

## LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE CLASSIQUE ET SES PROBLÈMES

par Lucien GODEAUX

Ce que l'on appelle aujourd'hui la Géométrie algébrique classique est celle qui fut l'objet des recherches des mathématiciens dans le dernier tiers du XIX<sup>e</sup> siècle et les premières décades du XX<sup>e</sup>. Les fonctions algébriques que l'on y considère appartiennent au domaine des nombres complexes et le problème qui se pose est de répartir les êtres algébriques (courbes, surfaces, variétés) en classes, deux êtres appartenant à une même classe si l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle (ne s'étendant pas, en tant que transformation birationnelle, aux espaces ambiants). Deux méthodes s'y manifestèrent: l'une, d'aspect purement géométrique, se rencontre chez Brill et Noether et surtout chez la brillante Ecole italienne de C. Segre, G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi et de leurs élèves<sup>1</sup>. L'autre, analytique, que l'on peut faire remonter à Riemann, fut surtout illustrée par les géomètres français: Emile Picard, G. Humbert, P. Painlevé, etc. Il reste, dans cette Géométrie algébrique classique, bien des problèmes à résoudre et le but de cette courte note est d'appeler l'attention sur certains d'entre eux.

1. Les deux méthodes dont il vient d'être question ne sont pas restées étrangères l'une à l'autre. Les géomètres italiens avaient été conduits à partager les surfaces en deux catégories: sur les unes (surfaces régulières) les courbes tracées sur la surface se distribuent en systèmes linéaires, tandis que sur les autres (surfaces irrégulières), il existe des systèmes continus de courbes non linéaires. Certains indices faisaient supposer que les surfaces irrégulières sont celles pour lesquelles il existe des intégrales de différentielles totales de première espèce, introduites par Picard et appelées intégrales de Picard. La réponse est affirmative et ce fut l'œuvre de Castelnuovo, Enriques, Severi. Le théorème fut d'ailleurs démontré plus tard par H. Poincaré par des méthodes transcendentes.

---

<sup>1</sup> Lors de la commémoration du centenaire de la naissance de Castelnuovo en 1965 à Rome, nous avons été prié d'indiquer la contribution du regretté savant à la Géométrie algébrique. Voir notre note: *La Géométrie algébrique italienne* (Simposio internazionale di Geometria algebrica, Rome, 1966).

2. Le théorème dont il vient d'être question dit que sur une surface irrégulière, une courbe algébrique  $C$  appartient en général à un système continu de courbes  $\{C\}$  formé de  $\infty^q$  systèmes linéaires  $|C|$ ,  $q$  étant le nombre d'intégrales de Picard de première espèce linéairement indépendantes appartenant à la surface.

Les courbes du système continu  $|C|$  infiniment voisines d'une courbe  $C$  découpent sur celle-ci une série linéaire complète. C'est là une propriété fondamentale due à Enriques qui l'avait obtenue en ramenant la propriété à celle d'un système continu de courbes planes ayant des points doubles variables et touchant une courbe fixe en un certain nombre de points variables (1904). Bien des années plus tard, on s'est aperçu que la démonstration d'Enriques n'était valable que si le genre géométrique de la surface est nul ( $p_g = 0$ ). Cependant, la propriété est exacte car Poincaré n'en fait pas usage dans sa démonstration. Un des problèmes de la Géométrie algébrique est une démonstration purement géométrique du théorème d'Enriques.

3. Répartir les variétés algébriques en classes signifie qu'il faut trouver des caractères de ces variétés invariants pour les transformations birationnelles et de plus, dans chaque classe, construire des modèles projectifs des variétés de manière à prouver leur existence.

Clebsch a montré que les courbes rationnelles sont caractérisées par leur genre  $p = 0$ . Lorsque Castelnuovo a voulu caractériser les surfaces rationnelles, il s'est heurté à une difficulté. On peut définir le genre  $p$  d'une courbe algébrique supposée plane, d'ordre  $n$  et n'ayant que des points doubles (ce qui n'est pas une restriction) en calculant la dimension  $p - 1$  du système des courbes adjointes d'ordre  $n - 3$  passant par les points doubles. Si l'on considère une surface  $F$  d'ordre  $n$  n'ayant qu'une courbe double et des points triples à la fois pour la surface et pour la courbe (ce qui n'est pas une restriction en vertu d'un théorème de Beppo Levi), le calcul du nombre de dimensions du système des surfaces adjointes d'ordre  $n - 4$  passant par la courbe double peut donner un nombre  $p_a - 1$  inférieur à la dimension effective  $p_g - 1$  (la différence  $q = p_g - p_a$ , irrégularité de la surface, est égale au nombre d'intégrales de Picard de première espèce, linéairement indépendantes, d'après le théorème du n° 1). Castelnuovo avait d'abord cru que les conditions de rationalité d'une surface étaient la valeur zéro des genres arithmétique  $p_a$  et géométrique  $p_g$  de la surface, mais il s'aperçut que ces conditions n'étaient pas suffisantes. Appelons  $|C|$  un système linéaire de courbes tracées sur la surface  $F$  et  $|C'|$  son système adjoint, c'est-à-dire le système linéaire dont les courbes découpent sur

toute courbe  $C$  la série canonique de cette courbe. Pour que la surface  $F$  soit rationnelle, il faut encore que le système  $|C''|$  adjoint au système  $|C'|$  ne contienne pas comme partie le système  $|C|$ . En d'autres termes, si l'on désigne par  $P_2 - 1$  la dimension du système  $|C'' - C|$ , c'est-à-dire si  $P_2$  est le bigenre de la surface  $F$ , la surface  $F$  est rationnelle si l'on a  $p_a = P_2 = 0$ , la condition  $p_g = 0$  étant une conséquence de  $P_2 = 0$ .

Castelnuovo a construit une surface de genres  $p_a = p_g = 0$ ,  $P_2 = 2$  et Enriques une surface de genres  $p_a = p_g = 0$ ,  $P_2 = 1$ . Ceci posait une question: existe-t-il d'autres surfaces de genres  $p_a = p_g = 0$  dont le bigenre  $P_2$  est supérieur à zéro? La question, posée en 1894, est au fond restée sans réponse jusqu'à ce jour, bien que des exemples particuliers aient été construits. Récemment, nous avons pu démontrer qu'une surface  $F$  de genres  $p_a = p_g = 0$  possédant un système bicanonique  $|C'' - C|$  irréductible de genre supérieur à deux, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface possédant une seule courbe canonique<sup>2</sup>. Mais il reste à construire des surfaces de ce type. Et puis, il reste à construire des surfaces de genres  $p_a = p_g = 0$  dont les systèmes pluricanoniques sont composés au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques, ce qui est le cas de la surface de Castelnuovo. M. Burniat a construit de nombreuses surfaces de cette espèce. Enriques a établi que le plan double dont la courbe de diramation  $D$  est formée d'une courbe d'ordre  $n + 2$  possédant un point multiple  $O$  d'ordre  $n - 2$ , possédant en outre  $n - 2$  tacnodes dont les tangentes tacnodales passant par  $O$ , jointe à ces  $n - 2$  tangentes, a les genres  $p_a = p_g = 0$ ,  $P_2 = n - 3$ . De tel plans doubles existent pour les petites valeurs de  $n$ , mais il reste à trouver une limite supérieure éventuelle de  $n$ .

4. On sait qu'une courbe de genre  $p$  dépend de  $3p - 3$  modules (ou de  $2p - 1$  modules si elle est hyperelliptique), deux courbes de même genre et dont les modules sont égaux appartenant à la même classe. La détermination du nombre des modules dont dépend une surface algébrique a fait l'objet de peu de recherches. Enriques a considéré le cas général<sup>3</sup>. Il définit un invariant  $\theta$  de la manière suivante: soient sur une surface algébrique  $F$  un système linéaire  $|C|$  de dimension supérieure à trois et  $|C'|$  son adjoint. Dans un système triplement infini tiré de  $|C|$ , il existe un certain nombre  $s$  de points qui sont doubles pour  $\infty^1$  courbes de ce système.

<sup>2</sup> Voir notre note *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal des Sciences Mathématiques, 1965, pp. 25-41).

<sup>3</sup> F. ENRIQUES, *Sui moduli delle superficie algebriche* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1<sup>o</sup> sem. 1908, pp. 690-694; Memorie scelte di Geometria, Volume II, pp. 307-312).

La surabondance du système  $|3C + C'|$  par rapport à un groupe de  $s$  points relatifs à un quelconque des systèmes linéaires  $\infty^3$  tirés de  $|C|$  a une valeur constante  $\theta$  qui ne dépend que de la surface et non du choix du système linéaire  $|C|$ . Cela étant, les surfaces de genre arithmétique  $p_a$ , de genre géométrique  $p_g$ , de genre linéaire  $p^{(1)}$  et de caractère  $\theta$  dépendent de

$$10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

modules.

Enriques a montré que pour une surface régulière ( $p_a = p_g$ ),  $\theta$  est au moins égal à  $p_g$ . M. B. Segre a montré que si la surface est irrégulière, on a <sup>4</sup>

$$\theta \geq 2p_g - p_a - 1.$$

Est-il possible comme dans le cas des courbes, d'exprimer  $\theta$  en fonction des genres arithmétique, géométrique et linéaire de la surface?

Il semble que cette question des modules d'une surface algébrique devrait être approfondie. Ce qui manque peut-être est la construction précise de la variété de Riemann attachée à une surface algébrique, c'est-à-dire de la variété réelle à quatre dimensions représentant les points réels et complexes de la surface. On sait d'ailleurs que contrairement à ce qui se passe pour les surfaces de Riemann, la variété de Riemann d'une surface n'est pas la plus générale des variétés réelles à quatre dimensions.

5. Une équation algébrique  $f(x, y) = 0$  définit une fonction algébrique  $y(x)$  et à un point de la droite  $y = 0$  correspondent un certain nombre  $n$  de valeurs finies de  $y$  en général distinctes. Il y a un certain nombre de points de la droite  $y = 0$ , situés sur les tangentes à la courbe  $f = 0$  parallèles à l'axe des  $y$ , auxquels correspondent  $n$  points dont deux coïncident. Ce sont les points de diramation de la fonction  $y(x)$ . D'après le théorème d'existence de Riemann, on peut construire des fonctions algébriques  $y(x)$  ayant  $2n + 2p - 2$  points de diramation donnés, la courbe  $f = 0$  étant de genre  $p$ .

Une équation algébrique  $f(x, y, z) = 0$  définit une fonction algébrique  $z(x, y)$  et à un point du plan  $z = 0$  correspondent un certain nombre  $n$  de valeurs finies de la fonction  $z$ . Si l'on reprend le raisonnement précédent, la fonction  $z(x, y)$  possède dans le plan  $z = 0$  une courbe de diramation  $D$  et le problème qui se pose est de déterminer la nature d'une courbe de diramation pour que la fonction  $z(x, y)$  existe. L'ensemble de la fonction  $z(x, y)$  et de la courbe de diramation s'appelle plan multiple d'ordre  $n$ .

<sup>4</sup> B. SEGRE, *Sui moduli delle superficie algebriche irregolari* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1° sem. 1934).

Pour  $n = 2$  la courbe de diramation peut être quelconque et le problème ne se pose pas. Mais pour  $n > 2$ , il n'en est plus de même et la courbe  $D$  doit posséder un certain nombre de points doubles et de points de rebroussement.

Lorsque l'on considère une droite du plan  $z = 0$ , il existe d'après le théorème de Riemann une fonction algébrique  $z_0$  d'une variable qui a comme points de diramation les points de rencontre de la droite avec la courbe  $D$ . Lorsque la droite tourne autour d'un point  $O$ , ces fonctions doivent se fondre dans la fonction  $z(x, y)$ . On conçoit la difficulté du problème, il exige pour être résolu l'étude des diverses substitutions des valeurs de la fonction  $z_0$  aux points de diramation et leurs variations lorsque la droite varie. Chisini a profondément étudié ce problème et a construit des courbes de diramation très générales, mais la question mérite d'être reprise<sup>5</sup>. Ici aussi la connaissance de la variété réelle de Riemann serait sans doute très utile.

6. En dehors des surfaces hyperelliptiques, on connaît peu d'exemples de surfaces algébriques dont les coordonnées des points s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres. Il semble cependant que l'on pourrait construire de tels exemples en utilisant les fonctions fuchsienues.

Les premiers exemples de surfaces irrégulières non réglées ont été construits par De Franchis, Maroni et Severi par la considération du produit de deux courbes algébriques  $C_1, C_2$  de genres  $p_1, p_2$ . La surface  $F$  ainsi obtenue, représentant les couples de points des courbes  $C_1, C_2$  a les genres

$$p_g = p_1 p_2, \quad p_a = p_1 p_2 - (p_1 + p_2), \quad p^{(1)} = 8(p_1 - 1)(p_2 - 1) + 1.$$

Poincaré ayant démontré que les coordonnées des points d'une courbe algébrique s'expriment par des fonctions fuchsienues d'un paramètre, les coordonnées des points d'une surface  $F$  pourront s'exprimer en fonction des produits des fonctions fuchsienues relatives aux courbes  $C_1, C_2$ . Cet exemple de représentation des coordonnées des points d'une surface algébrique par des fonctions uniformes de deux paramètres sera sans doute peu intéressant, mais celui que l'on obtient en considérant la surface  $F$  qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique  $C$  de genre  $p$  sera peut-être plus digne d'intérêt. Cette surface  $F$  a les genres

$$p_g = \frac{1}{2}p(p - 1), \quad p_a = \frac{1}{2}p(p - 1) - p, \quad p^{(1)} = (p - 2)(4p - 5).$$

<sup>5</sup> O. CHISINI, *Memorie scelte* (Bologna, Zanichelli, 1961).

On peut aller plus loin et considérer le cas où la courbe  $C$  contient une involution cyclique d'ordre premier  $n > 2$ , dont l'image  $C'$  a le genre  $p'$ . A cette involution correspond sur la surface  $F$  une involution cyclique d'ordre  $n$  n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous avons pu démontrer que la surface  $F'$  qui représente cette involution a l'irrégularité  $p'$ . En utilisant les résultats obtenus par Comessatti sur les liaisons existant entre les fonctions fuchsienues associées aux courbes  $C, C'$ , on obtiendrait une représentation des coordonnées des points de la surface  $F'$  par des fonctions uniformes de deux paramètres sans doute très particulière mais qui pourrait peut-être fournir quelques indications utiles <sup>6</sup>.

7. La Géométrie sur un être algébrique développée dans les cas des courbes et des surfaces a été étendue aux variétés à plusieurs dimensions surtout par F. Severi. On doit à ce géomètre et à M. E. Marchionna de profondes recherches sur les irrégularités des variétés algébriques à  $n$  dimensions, c'est-à-dire sur les nombres des intégrales de première espèce analogues aux intégrales de Picard attachées à une surface <sup>7</sup>.

Un système de groupes de  $n$  points dans un espace projectif  $S_r$  à  $r$  dimensions, dépendant de  $r$  paramètres, tel qu'un point de l'espace appartienne généralement à un seul groupe, est appelé involution d'ordre  $n$ .

Lüroth a démontré qu'une involution d'ordre  $n$  appartenant à une droite est rationnelle ou, ce qui revient au même, qu'une courbe dont les coordonnées des points sont des fonctions rationnelles d'un paramètre est rationnelle. Castelnuovo a démontré plus tard qu'une involution plane est rationnelle, c'est-à-dire qu'une surface dont les coordonnées des points sont des fonctions rationnelles de deux paramètres est rationnelle. La démonstration de Lüroth est élémentaire, celle de Castelnuovo est loin de l'être. On devrait donc s'attendre à ce que l'extension du théorème aux espaces à plus de deux dimensions ne soit pas possible. Et de fait, Enriques a réussi à construire dans un espace à trois dimensions, une involution qui n'est pas rationnelle. La question est évidemment liée à la détermination des variétés rationnelles à trois dimensions au moins.

8. En 1890, Noether s'est posé la question de savoir si la variété cubique de l'espace à quatre dimensions est rationnelle. Il est seulement parvenu à montrer qu'elle représente une involution du second ordre appartenant à un espace à trois dimensions. Cela a été fait ensuite de plusieurs manières.

<sup>6</sup> COMESSATTI, *Le involuzioni sulle curve algebriche ed il teorema di diramazione per le funzioni fuchsiane* (Memorie della Accademia dei Lincei, 1929, 56 p.).

<sup>7</sup> SEVERI, *Geometria dei sistemi algebrici...*, Volume III.

Pour démontrer par l'absurde que la variété cubique de l'espace à quatre dimensions n'est pas rationnelle. Enriques proposait la méthode suivante: la variété cubique de l'espace  $S_4$  possédant un point double est rationnelle, elle est représentée sur un espace  $S_3$  à trois dimensions par le système des surfaces cubiques passant par une courbe  $C$  d'ordre six et de genre quatre. Si la surface cubique générale est rationnelle, elle est représentable sur l'espace  $S_3$  par un système de surfaces d'ordre  $n > 3$  et lorsque la variété cubique générale varie par continuité et tend vers une variété possédant un point double, ce système doit se réduire au système de surfaces cubiques augmenté d'une surface d'ordre  $n - 3$ . La somme de cette surface et d'une surface cubique doit être une surface de genre zéro, ce qui semble impossible. Comme Enriques le dit explicitement, ce raisonnement devrait être rendu rigoureux.

Fano a abordé la question d'une manière différente. Il a étudié systématiquement les variétés  $V$  à trois dimensions d'ordre  $2p - 2$  situées dans un espace  $S_{p+1}$  à  $p + 1$  dimensions, dont les sections par des espaces à  $p - 1$  dimensions sont des courbes de genre  $p$ . La variété cubique de  $S_4$  est birationnellement équivalente aux variétés  $V$  que l'on obtient pour  $p = 8$  et  $p = 13$ . Dans le premier cas, la variété  $V$  est la section hyperplane de la variété de Grassmann qui représente les droites d'un espace  $S_5$  dans un espace  $S_9$  à neuf dimensions. Fano a réussi à démontrer que pour  $p = 3, 4, 5, 6, 8$  les variétés  $V$  ne contiennent que des surfaces intersections complètes d'hypersurfaces de l'espace ambiant. Elles ne sont pas rationnelles. De plus, pour  $p = 5, 6, 8$  les variétés appartiennent à des classes différentes. L'involution construite par Enriques dans un espace à trois dimensions a pour image la variété intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface cubique de l'espace à cinq dimensions, c'est-à-dire une variété  $V$  pour  $p = 4$ .

Fano a de plus démontré que pour  $p \geq 10$ , sauf pour  $p = 13$ , la variété  $V$  est rationnelle. La variété  $V$  n'existe d'ailleurs que pour  $p \leq 37$ .

Il est bien évident que toute variété rationnelle à trois dimensions a son genre géométrique et tous ses plurigenres égaux à zéro. Nous avons pu construire une variété à trois dimensions dont le genre géométrique, le bigenre, le trigenre, le tétragenre sont nuls, mais dont le pentagenre est égal à l'unité. Il en résulte que l'égalité à zéro du pentagenre est une condition nécessaire pour qu'une variété à trois dimensions soit rationnelle.

9. Comme nous l'avons écrit plus haut, il importe que dans chaque classe de variétés algébriques, on construise un modèle projectif des variétés.

Dans le cas des courbes, une classe de courbes de genre  $\pi$  a comme modèle projectif une courbe d'ordre  $2\pi - 2$  située dans un espace à  $\pi - 1$  dimensions, sauf si la courbe est hyperelliptique. Dans ce cas, on peut prendre comme modèle projectif une courbe plane d'ordre  $n$  possédant un point multiple d'ordre  $n - 2$ .

Lorsqu'il s'agit de surfaces, Enriques a suggéré de prendre comme modèle projectif d'une classe de surfaces dont le genre géométrique est  $p_g \geq 3$ , une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques<sup>8</sup>.

Peu d'exemples sont connus et l'on ne voit pas, sauf dans un cas, une méthode générale permettant de déterminer ces modèles projectifs.

Si l'on part d'une des variétés à trois dimensions considérées par Fano, d'ordre  $2p - 2$  dans un espace  $S_{p+1}$  dont les sections par des espaces à  $p - 1$  dimensions sont de genre  $p$  et par conséquent dont les sections hyperplanes sont des surfaces dont les courbes canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro, la surface découpée sur cette variété par une hyperquadrique a pour système canonique le système de ses sections hyperplanes. La surface a les genres

$$p_a = p_g = p + 2, \quad p^{(1)} = 4p - 3.$$

Dans un espace à quatre dimensions, l'intersection d'une hypersurface du quatrième ordre et d'une hyperquadrique est une surface dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes<sup>9</sup>.

10. On sait que si l'on considère sur une courbe algébrique  $C$  des séries linéaires  $|G_1|, |G_2|, \dots, |G_n|$  de groupes de points, la série complète

$$|G| = |G_1 + G_2 + \dots + G_n|$$

contient en général des séries partielles ne contenant aucun groupe formé de groupes des séries données. Castelnuovo appelle somme minimum une série comprise dans  $|G|$  telle que toute série partielle contenue dans cette série comprennent des groupes formés de groupes des séries données<sup>10</sup>. La considération de ces séries a conduit notamment Castelnuovo à déterminer le genre maximum d'une courbe d'ordre donné située dans un espace

<sup>8</sup> F. ENRIQUES, *Sulle classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineaire*  $p^{(1)} = 1$  (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1<sup>o</sup> sem. 1914, pp. 206-214, 291-297).

<sup>9</sup> Au sujet de la classification des surfaces algébriques, on peut consulter P. BURNIAT, *Sur les surfaces de genre*  $P_{12} > 0$  (Annali di Matematica, 1966, t. LXXI, pp. 1-24).

<sup>10</sup> G. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineaire di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1893, pp. 89-110); *Memorie scelte*, Bologna, Zanichelli, 1937, pp. 95-113).

à  $r$  dimensions. Dans ses *Memorie scelte*, Castelnuovo appelle l'attention sur le problème analogue relatif aux systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique. Nous ne croyons pas que cet appel ait été entendu.

#### BIBLIOGRAPHIE

Nous indiquons ici quelques ouvrages où l'on peut trouver l'exposé des théories sur les variétés algébriques.

Pour la théorie des courbes:

F. ENRIQUES et O. CHISINI. *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e funzioni algebriche* (Bologna, Zanichelli, Volume III, 1924).

— *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

F. SEVERI. *Trattato di Geometria algebrica* (Bologna, Zanichelli, 1926).

L. GODEAUX. *Geométrie algébrique*, Tome II (Liège et Paris, 1949).

Pour la théorie des surfaces:

G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES. Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus (*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band III<sub>2</sub>, Heft 6. Leipzig, 1915):

O. ZARISKI. *Algebraic Surfaces* (Berlin, Springer, 1935).

F. ENRIQUES et CAMPEDELLI. *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padova, 1932).

ENRIQUES. *Le superficie algebriche* (Bologna, Zanichelli, 1949).

Pour la théorie des variétés algébriques:

F. SEVERI. *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* (Trois volumes, Rome, Cremonese, 1942, 1958, 1959).

(Reçu le 20 janvier 1970)

L. Godeaux  
37, quai Orban  
4000 Liège  
Belgique