Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
*Tome 23, N° 6, 1970*

*MATHÉMATIQUES*
*Géometrie*

# SURFACE ALGEBRIQUE DONT LE SYSTEME CANONIQUE APPARTIENT A UNE INVOLUTION

**L. Godeaux**

*(Présentée par L. Ilieff, membre de l'Académie le 6. II. 1970)*

On connait peu de surfaces dont le système canonique appartient à une involution, c'est-à-dire dont les courbes canoniques passant par un point passent en conséquence par d'autres points. Dans cette note, nous construisons une surface répondant à cette condition en utilisant la théorie des involutions cycliques que nous avons crée autrefois [1].

1. Considérons l'homographie biaxiale $H$ de période trois d'équations

$$x_1' : x_2' : y_1' : y_2' = x_1 : x_2 : \varepsilon y_1 : \varepsilon y_2,$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive cubique de l'unité.

Si $f_1(x_1, x_2)$ est une forme algébrique de degré six, $f_2(y_1, y_2)$ une forme algébrique de degré six également et $f_3(x_1, x_2; y_1, y_2)$ une forme algébrique de degré trois en $x_1, x_2$ dont les coefficients sont des formes de degré trois en $y_1, y_2$, l'équation

$$f_1(x_1, x_2) + f_2(y_1, y_2) + f_3(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0$$

représente une surface $F$ du sixième ordre transformée en elle-même par $H$. Sur la surface, $H$ engendre une involution $I$ du troişième ordre possédant 12 points unis: six sur chacune des axes de $H$.

Pour obtenir une image de $I$, posons

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = x_1^3,\ x_1^2,\ x_2 : x_1 x_2^2 : x_2^3 : y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1 y_2^2\ \ y_2^3 \tag{1}$$

et interprétons ces quantités comme coordonnées des points d'une espace $S_7$ à sept dimensions. De la sorte, à un hyperplan de $S_7$ correspond une surface cubique invariante pour $H$ ne passant pas par les axes de cette homographie.

Des équations (1) on tire

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{matrix} \right\| = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{2}$$

et d'autre part $f_1$ donne une forme quadratique $F_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$, $f_2$ une forme quadratique $F_2(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ et $f_3$ une forme bilinéaire $F_3(X_1, X_2, X_3, X_4; Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$.

Les équations de la surface $F'$ image de l'involution $I$ sont donc les équations (2) et

$$F_1(X)+F_2(Y)+F_3(X, Y)=0. \tag{3}$$

Dans l'espace $\Sigma_1$ d'équations $Y_1=Y_2=Y_3=Y_4=0$, les premières des équations (2) représentent une cubique gauche $K_1$ et dans l'espace $\Sigma_2$ d'équations $X_1=X_2=X_3=X_4=0$, la seconde une cubique gauche $K_2$. Simultanées, ces équations représentent la variété $W$ à trois dimensions, d'ordre neuf, lieu des droites de $S_7$ s'appuyant sur $K_1$ et $K_2$. L'hyperquadrique (3) coupe $W$ suivant la surface $F'$ image de l'involution $I$. L'hyperquadrique (3) coupe $K_1$ et $K_2$ suivant des points qui sont triples pour la surface $F'$. Celle-ci, d'ordre 18, possède donc 12 points triples, de diramation pour la correspondance (1,3) entre $F'$ et $F$, conformement à la théorie.

2. Aux courbes canoniques $C'$ de $F'$ correspondent sur $F$ des courbes canoniques $C$ appartenant à l'involution $I$. D'autre part, nous avons établi que les courbes $C'$ doivent passer simplement par les points de diramation de $F'$. Les courbes canoniques de $F$ étant découpées par des quadriques, il en résulte que les courbes $C$ sont découpées sur $F$ par les quadriques

$$\lambda_{11}x_1y_1+\lambda_{12}x_1y_2+\lambda_{21}x_2y_1+\lambda_{22}x_2y_2=0, \tag{4}$$

En élevant les deux membres de cette équation au cube, nous obtenons

$$\lambda_{11}^3X_1Y_1+3\lambda_{11}^2\lambda_{12}X_1Y_2+\cdots+\lambda_{22}^3X_4Y_4=0. \tag{5}$$

D'après la théorie des involutions, cette hyperquadrique oscule la surface $F'$ le long d'une courbe canonique $C'$ de cette surface. L'hyperquadrique (5) passe par les cubiques gauches $K_1$ et $K_2$ donc par les 12 points de diramation de $F'$. Le système $|C'|$ a le degré 8, donc $F'$ a le genre linéaire 9 et d'autre part le genre arithmétique $p_a'=4$. D'après la théorie, entre le genre arithmétique $p_a=10$ de $F$ et celui $p_a'=4$ de $F'$, on doit avoir la relation.

$$12(p_a+1)=3.12(p_a'+1)-4.12,$$

ce qui est une identité.

3. Les conclusions précédentes subsistent lorsque dans l'équation de $F$, le terme $f_3$ vient à manquer, c'est-à-dire lorsque l'équation de $F$ se réduit à $f_1+f_2=0$.

Dans ces conditions, l'équation de $F$ et celles des quadriques (4) sont transformées en elles-mêmes par l'homographie biaxiale harmonique $H'$ d'équations

$$x_1':x_2':y_1':y_2=x_1:x_2:-y_1:-y_2;$$

de mêmes axes que l'homographie $H$.

A l'homographie $H'$ correspond dans $S_7$ l'homographie biaxiale harmonique

$$X_i':Y_k'=X_i:-Y_k, \quad (i=1, 2, 3, 4; k=1, 2, 3, 4)$$

qui transforme en elles-mêmes les équations de la surface $F_1$ et des hyperquadriques (5). Le système canonique $|C'|$ de $F'$ est donc composé au moyen de l'involution du second ordre engendré par cette homographie.

Le système canonique de la surface représentée par les équations (2) et

$$F_1(X_1, X_2, X_3, X_4)+F_2(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)=0$$

appartient à une involution du second ordre.

*37, quai Orban, 4 000 — Liège*
*Belgique*

## BIBLIOGRAPHIE

L. Godeaux. Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications (Monografie matematiche del Consiglio nazionale delle Ricerche, Roma, Cremonese, 1963).