A mon ami C. G. VRANCEANU,
à l'occasion de son 70e anniversaire

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES PRIVÉES DE VARIÉTÉ CANONIQUE MAIS POSSÉDANT UNE INFINITÉ DE VARIÉTÉS BICANONIQUES

PAR

LUCIEN GODEAUX

Liège, Belgique

Construction d'une variété algébrique à $p-3$ dimensions dépourvue de variété canonique mais possédant un système bicanonique de dimension $\nu-1$, $p=2\nu+1$ étant un nombre premier supérieur à trois.

La question de la détermination des surfaces algébriques non rationnelles dépourvues de courbes canoniques est née le jour où Castelnuovo établit les conditions de rationalité d'une surface algébrique ($p_a = P_2 = 0$). Elle a suscité de nombreux travaux sans qu'elle soit cependant complètement résolue [1]. Dans des publications récentes, nous avons étudié cette question lorsque la surface est remplacée par une variété algébrique ayant un nombre quelconque de dimensions. Nous avons construit des variétés algébriques complètement régulières dépourvues de variété canonique mais possédant soit une variété bicanonique d'ordre zéro, soit un système bicanonique infini [2] —[5]. Dans cette note, nous nous proposons de revenir sur ce dernier point en en présentant une démonstration plus naturelle basée sur un théorème récemment obtenu [6]. Précisément, nous établirons le théorème suivant :

Si $p = 2\nu + 1$ est un nombre premier supérieur à trois, il existe une variété algébrique à $p - 3$ dimensions privée de variété canonique mais possédant un système bicanonique de dimension $\nu - 1$.

Nous déterminons également le système tricanonique et donnons quelques propriétés de la variété obtenue.

Pour $p = 5$, on retrouve un théorème que nous avons établi antérieurement par la construction d'une surface du septième ordre de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$ [7], [8], mais les procédés de démonstration sont différents.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XV, No 9, P. 1389–1394, BUCAREST, 1970

1. Soient $p = 2\nu + 1$ un nombre premier supérieur à trois et H une homographie cyclique de période p d'un espace S_{p-2} à $p-2$ dimensions, n'ayant comme points unis que les sommets de la pyramide de référence. Les équations de H peuvent s'écrire

$$\rho x'_i = \varepsilon^i x_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-2)$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Considérons dans S_{p-2} une hypersurface V d'ordre p transformée en elle-même par H et ne passant pas par les sommets de la figure de référence. Son équation peut s'écrire

$$a_0 x_0^p + a_1 x_1^p + \cdots + a_{p-2} x_{p-2}^p + \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{p-2}) = 0$$

où φ est un polynôme d'ordre p tel que

$$\varphi(x'_0, x'_1, \ldots, x'_{p-2}) \equiv \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{p-2})$$

dont l'expression ne nous sera pas utile.

Sur l'hypersurface V, l'homographie H engendre une involution I cyclique d'ordre p ne présentant aucun point uni. Nous désignerons par Ω la variété à $p-3$ dimensions image de cette involution.

Les variétés canoniques de V sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $p - (p-1) = 1$, c'est-à-dire par les hyperplans.

Le système canonique de V coïncide avec le système $|F|$ de ses sections hyperplanes.

Le système $|F|$ contient $p-2$ variétés appartenant à l'involution I; elles sont découpées par les hyperplans $x_0 = 0, x_1 = 0, \ldots, x_{p-2} = 0$. Nous les désignerons respectivement par $F_0, F_1, \ldots, F_{p-2}$.

2. L'adjoint $|F'|$ à $|F|$, c'est-à-dire le système bicanonique de V, est découpé par les hyperquadriques de S_{p-2}. Le système bicanonique $|2F|$ contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. L'un de ces systèmes est par exemple

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_2 x_{p-2} + \cdots + \lambda_{i-1} x_i x_{p-i} + \cdots + \lambda_{\nu-1} x_\nu x_{\nu+1} = 0$$

On remarquera que x_1 ne figure pas dans cette équation.

Nous désignerons par $|F'_1|, |F'_2|, \ldots, |F'_{p-2}|, |F'_0|$ les systèmes linéaires partiels compris dans $|2F|$ découpés par les hyperquadriques dont l'équation se reproduit multipliée respectivement par $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-2}$, lorsque l'on effectue H. Remarquons que le système $|F'_{2i}|$ contient la variété $2F_{\nu+i}$ et que le système $|F'_{2i+1}|$ contient la variété $2F_i$.

Le système que nous désignerons par $|F'_{p-1}|$ est découpé par les hyperquadriques

(1) $$\lambda_0 x_0 x_{p-2} + \lambda_1 x_1 x_{p-3} + \cdots + \lambda_i x_i x_{p-2-i} + \cdots + \lambda_{\nu-1} x_{\nu-1} x_\nu = 0.$$

Observons que $p-1$ de ces systèmes contiennent une variété comprenant comme partie une section hyperplane $F_0, F_1, \ldots, F_{p-2}$ mais que le dernier de ces systèmes ne contient pas cette variété. Par exemple, le système $|F'_0|$ ne contient pas une variété comprenant F_0.

3. Nous désignerons par $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-2}$ les variétés à $p-4$ dimensions qui correspondent sur Ω aux variétés $F_0, F_1, \dots, F_{p-2}$.

Envisageons la variété F_0. Sur celle-ci le système canonique est découpé par les hyperquadriques de l'espace $x_0 = 0$. Il contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I,

$$|(F_0, F'_0)|, \ |(F_0, F'_1)|, \dots, |(F_0, F'_{p-2})|.$$

Le premier de ces systèmes a la dimension $\nu - 1$, les autres ont la dimension $\nu - 2$, car ils contiennent une variété comprenant F_0 comme partie. Nous avons démontré [5] que $p-4$ étant impair, le système canonique de Φ_0 a pour homologue sur F_0 celui des systèmes canoniques composés avec I qui a la plus grande dimension. Le système adjoint à Φ_0 est donc le système $|\Phi'_0|$ qui correspond sur Ω au système $|F'_0|$. Mais ce système ne peut contenir Φ_0 comme composante d'une de ses variétés, donc

La variété Ω est dépourvue de variété canonique.

Si nous désignons par $|\Phi'_1|, |\Phi'_2|, \dots, |\Phi'_{p-2}|$ les systèmes qui correspondent sur Ω aux systèmes $|F'_1|, |F'_2|, \dots, |F'_{p-2}|$, on démontre de même qu'ils sont les adjoints respectivement aux variétés $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \dots, \Phi_{p-2}$.

Par contre, au système $|F'_{p-1}|$ correspond sur Ω un système que nous désignerons par $|K_2|$ qui n'est l'adjoint d'aucune variété de Ω.

4. Nous avons d'après ce qui précède

$$|\Phi'_0| = |\Phi_1 + \Phi_{p-2}|, \ |\Phi'_1| = |2\,\Phi_0|,$$

donc

$$|\Phi''_0| = |2\,\Phi_0 + \Phi_{p-2}|, \ |\Phi''_0 - \Phi_0| = |\Phi_0 + \Phi_{p-2}| = |K_2|.$$

La variété Ω possède donc un système bicanonique $|K_2|$ de dimension $\nu-1$.

Le bigenre de la variété Ω est $P_2 = \nu$.

Chacune des variétés $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{p-2}$ est de genre géométrique $p_g = \nu$.

Le système $|F'_{p-1}|$ qui correspond sur V au système $|K_2|$ de Ω est découpé sur cette hypersurface par les hyperquadriques (1). Le système de ces hyperquadriques a pour base un ensemble d'espaces linéaires à $\nu - 1$ dimensions que l'on obtient de la manière suivante :

Les équations $x_0 = x_1 = \dots = x_{\nu-1} = 0$ représentent dans S_{p-2} un espace σ_1 à $\nu - 1$ dimensions et les équations $x_{p-2} = x_{p-3} = \dots = x_\nu = 0$ représentent un espace σ_2 à $\nu - 1$ dimensions. Les hyperquadriques (1) passent par ces deux espaces.

Si l'on considère h points de σ et $\nu - h$ points de σ_2 choisis de telle sorte que l'équation (1) soit vérifiée, ils déterminent un espace à $\nu - 1$ dimensions qui fait partie de la base de (1). Il y a $2^\nu - 2$ de ces espaces.

Un espace à $\nu - 1$ dimensions coupe la variété V suivant une variété à $\nu - 2$ dimensions à laquelle correspond sur Ω une variété à $\nu - 2$ dimensions. Si nous désignons par ω_1, ω_2 les variétés qui correspondent aux sections de V par σ_1, σ_2, on voit que :

La base du système bicanonique de Ω *est formé de* 2^ν *variétés à* $\nu - 2$ *dimensions : les variétés* ω_1 *et* ω_2, *et* $2^\nu - 2$ *variétés s'appuyan t sur les deux premières.*

5. Désignons par $|\Phi_0''|$, $|\Phi_1''|$, ..., $|\Phi_{p-2}''|$, $|K_2'|$ les systèmes adjoints aux systèmes $|\Phi_0'|$, $|\Phi_1'|$, ..., $|\Phi_{p-1}'|$, $|K_2|$. Il leur correspond sur V des systèmes $|F_0''|$, $|F_1''|$, ..., $|F_{p-2}''|$, $|F_{p-1}''|$ qui appartiennent au système adjoint à $|F'|$, c'est-à-dire au système tricanonique de V.

Sur une variété F_0', les systèmes précédents découpent p systèmes linéaires appartenant à un système canonique de cette variété F_0' et d'autre part à l'involution I. Un de ces systèmes, qui correspond au système canonique $|(\Phi_0', \Phi_0'')|$ de la variété Φ_0' homologue de F_0' a une certaine dimension r et les autres ont la dimension $r - 1$ [6]. Le même raisonnement peut être repris pour les variétés F_1', F_2', ..., F_{p-1}' et l'on voit que les systèmes $|F_1''|$, $|F_2''|$, ..., $|F_{p-1}''|$ ont la même dimension r. D'après la théorie des homographies, on a

$$pr + p = \frac{2}{3} \nu (\nu + 1) (2\nu + 1)$$

d'où $r = \dfrac{2}{3} \nu (\nu - 1) - 1$*.

Ainsi, les systèmes $|\Phi_0''|$, $|\Phi_1''|$, ..., $|\Phi_{p-2}''|$, $|K_2'|$ ont la même dimension r. Or, $|K_2'|$ est le système tricanonique $|K_3|$ de Ω, donc

Le trigenre de la variété Ω *est* $P_3 = 2\nu (\nu + 1) : 3$.

On a

$$|K_3| = |K_2'| = |\Phi_0' + \Phi_{p-2}| = |\Phi_{1+2}{}^{+2} \quad \Phi_{p-2}|$$

donc au système tricanonique $|K_3|$ de Ω correspond sur V le système $|F_{p-3}''|$ découpé par les hypersurfaces cubiques dont l'équation se reproduit multipliée par ε^{p-3} lorsque l'on effectue H.

6. Pour déterminer la base du système tricanonique $|K_3|$, représentons par

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_{p-2} = 0, f_0 = 0$$

* Si p est premier, $\nu (\nu + 1)$ est multiple de 3. En effet, s'il en était autrement, ν serait de la forme $3t + 1$ et p serait divisible par 3.

les équations des systèmes d'hyperquadriques découpant sur V respectivement les systèmes $|F'_1|$, $|F'_2|$, $\ldots$, $|F'_{p-2}|$, $|F'_0|$. L'équation

$$(2) \qquad x_{p-3}f_1 + x_{p-4}f_2 + \cdots + x_0 f_{p-2} + x_{p-2}f_0 = 0$$

contient le système de toutes les hypersurfaces cubiques dont l'équation se reproduit multipliée par ε^{p-3} lorsque l'on effectue H. L'équation (2) contient $(p-1)\nu$ termes alors que $|F''_{p-3}|$ est découpé par des hypersurfaces cubiques contenant $2\nu(\nu+1):3$ termes. Il y a donc dans l'équation (2) des termes qui figurent deux fois.

Observons que f_0 ne contient pas de terme en x_0, mais que tous les autres termes de l'équation (2) contiennent x_0. Si nous posons $x_0 = x_{p-2} = 0$, l'équation (2) ne sera pas satisfaite si p est supérieur à cinq. On peut en conclure que si p est supérieur à cinq, le système tricanonique $|K_3|$ est dépourvu de points-base.

Dans le cas $p = 5$, il est facile de voir que l'équation (2) est vérifiée par $x_0 = x_3 = 0$ et par $x_1 = x_2 = 0$. Dans ce cas, le système tricanonique de Ω a deux points-base.

Le système tricanonique de la variété Ω est dépourvu de points-base, sauf si $p = 5$, auquel cas il a deux points-base.

7. Un raisonnement bien connu montre qu'à une variété F de V correspond sur Ω une variété Φ qui est également l'homologue des variétés F transformées par H de la première. La variété Φ appartient à un système linéaire $|\Phi|$. Lorsque la variété F tend vers une variété F_i, la variété Φ tend vers la variété Φ_i comptée p fois. On en déduit que l'on a

$$p\,\Phi_0 \equiv p\,\Phi_1 \equiv \cdots \equiv p\,\Phi_{p-2}$$

et *la variété Ω a* par conséquent *le diviseur de Severi égal à p.*

On démontre que l'on a de même

$$|p\Phi'_0| = |p\Phi'_1| = \cdots = |p\Phi'_{p-2}| = |pK_2|$$

et

$$|p\Phi''_0| = |p\Phi''_1| = \cdots = |p\Phi''_{p-2}| = |pK_3|.$$

8. Considérons dans S_{p-2} l'homographie biaxiale harmonique d'équations

$$\rho x'_i = x_{p-2-i}, \quad (i = 0, 1, \ldots, p-2).$$

En général, elle ne transforme pas en soi la variété V, mais elle fait correspondre à la section hyperplane F_i la section hyperplane F_{p-2-i}. Il lui correspond sur Ω une correspondance H' entre les variétés Φ_0, Φ_1, $\ldots$, Φ_{p-2}. Au système $|\Phi'_i|$ correspond le système $|\Phi'_{p-2-i}|$. En particulier, le système $|K_2|$ est son propre correspondant.

On trouve de même qu'au système $|\Phi_i''|$ correspond le système $|\Phi_{p-3-i}''|$. Il en résulte que le système tricanonique $|K_3|$ est son propre correspondant.

Cette correspondance H' pourrait être étendue aux systèmes pluricanoniques de Ω.

Reçu le 24 mars 1970

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Godeaux, *Surfaces non rationnelles de genres arithmétique, géométrique nuls.* Mém. Soc. Sc. Arts et Lettres du Hainant, 1969, 209–224.
2. — *Variétés algébriques privées de variété canonique.* Bull. Acad. Roy. Belg., 1963, 1045–1051.
3. — *Variétés algébriques dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique.* Bull. Acad. Roy. Belg., 1968, 915–926.
4. — *Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques.* Bull. Acad. Roy. Belg., 1968, 1401–1409.
5. — *Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques.* Bull. Acad. Roy. Belg., 1969, 1034–1039.
6. — *Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique complètement régulière.* Bull. Acad. Roy. Belg., 1968, 618–626.
7. — *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux.* Rend. Accad. Lincei, 2e sem., 1931, 479–481.
8. — *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux.* Bull. Acad. Roy. Belg., 1932, 26–37.