RECHERCHE DES SECTIONS CIRCULAIRES DES QUADRIQUES

par

Lucien Godeaux

On recherche généralement les sections circulaires des quadriques en utilisant une trasformation de coordonnées choisie de manière qu'un des nouveaux plans de coordonnées coupe la quadrique suivant un cercle. La méthode suivante, que nous avons utilisée dans nos cours à l'Ecole militaire de Belgique et à l'Université de Liége, nous parait préférable.

1. *Lemme I.*—Si une quadrique contient un cercle, tout plan parallèle au plan de celuici coupe la quadrique suivant un cercle (réel ou imaginaire).

Considérons le cercle, en axes rectangulaires,

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad z = o \qquad [1]$$

Une quadrique contenant ce cercle a une équation de la forma

$$x^2 + y^2 - r^2 + Az^2 + Byz + B'zx + Cz = o \qquad [2]$$

Le plan $z = h$ coupe la quadrique suivant une section circulaire, réelle ou imaginaire.

2. *Lemme II.*—Si une quadrique et une sphère ont en commun un cercle, elles se coupent encore suivant un second cercle.

Une sphère passant par le cercle (1) a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + C'z - r^2 = o \qquad [3]$$

Tous les points communs aux surfaces (2) et (3) appartiennent à l'un des plans

$$z = o \, , \, B'x + By + (A - l)\, z + C - C' = o$$

Les points communs aux deux surfaces et au plan $z = o$ forment le cercle (1) et les points appartenant au second plan forment un cercle réel ou imaginaire.

Corollaire.—Eu faisant varier C′, le second plan se déplace en restant parallèle à lui-même.

3. *Recherche des sections circulaires.*—Supposons que la quadrique

$$F(x, y, z) = o$$

soit coupée suivant un cercle par le plan $\varphi = o$. Une sphère passant par ce cercle coupe encore la quadrique suivant un cercle dont le plan a poue équation $\varphi' = o$. Si $R(x, y, z) = o$ est l'équation de cette sphère, tout point commun à la quadrique et à la sphère appartient à l'un des plans $\varphi = o$, $\varphi' = o$ et par conséquent, il existe un nombre λ tel que l'on ait identiquement

$$F(x, y, z) + \lambda \varphi \varphi' = R(x, y, z)$$

Pour trouver les sections circulaires de la quadrique $F = o$, il suffira donc d'écrire que le premier membre de l'équation précédente est l'équation d'une sphère.

Remarquons que l'on peut supposer que les plans passent par l'origine des coordonnées.

4. *Sections circulaires de l'ellipsoïde.*—Considérons l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et supposons que l'on ait

$$a^2 < b^2 < c^2,$$

l'ellipsoïde étant supposé non de révolution.

Posons

$$\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z = o, \ \varphi' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = o$$

Pour notre objet, nous déons écrire que l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha' z + \beta' y + \gamma' z) = o$$

représente une sphère (on fait rentrer le paramètre λ dans les coefficients de $\varphi = o$).

Nous avons donc

$$\beta\gamma' + \beta'\gamma = o, \ \gamma\alpha' + \gamma'\alpha = o, \ \alpha\beta' + \alpha'\beta = o \qquad [1]$$

$$\frac{1}{a^2} + \alpha\alpha' = \frac{1}{b^2} + \beta\beta' = \frac{1}{c^2} + \gamma\gamma' \qquad [2]$$

Deux des produits $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ ne peuvent être nuls, sans quoi l'ellipsoïde serait de révolution. Supposons que $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ne soient pas nuls. Alors on a $\beta\gamma' - \beta'\gamma = o$ et $\gamma = \gamma' = o$. Les équations (2) donnent

$$\alpha\alpha' \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) - \beta\beta' \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) = o$$

et en tenant compte de la dernière des équations (1),

$$\alpha^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \beta^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) = o$$

$$\alpha'^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \beta'^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) = o$$

On en déduit que les plans

$$x\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}} \pm iy\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}} = o\,.$$

imaginaires, coupent l'elipsoïde suivant des sections circulaires.

L'hypothèse que les nombres $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ ne sont pas nuls conduit de même aux plans imaginaires

$$y\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \pm iz\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}} = o\,.$$

Enfin, l'hypothèse que les nombres $\gamma\gamma'$, $\alpha\alpha'$ ne sont pas nuls conduit aux plans réels

$$x\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \pm z\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}} = o\,.$$

On voit ainsi que l'ellipsoïde contient deux séries de sections circuliares réelles et quatre séries de sections circulaires imaginaires.

La recherches des sections circulaires des hyperboloïdes, du cône, du paraboloïde elliptique et du cylindre elliptique se fait de même.