Acta Científica Compostelana, IV (3-4), 165-168 (1967).

Congruence W associée à une suite de Laplace périodique

LUCIEN GODEAUX (Liége)

On sait que le point J de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représente la droite j d'une congruence W satisfait à une équation de Laplace (Darboux). Ce point définit donc une suite de Laplace $\mathcal{J}$ associée à la congruence (j). Le problème que nous proposons de résoudre ici concerne les congruence W auxquelles sont associées des suites de Laplace périodiques.

A chacune des nappes focales (x), $(\bar{x})$ de la congruence (j) nous associons la suite de Laplace contenant les points de Q représentant les tangentes asymptotiques de ces surfaces. Soient respectivement L et $\bar{L}$ ces suites.

Une quatrième suite de Laplace associée à la congruence (j) est la suite $\mathcal{P}$ polaire de $\mathcal{J}$ par rapport à Q. Dans le cas qui nous occupe, la suite $\mathcal{P}$ a la même période que la suite $\mathcal{J}$.

Nous montrons que les suites L et $\bar{L}$ sont périodiques de période $m = 2n + 1$, m étant la période de la suite $\mathcal{J}$, ou bien qu'elles sont confondues en une même suite de période 2m.

Nous utilisons dans nos raisonnements les résultats exposés dans notre mémoire. *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé,* (1). Il serait facile, en utilisant ce travail, de trouver les conditions analytiques d'existence des congruences W considérées ici, nous en laisson le soin au lecteur.

---

(1) Mémories in - 8° de l'Académie royale de Belgique, 1964, pp. 1 - 84.

1. A une congruence W nous avons associé dans l'espace S_5 à cinq dimensions, quatre suites de Laplace.

Soint (j) la congruence, (x), $(\bar{x})$ ses nappes focales supposées non réglées et u, v les asimptotiques de ces surfaces.

D'après un théorème classique de Darboux, le point J de l'hyperquadrique Q de Klein qui représente la droite j satisfait à une équation de Laplace. Il détermine donc une suite de Laplace

$$\ldots, J^n, \ldots, J^1, J, J^{-1}, \ldots, J^{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{J})$$

où nous supposons que chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points

$$U = |x\, x_u|, \; V = |x\, x_v|$$

qui représentent sur Q les tangentes aux asymptotiques en un point x de (x) sont transformés de Laplace l'un de l'autre et appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad (L)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

De même les points

$$\bar{U} = |\bar{x}\, \bar{x}_u|, \; \bar{V} = |\bar{x}\, \bar{x}_v|$$

qui représentent les tangentes aux asymptotiques de la surface $(\bar{x})$ définissent une suite de Laplace

$$\ldots, \bar{U}^n, \ldots, \bar{U}^1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}^1, \ldots, \bar{V}^n, \ldots \qquad (\bar{L})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les droites $U V$, $\bar{U} \bar{V}$ appatiennent à Q et se rencontent au point J. Les suites L et $\bar{L}$ sont circonscrites à la suite $\mathcal{J}$. D'une manière précise, le point J^n appartient à l'intersection des droites $U^{n-1} U^n$ et $\bar{U}^{n-1} \bar{U}^n$ et le point J^{-n} celui des droites $V^{n-1} V^n$ et $\bar{V}^{n-1} \bar{V}^n$.

Désignons par P^n le pôle par rapport à Q de l'hyperplan

$$J^{n-2}\, J^{n-1}\, J^n\, J^{n+1}\, J^{n+2}.$$

Le point P^n appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, P^n, \ldots, P^1, P, P^{-1}, \ldots, P^{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{P})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens v.

2. Nous nous proposons d'examiner si la suite $\mathcal{J}$ associée à la congruence (j) peut être périodique, c'est-à dire si les points J et J^m peuvent coïncider. Nous supposerons m positif, ce qui ne nuit pas à la généralité.

Le point $J^m = J$ est l'intersection des droites $U^{m-1}\, U^m$ et $\bar{U}^{m-1}\, \bar{U}^m$ et les droites $U^{m-1}\, \bar{U}^{m-1}$ et $U^m\, \bar{U}^m$ doivent passer par P, pôle de l'hyperplan

$$J^{m+2}\, J^{m+1}\, J^m\, J^{m-1}\, J^{m-2} = J^2\, J^1\, J\, J^{-1}\, J^{-2}.$$

Le point P^m doit donc coïncider avec P et la suite $\mathcal{P}$ a comme la suite $\mathcal{J}$ la période m.

Lorsque v varie, la droite $U\bar{U}$ engendre une développable dont l'arête de rebroussement la courbe (P^{-1}). La droite $U^m\, \bar{U}^m$ engendre également une développable ayant la même arête de rebroussement, donc les points U^m, $\bar{U}^m$ appartiennent à la droite $U\bar{U}$ passant par P et P^{-1}.

De même, les points U^{m-1}, $\bar{U}^{m-1}$, V, $\bar{V}$, P, P^1 appartiennent à une même droite.

L'espace polaire de la droite $U\bar{U} = PP^{-1}$ par rapport à Q est $J^1\, J\, J^{-1}\, J^{-2}$ donc les hyperplans polaires des points U^m, $\bar{U}^m$ passent par J et les droites $U^m\, J$, $\bar{U}^m\, J$ touchent Q au point J.

L'hyperplan polaire de J est $P^{-2}\, P^{-1}\, P\, P^1\, P^2$ et contient les points U^m et $\bar{U}^m$, donc les droites $J\bar{U}^m$, $J\, U^m$ touchent Q en U^m, $\bar{U}^m$. Il en résulte que ces droites appartiennent à l'hyperquadrique Q.

La droite $U\bar{U}$ ne rencontre Q qu'aux points U, $\bar{U}$, donc les points U^m, $\bar{U}^m$ doivent coïncider, dans un certain ordre, avec les points U, $\bar{U}$.

Deux cas peuvent se présenter:

1.° U^m coïncide avec U et $\bar{U}^m$ avec $\bar{U}$. Alors U^{m-1} coïncide avec V et $\bar{U}^{m-1}$ avec $\bar{V}$.

2.° Le point U^m coïncide avec $\bar{U}$ et $\bar{U}^m$ avec U. Dans ces conditions, U^{m-1} coïncide avec $\bar{V}$ et le point $\bar{U}^{m-1}$ avec V.

3. Le point U^m coïncide avec le point U et le point $\bar{U}^m$ avec le point $\bar{U}$, les suites de Laplace L et $\bar{L}$ sont périodiques. On sait que la période de ces suites doit être paire. Nous poserons $m = 2n + 2$.

Dans ces conditions, nous avons montré que les points U^n, U^{n+1} qui coïncident avec les points V^{n+1} et V^n, appartiennent à Q. Il en est de même des points $\bar{U}^n$, $\bar{U}^{n+1}$ qui coïncident avec $\bar{V}^{n+1}$, $\bar{V}^n$.

Les droites $U^n V^n$ et $\bar{U}^n \bar{V}^n$ appartiennent à Q et se coupent au point J^{n+1}. Elles représentent les faisceaux des tangentes à deux surfaces (y), $(\bar{y})$.

La droite j', image du point J^{n+1} engendre une congruence W dont les napes focales sont les surfaces (y), $(\bar{y})$.

4. Dans le second cas, nous avons

$$\bar{U}^m = U, \; U^m = \bar{U}, \; \bar{U}^{m-1} = V, \; U^{m-1} = \bar{V}.$$

On en déduit

$$\bar{U}^{2m} = \bar{U}, \; U^{2m} = U,$$

de sorte que les suites L, $\bar{L}$ ont même période 2m mais coïncident. On a

$$U^i = \bar{U}^{m+i}, \; V^i = \bar{V}^{m+i}$$

et de même,

$$\bar{V}^m = U, \; V^m = \bar{V}, \; \bar{V}^{m-1} = U, \; V^{m-1} = \bar{U}.$$

Les suites L et $\bar{L}$ sont donc confondues en une seule de période 2m. Les nappes focales de la congruence (j) correspondent aux droites U V et $V^{m-1} V^m = U^m U^{m-1}$ de la suite L.

Si une congruence W est associée à une suite de Laplace $\mathcal{J}$ de période m.

1.° ses nappes focales sont associées à des suites de Laplace L, $\bar{L}$ *de même période* $m = 2n + 2$, *ou.*

2.° ses nappes focales sont associées à une même suite de Laplace de période 2m.

Liége, le 23 août 1967.