, X^1, X, Y, Y^1, \cdots, Y^n, \cdots$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des $v$. Cette suite est inscrite dans la suite L, le point $X^k$ appartenant à la droite $V^k V^{n-k}$ et le point $Y^k$ à la droite $V^{n-k} V^{n-k-1}$, à condition de remplacer $V^{n-k}$ par $U^{k-n-1}$ si $k > n$.

En partant des points X′, Y′, on obtiendrait de même une suite de Laplace M′ inscrite dans la suite L.

Observons que la droite $XX_u$ rencontre la droite $V^{n-1} V^{n-2}$ au point $X^1$ et que la droite $XX^1$ passe par $U^{n+1}$. De même, le point $U^{n-1}$ appartient à la droite $YY^1$. La suite de Laplace L est donc inscrite dans la suite M et de même dans la suite M′.

*Les suites* M , M′ *sont inscrites dans la suite* L *et celle-ci est à son tour inscrite dans chacune des suites* M , M′.

5. – La droite XY représente le faisceau des tangentes au point $R_1$ à la surface $(R_1)$. D'une manière précise, si au lieu de $R_1$ nous écrivons $R^1$, le point X représente la tangente $R^1R^1_v$ et le point Y la tangente $R^1R^1_u$.

Les quadriques $\Phi_{n-2}$ , $\Phi_n$ se touchent au point $R^1$, le plan tangent commun étant $\rho_2$. Elle se touchent de même au point $R^2 = R_2$.

La suite de Laplace M est l'analogue de la suite L, mais attachée au point $R^1$ à la surface $(R^1)$.

Remarquons que le point $X^k$ appartient à la droite $U^{n-k} U^{n-k-1}$, par conséquent le point $X^n$ appartient à la droite UV et par suite à l'hyperquadrique Q comme le point $U^n$. Il y a donc une parfaite analogie entre la suite L et la suite M, et de même avec la suite M′.

La suite M est comme la suite L autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Il en résulte que le plan $Y^{n-1} Y^n Y^{n+1}$ coupe Q suivant deux droites qui jouent un rôle analogue à celui des droites XY et X′ Y′. Il existe donc une suite de Laplace N inscrite et circonscrite à la suite M. Et ainsi de suite.

ROMA, 1971 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei