SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES DE DIVISEUR DEUX

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liège)

On établit que toute surface algébrique de diviseur $\sigma = 2$ est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique.

On sait que sur certaines surfaces algébriques, il peut exister des systèmes linéaires distincts dont les multiples suivant un certain entier positif coïncident. Le nombre de ces systèmes a un maximum σ, le diviseur de Severi de la surface, qui ne dépend que de celle-ci. Lorsque Severi a construit cette théorie [1], une seule surface ayant un diviseur σ supérieur à l'unité était connue, la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, pour laquelle $\sigma = 2$. Plus tard, Enriques a démontré que cette surface était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis appartenant à une surface régulière dont la courbe canonique est d'ordre zéro [2]. En utilisant ce théorème, il est facile de voir pourquoi la surface d'Enriques a le diviseur $\sigma = 2$. Partant de cette remarque, nous avons établi que la surface image d'une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique, avait le diviseur $\sigma = p$ [3]. Ce théorème montrait l'existence de surfaces ayant un diviseur de Severi quelconque, mais n'établissait pas que toutes les surfaces de diviseur supérieur à l'unité pouvaient être obtenues par ce procédé.

Dans cette note, nous établissons que *toute surface algébrique de diviseur* $\sigma = 2$ *est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique.*

La démonstration est élémentaire, mais il ne semble pas possible de l'étendre aux surfaces de diviseur supérieur à deux.

1. Soit Φ une surface algébrique de diviseur $\sigma = 2$. Nous prendrons pour modèle projectif de Φ une surface d'un espace linéaire S_r à r dimensions, privée de points singuliers. Soient n l'ordre de Φ, π le genre de ses

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XII, No 3, p. 403–405, BUCAREST, 1967

6 – c. 4236

sections hyperplanes Γ_1. Il existe sur la surface Φ un second système $|\Gamma_2|$, de mêmes caractères que le système $|\Gamma_1|$, tel que

$$|2\Gamma_1| = |2\Gamma_2|.$$

Considérons, dans un espace S_{2r+1} à $2r+1$ dimensions, deux espaces linéaires σ_1, σ_2 à r dimensions, ne se rencontrant pas. Rapportons projectivement les courbes Γ_1 aux hyperplans de σ_1 et les courbes Γ_2 aux hyperplans de σ_2. Soient Φ_1, Φ_2 les transformées de Φ obtenues. Nous désignerons par Γ_1 les sections hyperplanes de Φ_1, par Γ_2 celles de Φ_2, par $\overline{\Gamma}_2$ les courbes qui correspondent sur Φ_1 aux courbes Γ_2 et par $\overline{\Gamma}_1$ celles qui corrrespondent sur Φ_2 aux courbes Γ_1.

Les surfaces Φ_1, Φ_2 sont liées par une transformation birationnelle T. Nous allons considérer des surfaces engendrées par des droites joignant les points homologues dans T de Φ_1 et Φ_2.

2. Soient Γ_1 une section hyperplane de Φ_1 et $\overline{\Gamma}_1$ la courbe que T lui fait correspondre sur Φ_2. Un hyperplan passant par Γ_1 coupe $\overline{\Gamma}_1$ en n points, donc cet hyperplan contient n droites s'appuyant sur Γ_1 et $\overline{\Gamma}_1$ en des points homologues dans T. De plus, cet hyperplan contient la courbe Γ_1 d'ordre n, donc les droites joignant les points homologues dans T des courbes Γ_1, $\overline{\Gamma}_1$ engendrent une surface réglée V_2^{2n} d'ordre $2n$.

De même, les droites joignant les points homologues de deux courbes Γ_2, $\overline{\Gamma}_2$ correspondantes engendrent une surface réglée $\overline{V}_2^{2n}$ d'ordre $2n$.

Un hyperplan passant par σ_1 coupe Φ_2 suivant une courbe Γ_2 et contient donc la surface V_2^{2n} relative à cette courbe. Il contient en outre Φ_1 donc les droites joignant les points homologues dans T des surfaces Φ_1, Φ_2 engendrent une variété V_3^{3n} à trois dimensions.

On voit que les surfaces $\overline{V}_2^{2n}$ sont situées dans des hyperplans passant par σ_1 et les surfaces V_2^{2n} dans des hyperplans passant par σ_2.

3. Considérons dans l'espace σ_1 une hyperquadrique $\varphi_1 = 0$ coupant Φ_1 suivant une courbe $(2\Gamma_1)$ du système $|2\Gamma_1| = |2\overline{\Gamma}_2|$. A cette courbe correspond sur Φ_2 une courbe $(2\Gamma_2)$ du système $|2\Gamma_2| = |2\overline{\Gamma}_1|$. On peut toujours, en prenant éventuellement r assez grand, choisir la courbe $(2\Gamma_1)$ de telle sorte que la courbe correspondante $(2\Gamma_2)$ soit située sur une hyperquadrique $\varphi_2 = 0$ de σ_2.

Cela étant, considérons dans S_{2r+1} l'hyperquadrique Q d'équation

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0.$$

Elle coupe la variété V_3^{3n} suivant une surface d'ordre en comprenant comme partie la surface lieu des droites joignant les points homologues des courbes $(2\Gamma_1)$ et $(2\Gamma_2)$. Cette surface est d'ordre $4n$ et l'intersection est complétée par une surface F d'ordre $2n$.

L'hyperquadrique Q rencontre en général une droite joignant des points de Φ_1, Φ_2 homologues dans T en deux points et ces couples de points forment sur F une involution I d'ordre deux dont Φ_1 et Φ_2 sont des images.

Les surfaces V_2^{2n}, $\overline{V}_2^{2n}$ découpent sur la surface F des courbes C_1 C_2 qui sont situées les courbes C_1 dans des hyperplans passant par σ_2 et les courbes C_2 dans des hyperplans passant par σ_1.

4. Désignons par H l'homographie biaxiale harmonique d'axes σ_1, σ_2 dans S_{2r+1}. La variété V_3^{3n} et les surfaces V_2^{2n}, $\bar{V}_2^{2n}$, F sont transformées en elles-mêmes par H. Sur F, H détermine l'involution I.

Les points unis éventuels de l'involution I sont situés sur σ_1 ou σ_2, c'est-à-dire sur les surfaces Φ_1, Φ_2 et précisément sur les courbes $(2\Gamma_1)$ ou $(2\Gamma_2)$. Ces points sont des points de diramation pour la correspondance [1, 2] existant entre Φ_1 et F, ou entre Φ_2 et F.

Soit P_1 un point de la courbe $(2\Gamma_1)$, de diramation pour la correspondance entre les surfaces Φ_1 et F. Il est uni pour l'involution I. De plus, le point P_2 que T lui fait correspondre sur la courbe $(2\Gamma_2)$ est de diramation pour la correspondance entre Φ_2 et F. Si tous les points de $(2\Gamma_1)$ étaient de diramation pour la correspondance entre Φ_1 et F, cette dernière surface n'existerait pas. L'involution I possède donc un nombre fini de points unis.

Soit α le nombre des points unis de l'involution I situés sur la courbe $(2\Gamma_1)$. Elle possède également α points unis sur la courbe $(2\Gamma_2)$. Dans la correspondance (1, 2) entre les surfaces Φ_1 et F, il y a α points de diramation sur Φ_1 et 2α points unis sur F, ce qui est absurde. Donc $\alpha = 0$ et l'involution I est dépourvue de points unis.

On en conclut que les systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ ont le degré $2n$, le genre $2\pi - 1$ et que les courbes C_1, C_2 se rencontrent en $2n$ points.

5. Sur la surface Φ_1, on a $|2\Gamma_1| = |2\overline{\Gamma}_2|$, donc sur la surface F les courbes correspondantes donnent $|2C_1| = |2C_2|$.

Sur la surface F, la division doit être une opération univoque, sans quoi le diviseur de la surface Φ serait supérieur à deux. Les systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ coïncident donc et forment le système des sections hyperplanes de F.

Ainsi se trouve établi le théorème énoncé au début.

Remarquons que l'on peut prendre pour surface Φ une transformée birationnelle d'une surface d'Enriques dépourvue de points singuliers. Nous avons donc une démonstration du théorème d'Enriques ne faisant pas intervenir des notions analogues à celles utilisées par Enriques.

Reçu le 10 août 1966 *Liège*

BIBLIOGRAPHIE

1. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* Annales scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 1908, pp. 449—468.
2. Enriques, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno.* Rendiconto dell'Accademia di Bologna, 1907—1908, pp. 40—45. Voir aussi L. Godeaux, *Sur un théorème de F. Enriques.* Bulletin des Sciences Mathématiques, 1963, pp. 41—46 ; *Sopra un teorema di F. Enriques.* Atti del VII° Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Genova, 1963, pp. 368—370.
3. Godeaux, *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité.* Bulletin de l'Académie de Cracovie, 1914, pp. 362—368. Voir aussi notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications.* Roma, Edizioni Cremonese, 1963.