BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Lucien Godeaux

Sulle superficie associate ad una successione di Laplace chiusa.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **15** (1960), n.2, p. 159–161.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1960_3_15_2_159_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1960.

Sulle superficie associate ad una successione di Laplace chiusa [1].

Nota di LUCIEN GODEAUX (a Liegi)

Sunto. - *Si dimostra che una superficie associata ad una sncccessione di* LAPLACE *chiusa è falda focale di due congruenze W.*

Résumé. - *On démontre qu'une surface associée à une suite de* LEPLACE *terminée est nappe focale de deux congruences W.*

Consideriamo una superficie (x), non rigata, di cui le asintotiche sono u $(dv = 0)$ e v $(du = 0)$. Diciamo U, V i punti della iperquadrica Q di KLEIN, di S_5, che rappresentano le tangenti alle asintotiche u, v in un punto x di (x). Fra questi punti abbiamo, colle notazioni del nostro opuscolo *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* [2],

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0,$$

dove a, b sono funzioni non nulle di u, v.

I punti U, V appartengono ad una successione di LAPLACE

$$(L) \qquad \dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n \dots,$$

dove ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

Supponiamo che la successione di LAPLACE L si chiude nel punto U_n, presentante il caso di LAPLACE. Le tangenti alle curve v nei punti di una curva u sulla superficie (U_{n-1}) passano per un punto U_n che non dipende da u. Si ha

$$h_n = -(\log. bh)_1 h_2 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1} = 0,$$

dove $h_1 = -(\log. b)^{11} + 4ab$, $h_2 = -(\log. bh_1)^{11} + h_1, \dots$.

Supponiamo inoltre che la curva (U_n) descritta dal punto U_n quando varia v non appartiene ad un iperpiano. Allora, il punto V_{n+2}, polo del iperpiano $U_n U_n^{01} U_n^{02} U_n^{03} U_n^{04}$ osculatore alla curva (U_n)

(1) Sunto di una conferenza fatta nell'Istituto di Geometria « LUIGI CREMONA » a Bologna, il 30 maggio 1960. Un lavoro più esteso sarà pubblicato in uno dei Volumi degli *Annali di Matematica* dedicati al Prof. E. BOMPIANI.

(2) Paris, Hermann, 1935,

non dipende da u e la successione L si chiude nel punto V_{n+2} presentante il caso di GOURSAT. La sviluppabile luogo delle tangenti alla curva (V_{n+2}) non è altra che la superficie (V_{n+1}). Quando varia u, il punto V_{n+1} descrive una di queste tangenti.

Supponiamo (caso generale) che la retta $V_{n+1}V_{n+2}$ taglia Q in due punti distinti di V_{n+1}, V_{n+2}. Diciamo G uno di questi punti.

L'iperpiano coniugato di G rispetto all'iperquadrica Q contiene i punti U_n, U_n^{01}, U_n^{02}, U_n^{03} ed evidentemente G.

Possiamo scrivere

$$V_{n+2}^{10} + A\,V_{n+2} = 0,\ G = V_{n+2} + \lambda V_{n+1}.$$

Ne deduciamo che il punto G^{10} appartiene alla retta $V_{n+1}V_{n+2}$, Dunque, l'iperpiano coniugato di G^{10} contiene i punti U_n, U_n^{01}. U_n^{02}, U_n^{03} ed anche il punto G, perchè la retta GG^{10} tocca Q nel punto G. I punti G, G^{10} coincidono ed il punto G non dipende da u.

Diciamo G_1 il punto dove la retta GG^{01} taglia la retta V_nV_{n+1}. L'iperpiano coniugato di G_1 passa per i punti U_{n-1}, U_n e quindi questo punto dipende da u e da v.

Sia $\Omega(p,\ q) = 0$ la condizione perchè due punti p, q siano coniugati rispetto alla iperquadrica Q. Questa ha per equazione $\Omega(p, q) = 0$.

Abbiamo

$$G_1 = G^{01} + tG,$$

dunque $\Omega(G,\ G_1) = 0$ e possiamo scrivere

$$G_1 = V_{n+1}\Omega(V_n,\ G - V_n\Omega(V_{n+1},\ G).$$

Si vede allora che la retta $G_1G_1{}^{10}$ passa per il punto

$$V_{n+2}\Omega(V_{n+1},\ G) - V_{n+1}\Omega(V_{n+2},\ G) \equiv G.$$

Ne concludiamo che il punto G_1 descrive una rete $(u,\ v)$ ed appartiene ad una successione di LAPLACE (G) iscritta nella successione L. I successivi trasformati del punto G_1 nel senso delle v appartengono alle rette V_nV_{n-1}, $V_{n-1}V_{n-2}$, ... Diciamo J quello di questi punti che appartiene alla retta UV. Possiamo scrivere

$$J = \lambda U - \mu V,$$

con

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0,\ \mu^{10} + 2b\lambda = 0.$$

Diciamo J_1, J_2, ... i trasformati di LAPLACE di J nel senso delle v e J_{-1}, J_{-3}, ... quelli nel senso delle u. Abbiamo $J_{-n-1} = G$, $J_{-n-2} = G$.

Consideriamo uno spazio S_6 contenente S_5 ed in questo spazio il punto U' di cui le coordinate omogenee sono qnelle di U e μ ed il punto V' di cui le coordinate sono quelle di V e λ. Abbiamo

$$U'^{10} + 2bV' = 0, \quad V'^{01} + 2aU' = 0,$$

dunque questi punti appartengono ad una successione di LAPLACE L' analoga a L e cogli stessi invarianti.

Abbiamo $h_n = 0$, dunque la successione L' si chiude nel punto U'_n presentante il caso di LAPLACE.

Ne risulta che la successione (G) si chiude nel punto J_{n+1} presentante anche il caso di LAPLACE, essendo il punto J_{n+1} intersezione delle rette $U_n U_n^{01}$, $U'_n U'^{01}_n$.

Notiamo $(\bar{x})$ la seconda falda focale della congruenza (j), dove j è la retta rappresentata sopra Q dal punto J. Sia $\bar{L}$ la successione di LAPLACE associata alla superficie $(\bar{x})$. Si vede facilmente che L si chiude nel punto $\bar{U}_n$ presentante il caso di LAPLACE e nel punto $\bar{V}_{n+2}$ presentante il caso di GOURSAT o il caso misto.

Supponiamo adesso $n = 1$. Allora le asintotiche u della superficie (x) appartengono a complessi lineari. Diciamo Σ questi complessi.

La retta coniugata dello spazio $U_1 U_1^{01} U_1^{02} U_1^{03}$ osculatore alla curva (U_1) in un punto U_1 è $V_2 V_3$, quindi, quattro complessi Σ infinitamente vicini hanno in comune due rette g, g' di cui le immagini su Q sono i punti G, G' intersezioni di $V_2 V_3$ con Q. Quando varia v, queste rette generano due rigate R, R' che hanno per immagine su Q le curve (G), (G').

Consideriamo lo spazio $G J_{-2} J_{-1} J$ osculatore alla curva (G) in in punto G. La sezione di Q con questo spazio è una quadrica che rappresenta una congruenza bilineare di cui le direttrici r_1, r_2 sono rappresentate dalle sezioni di Q con la retta coniugata di questo spazio. Le rette r_1, r_2 sono la tangente flecnodale della rigata R di cui i punti di contatto sono sulla retta g.

Quando varia u, la retta g e le rette r_1, r_2 non variano, ma il punto x descrive una asintotiche u sopra (x).

Dunque, se noi consideriamo sopra la superficie (x) una asintotica u e la retta g corrispondente allo stesso valore di v, le rette appoggiate sulla curva u e sulla tangente flecnodale della rigata R di cui i punti di contatto sono sulla retta g, generano, quando varia v, una congruenza W di cui (x) è una falda focale.

Colla considerazione della rigata R', si è condotti ad una seconda congruenza W di cui (x) è falda focale.