Hommage au Professeur
G. CĂLUGĂREANU

UN POINT DE DIRAMATION D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUE MULTIPLE EN LEQUEL LE CÔNE TANGENT SE SCINDE EN QUATRE PARTIES

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liège, Belgique)

Etude d'un point de diramation d'une surface multiple d'ordre premier en lequel le cône tangent est formé de trois plans et d'un cône du second ordre.
Dans nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, nous avons démontré qu'en un point de diramation de la surface représentant cette involution, le cône tangent est irréductible et rationnel, ou bien ce cône se scinde en deux, trois ou quatre parties, cônes rationnels [1]. Dans cette note, nous considérons un cas où le cône tangent au point de diramation se scinde en trois plans et un cône quadratique. A vrai dire, nous avons déjà considéré ce cas dans une note antérieure [2], mais nous avons repris la question en la complétant par quelques propriétés nouvelles. L'intérêt de cette question est que l'ordre de l'involution étant peu élevé, on peut déterminer d'une manière complète la structure du point de diramation considéré.

1. Soit F une surface algébrique d'un espace S_r à r dimensions ansformée en soi par une homographie H de période 31 possédant 31 es ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{30}$ dont un seul, σ_0, rencontre la surface F, en nombre fini de points. Sur F, H engendre une involution I, cyclique, ayant qu'un nombre fini de points unis : les points de rencontre de et de F. Nous désignerons par C les sections de F par les hyperplans ssant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{30}$. Le système $|C|$ est privé de points-base et partient à l'involution I.

Si r_0 est la dimension de σ_0, en rapportant projectivement les courbes aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions, il correspond à F une surface image de l'involution I en ce sens qu'à un point de Φ correspond un oupe de I. Aux points unis de I correspondent sur Φ les points de dira- ation de cette surface. Ces points sont isolés. Nous désignerons par n rdre de Φ et par Γ les sections hyperplanes de Φ. Le système $|C|$ a degré 31n.

. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XVII, Nº 9, P. 1335–1340, BUCAREST, 1972

Soient 0 un point uni de I, $0'$ le point de diramation correspondan sur Φ. Le plan tangent à F en 0 est uni pour H. Si x_0, x_1, x_2 sont le coordonnées des points de ce plan et $x_1 = x_2 = 0$ celles du point 0, H déte mine dans ce plan l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^{18} x_2,$$

ε étant une racine primitive d'ordre 31 de l'unité. En posant $\eta = \varepsilon^1$ l'homographie précédente peut aussi être représentée par

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \eta^{19} x_1 : \eta x_2 .$$

Dans le domaine du premier ordre de 0, il y a deux points unis situé sur des tangentes a et b à F en 0. Nous désignerons par $(\alpha, 1)$ le point un situé sur a et infiniment voisin de 0 et par $(\beta, 1)$ le point analogue situ sur b.

Au point 0 sont attachés les nombres $\alpha = 18$, $\beta = 19$.

2. Les courbes C passant par 0 acquièrent en ce point une certain multiplicité et ont des tangentes confondues avec a et b, ou en parti variables si la multiplicité atteint au moins 31. Nous désignerons pa $C^1, C^2, \ldots, C^{15}$ les courbes C pour lesquelles le système $|C^i|$ est dédu du système $|C^{i-1}|$ en imposant aux courbes C^{i-1} d'avoir en 0 une tangent distincte de a, b.

Les courbes C^i ont en A λ_i tangentes confondues avec a et μ_i ave b, les nombres λ_i, μ_i satisfaisant aux congruences équivalentes

$$\lambda + 18\mu \equiv 0, \quad \mu + 19\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 31) \qquad (\text{1}$$

Nous désignerons par Γ^i les courbes qui correspondent sur Φ au courbes C^i et par Φ_i la surface, projection de Φ, dont les sections hype planes sont les courbes Γ^i.

D'après leur construction, les multiplicités en 0 des courbes C^i vo en croissant avec i.

3. Considérons les courbes C^1 qui correspondent aux valeurs $\lambda_1 = 3$ $\mu_1 = 5$. Ces courbes ont donc en 0 un point octuple et 3 tangentes confo dues avec a, 5 avec b.

Sur une courbe C^1, le point 0 est l'origine de deux branches linéaire Nous désignerons par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 17)$ les points infiniment voisins succe sifs de $(\alpha, 1)$ appartenant à toutes les courbes C^1 et à la première branch par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 18)$ les points possédant les mêmes propriétés et appa tenant à la seconde branche.

Nous avons démontré que ces points sont unis de seconde espèce sauf les derniers $(\alpha, 17)$ et $(\beta, 18)$, qui sont unis de première espèc c'est-à-dire que dans leurs domaines du premier ordre, tous les poin sont unis. Nous appellerons A la première suite et B la seconde.

Le point (α, i), où $i < 17$ étant uni de seconde espèce possède da son domaine du premier ordre deux points unis. L'un est le point $(\alpha, i + 1$ l'autre sera désigné par $(\alpha, i, 1)$. Si ce point est à son tour uni de secon espèce, les deux points unis qu'il possède dans son domaine du premi ordre seront désignés par $(\alpha, i, 2)$ et par $(\alpha, i, 1, 1)$. Et, ainsi de suite, nous utiliserons les mêmes notations pour la suite B.

Tous les points de la suite A ne peuvent être triples pour les courbes 1, car la somme des multiplicités de ces courbes en 0 et aux points de A t égale à 31. Suppons que les x premiers points de A soient triples. Deux as peuvent se présenter suivant que les courbes ne passent pas par le oint $(\alpha, 17)$ ou passent par ce point. Le point $(\alpha, x+1)$ est multiple 'un certain ordre $y < 3$. Dans le premier cas, on a $3x + y = 23$, d'où $= 2$ et $x = 7$. Les courbes C^1 passent trois fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 7)$, 2 ois par $(\alpha, 8)$ et par suite une fois par les points $(\alpha, 8, 1)$, $(\alpha, 8, 1, 1)$. ans le second cas, on a $y \geqslant 1$ et les courbes passent une fois par les points $, x+2), \ldots, (\alpha, 17)$. On doit avoir $3x + y = 6$, d'où $y = 2$, $x = 2$. es courbes C^1 passent 3 fois par $(\alpha,)$,$(\alpha, 2)$, 2 fois par $(\alpha, 3)$, une fois ar $(\alpha, 4), \ldots, (\alpha, 17)$ et par suite une fois par $(\alpha, 3, 1)$. Ce point est nécesairement uni de première espèce.

L'examen de la suite B conduit également à deux possibilités. Dans première, les courbes C^1 passent 5 fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$, 3 ois par $(\beta, 5)$, 2 fois par $(\beta, 5, 1)$, une fois par $(\beta, 5, 1, 1)$, $(\beta, 5, 1, 1, 1)$. ans la seconde, ces courbes passent 5 fois par $(\beta, 1)$, 3 fois par $(\beta, 2)$,une ois par $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 18)$, 2 fois par $(\beta, 2, 1)$. Ce dernier point est uni e première espèce.

Le nombre des points d'intersection des courbes C^1 absorbés en 0 oit être multiple de 31 et d'autre part, la multiplicité du point de diraation $0'$ pour Φ est égale à la somme des multiplicités pour les courbes ^{1} des points unis de première espèce qu'elles contiennent. Un calcul imple montre que ce sont les seconds cas qui peuvent se présenter. Les ourbes C^1 passent donc 8 fois par 0,3 fois par $(\alpha, 1)$ $(\alpha, 2)$, 2 fois par $, 3)$, une fois par $(\alpha, 4), \ldots, (\alpha, 17)$ et une fois par $(\alpha, 3, 1)$, 5 fois par $, 1)$, 3 fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 18)$, 2 fois par $(\beta, 2, 1)$. e point $0'$ est quintuple pour la surface Φ.

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points unis de remière espèce $(\alpha, 17)$, $(\alpha, 3, 1)$, $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 18)$ respectivement une droite $_1$, une droite τ_1, une conique τ_2 et une droite σ_2. Chacune de ces courbes encontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre as les autres. On a

$$\Gamma \equiv \Gamma^1 + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \sigma_2$$

t les droites σ_1, σ_2 ont le degré virtuel -2, τ_1 le degré virtuel -3 et τ_2 e degré virtuel -4.

Le cône tangent à Φ_1 en $0'$ projette de ce point σ_1, τ_1, τ_2, σ_2. La urface Φ est d'ordre $n-5$.

4. Les courbes C^2 correspondent aux solutions $\lambda = 8$, $\mu = 3$ des ongruences (1). Une analyse analogue à celle qui a été faite pour les ourbes C^1 montre que les courbes C^2 passent 11 fois par 0,3 fois par $, 1)$, une fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 17)$, 2 fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, une fois ar $(\alpha, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 3, 1)$, 3 fois par $(\beta, 1)$, 2 fois par $(\beta, 2)$, une fois par $, 3), \ldots, (\beta, 18)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 6$ et est la projection de Φ_1 à partir du oint $0'_1$, intersection de τ_1 et τ_2. Sur Φ_2, on a une droite σ_1, une droite $_1$ représentant le domaine du point uni de première espèce $(\alpha, 1, 3, 1)$, ne droite τ_2 et une droite σ_2. Le point $0'_1$ est simple pour la surface Φ_1 t ρ_1 est une droite exceptionnelle, de degré virtuel -1.

5. Les courbes C^3 correspondent aux valeurs $\lambda = 1$, $\mu = 12$. Elles passent 13 fois par le point 0, une fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 17)$. Elles passent 2 fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 18)$ et une fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 12), \ldots, (\beta, 1, 10)$.

La surface Φ_3 est d'ordre $n - 7$ et est la projection de Φ_2 à partir du point $0_2'$ commun aux droites ρ_1 et τ_2. Ce point est simple pour Φ_2.

Sur la surface Φ_3 on a deux droites σ_1, σ_2 et une droite ρ_2 qui représente le domaine du point uni de première espèce $(\beta, 1, 10)$. Cette dernière droite est exceptionnelle et de degré virtuel -1.

On voit que la structure du point de diramation $0'$ se compose des courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2, mais il est intéressant de voir le comportement des courbes C^4, $C^5, \ldots, C^{15}$ au point 0 et ses répercussions sur la surface Φ et ses projections.

6. Les courbes C^4 correspondent aux valeurs $\lambda = 13$, $\mu = 1$. Ces courbes passent 14 fois par le point 0 et une fois par les points $(\beta, 1), \ldots$ $\ldots, (\beta, 18)$.

Pour connaître le comportement des courbes C^4 le long de la suite A, considérons les courbes C^5 qui correspondent aux valeurs $\lambda = 6$, $\mu = 10$. On voit aisément que ces courbes passent 6 fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ et 3 fois par $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$. En revenant aux courbes C^4, on voit que celles-ci passent 8 fois par $(\alpha, 1)$, 6 fois par $(\alpha, 2)$, 3 fois par $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$ 2 fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, une fois par $(\alpha, 1, 3)$ et $(\alpha, 3, 1)$.

Sur la surface Φ_4, on a une droite σ_2, une droite exceptionnelle ρ_1 et une cubique gauche τ_1. Cette surface est d'ordre $n - 11$ et est la projection de Φ_3 à partir d'un point $0_3'$ commun à ρ_2 et à σ_1. Ce point est quadruple pour Φ_3 et la projection de ρ_1 et σ_1 est le cône tangent en ce point.

Les courbes C^5 passent 10 fois par $(\beta, 1)$, 5 fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1)$. Sur la surface Φ_5 on a une cubique gauche τ_1 et une quintique gauche rationnelle τ_2. Elle est la projection de Φ_4 à partir d'un point $0_4'$ commun à ρ_1 et à σ_2. Ce point est quintuple pour cette surface, le cône tangent étant la projection de τ_2. La surface Φ_5 est d'ordre $n - 16$.

7. Sur la surface Φ_1, la droite τ_1 et la conique τ_2 ont en commun un point $0_1'$,donc sur la surface Φ_5 les courbes τ_1 et τ_2 ont en commun un point $0_5'$ et la surface Φ_6 sera la projection de Φ_5 à partir de ce point et sera d'ordre $n - 17$.

Effectivement, les courbes C^6 correspondant à $\lambda = 11$, $\mu = 8$, passent 19 fois par 0, 6 fois par $(\alpha, 1)$, 4 fois par $(\alpha, 2)$, 2 fois par $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$, 2 fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, une fois par $(\alpha, 1, 3,)$, $(\alpha, 1, 3, 1)$, 8 fois par $(\beta, 1)$, 4 fois par $(\beta, 2)$ et $(\beta, 2, 1)$.

Sur la surface Φ_6 sont tracées une conique τ_1, une droite exceptionnelle ρ_1 et une quartique gauche rationnelle τ_2. Cette surface est bien d'ordre $n - 17$.

Les courbes C^7 sont données par $\lambda = 4$, $\mu = 17$. Elles passent 21 fois par 0,4 fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, 2 fois par $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$, 7 fois par $(\beta, 1)$, 3 fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1)$ et une fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 10)$.

Sur la surface Φ_7 on a une conique τ_1, une cubique gauche τ_2 et une droite exceptionnelle ρ_2. Elle est d'ordre $n - 18$ et projection de Φ_6 à partir d'un point $0_6'$ simple pour la surface, qui correspond au point $0_2'$ commun à ρ_1 et à τ_2 sur la surface Φ_2.

8. Les courbes C^8 correspondent à la solution $\lambda = 16$, $\mu = 6$. Elles assent 22 fois par 0, 6 fois par $(\alpha, 1,)$ 2 fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3)$, $\alpha, 3, 1)$, 4 fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, 2 fois par $(\alpha, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 3)\,; 1)$, 6 fois ar $(\beta, 1)$, 3 fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1)$.

Sur la surface Φ_8, on a une droite τ_1, une conique exceptionnelle $_1$ et une cubique gauche τ_2. Cette surface est d'ordre $n - 20$ et est la rojection de Φ_1 à partir d'un point $0_7'$ commun à la conique τ_1 et à la droite ρ_2.

Les courbes C^9, associées aux valeurs $\lambda = 9$, $\mu = 15$, passent 24 ois par 0,4 fois par $(\alpha, 1)$, 2 fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$, fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, une fois par $(\alpha, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 3, 1)$.

Sur la surface Φ_9, on a une droite τ_1, une conique τ_2 et deux droites xceptionnelles ρ_1 et ρ_2. Cette surface est d'ordre $n-21$ et est la projection e Φ_9 à partir du point simple $0_8'$ commun à ρ_1 et à τ_2.

9. Considérons les courbes C^{10} qui correspondent à $\lambda = 21$, $\mu = 4$. lles passent 25 fois par 0,3 fois par $(\alpha, 1)$, 2 fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $\alpha, 3)$, $(\alpha, 3\ ,1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 18)$, 4 fois par $(\beta, 1)$, 2 ois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2\ ,1)$.

Sur la surface Φ_{10}, d'ordre $n-22$, on a une droite τ_1, une conique $_2$ et une droite ρ_3 représentant le domaine du point $(\alpha, 1, 18)$. Cette surface st la projection de Φ_9 à partir d'un point simple $0_9'$ et la droite ρ_3 est xceptionnelle.

Les courbes C^{11} données par $\lambda = 2$, $\mu = 24$, passent 26 fois par 0,2 ois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$, 4 fois par $(\beta, 1)$, une ois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1)$, et 2 fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 10)$.

Sur Φ_{11}, d'ordre $n-24$, on a une droite τ_1, une droite τ_2 et une conique xceptionnelle ρ_2. Elle est la projection de Φ_{10} à partir d'un point $0_{10}'$ ommun à ρ_3 et τ_2, double pour la surface.

10. Les courbes C^{12} données par $\lambda = 14$, $\mu = 13$, passent 27 fois ar 0,4 fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, 2 fois par $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$, 3 fois ar $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 10)$.

Les courbes C^{13} données par $\lambda = 26$, $\mu = 2$, passent 28 fois par 0,3 is par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, 2 fois par $(\alpha, 1, 3)$, une fois par $(\alpha, 1, 3, 1)$ une fois par $(\alpha, 1, 4), \ldots, (\alpha, 1, 18)$, 2 fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2)$, $, 2, 1)$.

Les courbes C^{14} données par $\lambda = 7$, $\mu = 22$ passent 29 fois par 0,2 ois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, une fois par $(\alpha, 1, 3)$, $(\alpha, 1, 3, 1)$, 2 fois ar $(\beta, 1)$, $(\beta, 1,), \ldots, (\beta, 1, 10)$.

Enfin les courbes C^{15}, donnés par $\lambda = 19$, $\mu = 11$, passent 30 fois par et une fois par $(\alpha, 1, (\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 18)$, $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 10)$

Il est facile de déterminer les propriétés des surfaces Φ_{12}, Φ_{13}. $_{14}$ et Φ_{15}, qui sont respectivement d'ordres $n-26$, $n-27$, $n-29$, $n-30$.,

Les courbes C^{16} ont en 0 un point multiple d'ordre 31 à tangen- s variables.

11. Retournons à la surface Φ_1. Sur cette surface, les courbes Γ^2 nt découpées par les hyperplans passant par $0_1'$, les courbes Γ^3 par les perplans touchant la conique τ_2 en $0_1'$, les courbes Γ^4 par les hyperplans écédents contenant la droite τ_1, c'est-à-dire par les hyperplans touchant surface Φ_1 en $0_1'$, les courbes Γ^5 par les hyperplans contenant τ_1 et τ_2. s courbes rencontrent τ_1 en 3 points variables et τ_2 en cinq points riables.

On sait que le lieu des plans osculateurs en $0_1'$ aux courbes tracées sur Φ_1 et passant par ce point est un espace à 4 ou à 5 dimensions. Les hyperplans contenant cet espace ξ coupent Φ_1 en des courbes ayant un point triple en $0_1'$. Actuellement ces courbes contiennent τ_1 et τ_2, donc il reste des courbes passant une fois par $0_1'$, c'est-à-dire les courbes Γ^6. Observons que les hyperplans découpant les courbes Γ^5 passent par un espace à 3 dimensions. Comme Φ_1 appartient à un espace à $r_0 - 1$ dimensions, la dimension de $|\Gamma^5|$ est $r_0 - 5$. Celle de $|\Gamma^6|$ est donc $r_0 - 6$ et il en résulte que l'espace ξ est à 4 dimensions.

Et ainsi de suite.

12. Sur la surface Φ_1, la droite σ_2 et la conique τ_2 ont un point commun que nous désignerons par $0''$. Les hyperplans passant par ce point coupent Φ_1 suivant des courbes Γ^* rencontrant en un point σ_1, τ_1 et τ_2 mais ne rencontrant plus σ_2. Il en résulte qu'il correspond à ces courbes sur F des courbes C^* passant une fois par les points $(\alpha, 17)$, $(\alpha, 3, 1)$, $(\beta, 2, 1)$. Il en résulte encore que les courbes C^* ont en 0 la multiplicité 5, 3 tangentes étant confondues avec a et 2 avec b. Le système $|C^*|$ a la même dimension que $|C^2|$, mais les quantités $\lambda = 3$, $\mu = 2$ ne forment pas une solution des congruences (1).

On arriverait à des conclusions analogues pour le système découpé sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point commun à τ_1 et σ_1.

Liège, le 26 janvier 1972

Quai Orhan, B. 4000, Liège,
Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications*. Monografie del Consiglio nazionale delle ricerche, Ediz. Cremonese, Rome, 1963.
2. *Sulla struttura di un punto di diramazione di una supercie algebrica multipla di ordine* 31, Rendiconti del Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1954, 619 – 626.