Dagli « Atti dell'VIII Congresso
dell'Unione Matematica Italiana »
Trieste, 2-7 Ott. 1967

L. GODEAUX - *Surface contenant une seule courbe canonique de genre cinq.*

Dans nos recherches sur les surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$, nous avons démontré que si le système bicanonique d'une telle surface était irréductible et de dimension supérieure à un, elle était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface régulière possédant une seule courbe canonique (1). Nous sommes donc conduit à la détermination de surfaces présentant cette particularité, problème qui ne semble pas facile.

Pour construire une surface ne possédant qu'une seule courbe canonique, on peut utiliser une propriété des involutions cycliques privées de points unis appartenant à une surface algébrique, en supposant que celle-ci possède, dans son système canonique, une courbe isolée appartenant à l'involution. A cette courbe correspond, sur la surface image de l'involution, la courbe canonique de celle-ci (2). Nous appliquons ce procédé pour construire, dans un espace à cinq dimensions, une surface du seizième ordre possédant une seule courbe canonique de genre cinq.

1. Soit dans un espace à six dimensions S_6, formé par la réunion d'un plan (y) et d'une espace (x) à trois dimensions, une

(1) ***Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls*** **(Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41).**

(2) **Voir notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).**

homografie H de période quatre,

$$\text{(H)} \qquad \frac{x_0'}{ix_0} = \frac{x_1'}{ix_1} = \frac{x_2'}{-ix_2} = \frac{x_3'}{-ix_3} = \frac{y_0'}{-y_0} = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2}.$$

Considérons une surface intersection de quatre hyperquadriques, transformée en soi par l'homographie H et ne contenant aucun point uni de cette homographie.

Posons

$$\alpha_1 = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_1^2, \qquad \alpha_2 = b_0x_2^2 + b_1x_2x_3 + b_2x_3^2,$$

$$\alpha_1' = a_0'x_0^2 + a_1'x_0x_1 + a_2'x_1^2, \qquad \alpha_2' = b_0'x_2^2 + b_1'x_2x_3 + b_2'x_3^2,$$

$$\alpha = a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_0x_3 + a_{12}x_1x_2,$$

$$\alpha' = a_{02}'x_0x_2 + a_{12}'x_1x_2 + a_{03}'x_0x_3 + a_{12}'x_1x_2.$$

Les quatre hyperquadriques rencontrent le plan (y) suivant des coniques appartenant à un système linéaire formé des coniques conjuguées aux coniques-enveloppe tangentes à quatre droites. Dans le cas général où nous nous placerons, l'équation de ce système est

$$\lambda_0(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2) + \lambda_1y_1y_2 + \lambda_2y_2y_0 + \lambda_3y_0y_1 = 0.$$

Les équations de la surface F peuvent s'écrire

$$y_1y_2 = \alpha, \quad y_2y_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad y_0y_1 = \alpha_1' + \alpha_2', \quad y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = \alpha'.$$

On vérifie aisément que cette surface ne rencontre aucun des axes ponctuels de l'homographie H. Celle-ci engendre donc sur F une involution I, cyclique d'ordre quatre, privée de points unis. Il en est de même de l'involution I^2, carré de la première.

2. Désignons par F' la surface image de l'involution I^2. Nous obtiendrons une image de cette surface en projetant la surface F du plan (y) sur l'espace (x). Nous obtenons ainsi pour F' l'équation

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_2' + \alpha_2')^2 + \alpha^2[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_1' + \alpha_2')^2] = \alpha\alpha'(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2').$$

La surface F' représente une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface algébrique, son système canonique correspond à celui des systèmes de dimension minimum appartenant à l'involution compris dans le système canonique de F. On sait que celle-ci a pour système canonique celui de ses sections hyperplanes et que par conséquent le système canonique de F' correspond au système découpé par

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0.$$

Le système canonique de F' est donc découpé par les surfaces

$$\lambda_0(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2') + \alpha[\lambda_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_2(\alpha_1' + \alpha_2')] = 0.$$

D'ailleurs, la surface F', d'ordre huit, posséde trois courbes doubles

$$\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1' + \alpha_2' = 0, \qquad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \qquad \alpha = \alpha_1' + \alpha_2' = 0$$

ayant en commun huit points triples pour la surface. Ses adjointes, du quatrième ordre, doivent passer par les courbes doubles.

3. Soit F'' une image de l'involution I. Aux courbes canoniques de F'' correspondent sur F des courbes canoniques appartenant à l'involution I et donnant un système de dimension minimum. La surface F'' contient donc une seule courbe canonique correspondant à la section de F par l'hyperplan $y_0 = 0$.

Sur la surface F' il correspond à cette courbe canonique al courbe découpée par la surface

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2') = 0.$$

Les hyperquadriques de S_6 découpent sur F le système bicanonique, de dimension 23. Il contient quatre systèmes linéaires de dimension cinq appartenant à l'involution I, notamment les systèmes

$$\lambda_0 y_0^2 + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 x_0 x_2 + \lambda_3 x_0 x_3 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1 x_3 = 0,$$

$$(1) \qquad \lambda_{00} x_0^2 + \lambda_{01} x_0 x_1 + \lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{22} x_2^2 + \lambda_{23} x_2 x_3 + \lambda_{33} x_3^2 = 0.$$

Le premier contient la transformée de la courbe canonique de F'' comptée deux fois; il lui correspond sur cette surface le système bicanonique et on voit donc que le bigenere de la surface F'' est $P_2 = 6$.

Pour obtenir un modèle projectif de F'', rapportons projectivement les hyperquadriques du second système aux hyperplans d'un espace S_5 à cinq dimensions en posant

$$(2) \qquad \rho X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i, k = 0, 1 \text{ ou } 2, 3).$$

Observons que la surface F'' appartient aux hyperquadriques

$$(3) \qquad X_{01}^2 - X_{00}X_{11} = 0, \qquad X_{23}^2 - X_{22}X_{33} = 0$$

qui sont des cônes ayant le premier pour sommet le plan σ_1 ($X_{00} = X_{01} = X_{11} = 0$) et le second, le plan σ_2 ($X_{22} = X_{23} = X_{33} = 0$).

En faisant la substitution (2), l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ devient l'équation d'un hyperplan $A = 0$ de S_5. L'équation $\alpha_1' + \alpha_2' = 0$ devient celle d'un hyperplan $A' = 0$. L'équation $\alpha^2 = 0$ devient celle d'une hyperquadrique $B = 0$ passant par les plans σ_1, σ_2. Enfin l'équation $\alpha\alpha' = 0$ devient l'équation d'une hyperquadrique $B' = 0$ passant également par les plans σ_1 et σ_2.

Les équations de F'' s'obtiennent en adjoignant aux équations (3) l'équation

$$A^2A'^2 + B(A^2 + A'^2) = AA'B',$$

qui représente une variété V_4^4 du quatrième ordre passant deux fois par l'espace à trois dimensions $A = A' = 0$.

4. La courbe canonique de F homologue de la courbe canonique de F'' a pour équations

$$(4) \qquad y_0 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1' + \alpha_2' = 0, \quad y_1y_2 = \alpha, \quad y_1^2 + y_2^2 = \alpha'.$$

Soit C cette courbe. Lorsque l'on projette la courbe C de la droite du plan (y) d'équation $y_0 = 0$ sur l'espace (x), le point (x_0, x_1, x_2, x_3) représente les points

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3, \\ y_1 & y_2 & ix_0 & ix_1 & -ix_2 & -ix_3, \\ y_1 & y_2 & -x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3, \\ y_1 & y_2 & -ix_0 & -ix_1 & ix_2 & ix_3, \end{array}$$

formant un groupe de I. Le premier et le troisième points forment un groupe de I^2 de même que le second et le quatrième points. Il en résulte que dans le passage de C à la courbe C' correspondante sur F', il correspond à C une courbe d'ordre huit infiniment voisine de la courbe $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1' + \alpha_2' = 0$. Cette courbe passe par les huit points homologues sur F' des 16 points de F communs aux courbes (4). Cette courbe, formée de deux branches infiniment voisines de la biquadratique $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1' + \alpha_2' = 0$, est de genre 9, valeur du genre linéaire de F'.

Observons que des équations (4), on deduit

$$\alpha[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_1' + \alpha_2')^2] = \alpha'(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1' + \alpha_2'),$$

équation d'une surface passant par C.

5. La courbe canonique de F'' correspond à la courbe (4), elle se trouve donc dans les hyperplans

$$A = 0, \qquad A' = 0,$$

c'est-à-dire dans l'espace S_3 double pour la variété V_4^4.

Cet espace S_3 rencontre l'intersection des cônes (3) suivant une biquadratique gauche et à la courbe C' correspond une courbe du huitème ordre C'' formée de deux branches infiniment voisines de cette biquadratique. La courbe canonique C'' de F'' est de genre cinq et passe par les quatre points de F'' homologues des points de F communs aux hypersurfaces (4).