SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES À TROIS DIMENSIONS DE GENRE GÉOMÉTRIQUE ZÉRO ET DE BIGENRE UN

par **Lucien Godeaux** (Liège, Belgique)

On sait qu'Enriques a construit une surface algébrique dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro et précisément la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Nous nous proposons dans cette note de construire une variété algébrique à trois dimensions privée de surface canonique mais possédant une surface bicanonique d'ordre zéro. La surface d'Enriques, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_4 = 1$, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface ayant une courbe canonique d'ordre zéro, de genres $p_a = p_g = P_4 = 1$. Nous obtenons la variété cherchée par un procédé analogue.

La surface de Steiner, passant doublement par les arêtes d'un trièdre et triplement par le sommet, a pour équation

$$x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 = x_0 x_1 x_2 x_3 .$$

Nous établissons le théorème suivant:

Si dans l'équation d'une surface de Steiner, on remplace les coordonnées courantes par des formes algébriques du second degré en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, linéairement indépendantes, on obtient, dans un espace à quatre dimensions, une hypersurface du huitième ordre, privée de surface canonique mais possédant une surface bicanonique d'ordre zéro.

Nous obtenons chemin faisant un théorème que nous avons établi autrefois [1].

Si dans l'équation d'une surface de Steiner, on remplace les coordonnées courantes par des formes algébriques du second degré en x_0, x_1, x_2, x_3, *on obtient une surface du huitième ordre de genres* $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$ *dont le diviseur de Severi est* $\sigma = 2$.

Dans une note récente [2] nous avons établi qu'une variété algébrique à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro a l'ordre $\pi - 1$, π étant le genre des sections curvilignes de la variété et est située dans un espace à n dimensions, où $3n \leqslant \pi + 9$. Nous démontrons que:

Si une variété algébrique à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro contient une involution du second ordre ayant un nombre fini non nul de points unis, l'image de cette involution est une variété privée de surface canonique mais possédant une surface bicanonique d'ordre zéro.

Une surface privée de courbe canonique mais ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro se ramène par une transformation birationnelle à une surface d'Enriques [3]. Il semble que pour les variétés à trois dimensions, une propriété analogue n'existe pas.

Nous utilisons ici les théorèmes sur les involutions cycliques que l'on trouvera dans l'ouvrage que nous avons récemment publié sur cette question [4].

1. La surface intersection complète de quatre hyperquadriques linéairement indépendantes dans un espace linéaire S_6 à six dimensions a pour système canonique celui de ses sections hyperplanes [5], par conséquent, la variété algébrique à trois dimensions V_3^{16} intersection complète de quatre hyperquadriques linéairement indépendantes dans un espace S_7 à sept dimensions possède une surface canonique d'ordre zéro. Le système $|F|$ de ses sections hyperplanes est son propre adjoint.

Les surfaces F sont régulières et ont les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$.

Considérons dans S_7 l'homographie harmonique H d'équations

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{x_4'}{x_4} = \frac{x_5'}{-x_5} = \frac{x_6'}{-x_6} = \frac{x_7'}{-x_7},$$

qui a comme axes ponctuels $\sigma_4\,(x_5 = x_6 = x_7 = 0)$ à quatre dimensions et un plan $\sigma_2\,(x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$.

Nous supposerons que la variété V_3^{16} est transformée en soi par l'homographie H. Dans ces conditions les équations de la variété peuvent s'écrire

$$(1) \quad \varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2, \quad \varphi_1 = x_6 x_7, \quad \varphi_2 = x_7 x_5, \quad \varphi_3 = x_5 x_6,$$

$\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ représentant quatre hyperquadriques de σ_4, linéairement indépendantes, ayant 16 points communs distincts. De plus, la figure de référence peut être choisie de manière que dans le plus σ_2, le triangle de référence soit le triangle diagonal des quatre droites communes aux coniques conjuguées des coniques découpées sur le plan par les hyperquadriques définissant la variété [6].

Désignons par Ω_3^8 la variété à trois dimensions image de l'involution I engendrée par H sur V_3^{16}, obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace à quatre dimensions les sections de V_3^{16} par les hyperplans passant par le plan σ_2, ou, ce qui revient au même, projetons V_3^{16} du plan σ_0 sur l'espace σ_4. Cela revient à éliminer x_5, x_6, x_7 entre les équations (1). On obtient ainsi l'équation de la variété Ω_3^8:

$$(2) \qquad \varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 = \varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3.$$

La variété Ω_3^8 possède:

Trois surfaces $\Psi_1(\varphi_2 = \varphi_3 = 0)$, $\Psi_2(\varphi_3 = \varphi_1 = 0)$, $\Psi_3(\varphi_1 = \varphi_2 = 0)$ du quatrième ordre, doubles pour la variété;

Une courbe $\Gamma(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$ du huitième ordre, triple pour la variété;

Seize points $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ quadruples pour la variété.

L'involution I possède seize points unis, intersections de la variété V_3^{16} avec l'espace σ_4. Nous avons démontré qu'à un point uni de l'involution I correspond sur la variété Ω_3^8 un point de diramation quadruple pour cette variété.

Pour abréger l'écriture dans la suite, nous désignerons par V la variété V_3^{16} et par Ω la variété Ω_3^8.

2. Désignons par F_0 les sections de V par les hyperplans passant par σ_2, par F_1 les sections par les hyperplans passant par σ_4. Appelons Φ_0 les images des surfaces F_0 sur Ω et Φ_1 celles des surfaces F_1.

Considérons une surface F_0, soit $\overline{F}_0$, découpée par un hyperplan passant par σ_2 mais non par un des points communs à V et à σ_4. Soit $\overline{\Phi}_0$ la surface qui lui correspond.

L'homographie H détermine sur $\overline{F}_0$ une involution I_0 privée de points unis. Le système canonique $|(\overline{F}_0, F)|$ de $\overline{F}_0$ comprend deux systèmes composés au moyen de I_0. L'un, $|(\overline{F}_0, F_0)|$ a la dimension trois et l'autre, $|(\overline{F}_0, F_1)|$ a la dimension deux. Comme nous l'avons démontré, le transformé du système canonique de la surface $\overline{\Phi}_0$ est celui des systèmes précédents qui a la dimension minimum, c'est-à-dire le second. La surface $\overline{\Phi}_0$ a donc le genre géométrique $p_g = 3$.

Entre le genre arithmétique $p_a = 7$ de $\overline{F}_0$ et celui p_a' de $\overline{\Phi}_0$, nous avons la relation

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1),$$

d'où $p_a' = 3$, ce qui pouvait être déduit à priori puisque $\overline{\Phi}_0$ est, comme $\overline{F}_0$, une surface régulière.

Nous avons

$$\frac{x_6 x_7}{\varphi_1} = \frac{x_7 x_5}{\varphi_2} = \frac{x_5 x_6}{\varphi_3}$$

ou

$$x_5 \varphi_1 = x_6 \varphi_2 = x_7 \varphi_3$$

et

$$\frac{x_5}{\varphi_2 \varphi_3} = \frac{x_6}{\varphi_3 \varphi_1} = \frac{x_7}{\varphi_1 \varphi_2}.$$

Le système canonique de la surface $\overline{\Phi}_0$ est donc découpé sur Ω par les hypersurfaces

$$\lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 + \lambda_2 \varphi_3 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_1 \varphi_2 = 0,$$

du quatrième ordre, passant simplement par les surfaces Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 et doublement par la courbe Γ.

Une courbe $(\overline{F}_0, F_1)$ est de genre 17 et H détermine sur cette courbe une involution privée de points unis; l'image de cette involution est donc, d'après la formule de Zeuthen, une courbe de genre 9.

Sur la surface $\overline{\Phi}_0$, le système canonique est le système $|(\overline{\Phi}_0, \Phi_1)|$ et par conséquent $|\Phi_1|$ est l'adjoint à $|\Phi_0|$. Quant au système $|(\overline{\Phi}_0, \Phi_1)|$, c'est le système des sections hyperplanes de Ω.

Les sections hyperplanes Φ_0 de Ω sont des surfaces de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$.

3. Le système canonique d'une hypersurface d'ordre n d'un espace à quatre dimensions est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n - 5$ passant par les surfaces doubles de l'hypersurface donnée. Les surfaces canoniques de Ω sont donc découpées par les hypersurfaces cubiques passant par les surfaces Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3. Une telle hypersurface rencontre l'hyperquadrique $\varphi_1 = 0$ suivant Ψ_2 et Ψ_3, c'est-à-dire suivant une surface d'ordre huit. Elle contient donc $\varphi_1 = 0$ comme partie et est complétée par un hyperplan qui devrait contenir Ψ_1, ce qui est absurde. Donc:

L'hypersurface Ω est dépourvue de surface canonique.

Les hypersurfaces bicanoniques de Ω sont découpées par les hypersurfaces du sixième ordre passant doublement par les surfaces Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3. L'hypersurface

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 0$$

satisfait à cette condition. Il ne peut en exister une seconde, car elle rencontrerait l'hyperquadrique $\varphi_1 = 0$ suivant une surface d'ordre 16 et contiendrait cette hyperquadrique. Pour la même raison, elle contiendrait les hyperquadriques $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ et serait donc confondue avec l'hypersurface précédente. Celle-ci ne rencontre plus Ω en dehors des surfaces Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3.

L'hypersurface Ω possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

L'hypersurface Ω a les genres $P_g = 0$, $P_2 = 1$.

4. Considérons maintenant la surface F_1 section de la variété V par un hyperplan passant par σ_4. Il lui correspond sur Ω la surface Φ_1 obtenue en éliminant x_5, x_6, x_7 entre les équations (1) et l'équation

$$\lambda_1 x_5 + \lambda_2 x_6 + \lambda_3 x_7 = 0,$$

c'est-à-dire la surface Φ_1 section de Ω par l'hypersurface

$$\lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 + \lambda_2 \varphi_3 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_1 \varphi_2 = 0. \tag{3}$$

L'involution I_1 déterminée par H sur la surface F_1 possède 16 points unis. Entre le genre $p_a = 7$ de F_1 et celui p_a' de Φ_1, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.16,$$

d'où $p_a' = 5$.

Sur une surface $\bar{F}_1$, le système canonique contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_1. L'un, $|(\bar{F}_1, F_0)|$ a la dimension quatre et est dépourvu de points-base, l'autre, $|(\bar{F}_1, F_1)|$ est un faisceau ayant pour points-base les points unis de I_1.

Le système canonique de la surface $\overline{\Phi}_1$, homologue de $\overline{F}_1$, est celui de ces systèmes qui est dépourvu de points-base. Le genre géométrique de $\overline{\Phi}_1$ est donc $p_g = 5$ et son système canonique coïncide avec le système $|(\overline{\Phi}_1, \Phi_0)|$ des sections hyperplanes de la surface. Ces sections hyperplanes ont le genre 9.

Une courbe (F_1, F_1) est de genre 17 et passe par les points unis de I_1, donc la courbe correspondante (Φ_1, Φ_1) est de genre cinq.

Les surfaces Φ_1 sont d'ordre huit.

Une surface Φ_1 *est découpée sur l'hypersurface* Ω *par une hypersurface* (3) *et son système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes. Elle a les genres* $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$. *La partie variable de l'intersection de deux surfaces* Φ_1 *est de genre cinq.*

5. Les hyperquadriques de S_7 découpent sur V le système $|2F|$ de dimension 31. Il contient deux systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I; l'un contient les surfaces $2F_0$ et $2F_1$, l'autre les surfaces $F_0 + F_1$.

Soit $\psi = 0$ l'équation d'une hyperquadrique de σ_4 linéairement indépendante des hyperquadriques $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$. Elle dépend de 10 paramètres et le système comprenant les surfaces $2F_0$ et $2F_1$ est découpé sur V par les hyperquadriques

$$\psi + \lambda_{11} x_5^2 + \lambda_{22} x_6^2 + \lambda_{33} x_7^2 + 2\lambda_{23} x_6 x_7 + 2\lambda_{31} x_7 x_5 + 2\lambda_{12} x_5 x_6 = 0.$$

Il a la dimension 16. Il lui correspond sur Ω les surfaces découpées par les hypersurfaces du huitième ordre

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\psi + \lambda_{11}\varphi_2^2\varphi_3^2 + \lambda_{22}\varphi_3^2\varphi_1^2 + \lambda_{33}\varphi_1^2\varphi_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_3(\lambda_{23}\varphi_1 + \lambda_{31}\varphi_2 + \lambda_{12}\varphi_3) = 0. \tag{4}$$

Parmi ces surfaces se trouvent les surfaces $2\Phi_0$ et $2\Phi_1$.

Observons, ce qui résulte d'ailleurs de la théorie des involutions, que les hypersurfaces

$$\lambda_{11}\varphi_2^2\varphi_3^2 + \lambda_{22}\varphi_3^2\varphi_1^2 + \cdots + 2\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2\varphi_3^2 = 0 \tag{5}$$

touchent l'hypersurface Ω le long d'une surface Φ_1.

Chacun des 16 points de diramation de l'hypersurface Ω est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. Si nous désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$ les surfaces rationnelles ainsi obtenues, nous avons, d'après la théorie des involutions, la relation fonctionnelle

$$2\Phi_0 \equiv 2\Phi_1 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{16}. \tag{6}$$

Le second système de $|2F|$ appartenant à l'involution I est découpé sur V par les hyperquadriques

$$\Sigma x_i x_k = 0, \qquad (i=0, 1, 2, 3, 4;\ k=5, 6, 7).$$

Il a la dimension 14. Il lui correspond sur Ω le système découpé par les hypersurfaces

$$\Sigma x_i \varphi_j = 0, \qquad (i=0, 1, 2, 3, 4;\ j=5, 6, 7)$$

qui comprend les surfaces $\Phi_0 + \Phi_1$. Ces surfaces passent par les points de diramation de Ω et y ont des points doubles coniques.

6. Le fait que le système canonique d'une section hyperplane Φ_0 de Ω est découpé par les surfaces Φ_1 et que celles-ci ont pour courbes canoniques leurs sections hyperplanes se traduit par les relations fonctionnelles

$$\Phi_0' \equiv \Phi_1 + \Sigma A, \qquad \Omega_1' \equiv \Phi_0.$$

On en déduit

$$\Phi_0'' \equiv \Phi_0 + \Sigma A, \qquad \Phi_1'' \equiv \Phi_1 + \Sigma A,$$

ce qui montre bien l'existence d'une surface bicanonique d'ordre zéro.

7. Revenons à une section hyperplane $\overline{\Phi}_0$ de la variété Ω, par exemple à la section par l'hyperplan $x_4 = 0$.

La surface $\overline{\Phi}_0$ ne passant pas par les points de diramation de Ω, la relation fonctionnelle (6) donne

$$2(\overline{\Phi}_0, \Phi_0) \equiv 2(\overline{\Phi}_0, \Phi_1)$$

et la surface $\overline{\Phi}_0$ a le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

La relation (4), où l'on fait $x_4 = 0$, montre qu'il existe une surface du huitième ordre, circonscrite à la surface $\overline{\Phi}_0$ le long d'une courbe $(\overline{\Phi}_0, \Phi_1)$.

8. Considérons maintenant, dans un espace S_n à n dimensions, une variété irréductible V, à trois dimensions, possédant une surface canonique d'ordre zéro. Si π est le genre des sections curvilignes de cette variété, nous avons montré qu'elle est d'ordre $\pi - 1$ et que l'on a $3n \leqslant \pi + 9$. Le système $|F|$ des sections hyperplanes de V est son propre adjoint.

Supposons que la variété V soit transformée en soi par une homographie harmonique H possédant deux axes ponctuels σ_0, σ_1 dont la somme des dimensions vaut $n-1$, rencontrant V le premier en x_0 points, le second en x_1 points.

Appelons F_0 les sections de V par des hyperplans passant par σ_1 et F_1 celles faites par des hyperplans passant par σ_0. Nous désignerons par Ω une variété image de l'involution I déterminée par H sur V, par Φ_0 les surfaces correspondant aux surfaces F_0 et par Φ_1 celles qui correspondent aux surfaces F_1.

Sur une surface $\overline{F}_0$ du système $|F_0|$ le système canonique est découpé par les surfaces F et contient deux systèmes composés au moyen de l'involution I. L'un $|(\overline{F}_0, F_0)|$ a pour points-base les x_1 points unis de I appartenant à σ_1, l'autre, $|(\overline{F}_0, F_1)|$ est dépourvu de points-base et est donc le transformé du système canonique de la surface $\overline{\Phi}_0$ homologue de $\overline{F}_0$. On en conclut la relation fonctionnelle

$$\Phi_0' \equiv \Phi_1 + X_0,$$

X_0 étant un terme formé de composantes des points de diramation de Ω appartenant aux surfaces Φ_1.

En répétant le même raisonnement pour les surfaces F_1, on a

$$\Phi_1' \equiv \Phi_0 + X_1,$$

X_1 étant formé de composantes des points de diramation de Ω appartenant aux surfaces Φ_0.

Par suite,

$$|\Phi_0''| = |\Phi_1' + X_0| = |\Phi_0 + X_0 + X_1| \cdot |\Phi_1''| = |\Phi_0' + X_1| = |\Phi_1 + X_1 + X_0|,$$

et la variété Ω, dépourvue de surface canonique, possède une surface bicanonique d'ordre zéro, les points de diramation étant des points isolés sur le modèle projectif considéré. Ainsi se trouve démontré le théorème énoncé à la fin de l'introduction.

À chacun des x_1 points unis de I situés dans σ_1 correspondent des points quadruples de la variété Ω et chacun de ceux-ci est équivalent à une surface rationnelle que nous désignerons par A_{0i} $(i = 1, 2, \ldots, x_1)$. Chacun de ces points de diramation est double conique pour les surfaces Φ_0.

De même, aux x_0 points unis de I appartenant à l'espace σ_0 correspondent des points quadruples de Ω, doubles pour les surfaces Φ_1, équivalents à des surfaces rationnelles que nous désignerons par A_{1k} $(k = 1, 2, \ldots, x_0)$. D'après la théorie des involutions, on a

$$2\Phi + \Sigma A_{1k} \equiv 2\Phi_1 + \Sigma A_{0i}. \tag{7}$$

On remarquera que si x_1 par exemple est nul, les surfaces Φ_0 ont le diviseur de Severi $\sigma = 2$. Mais il importe de remarquer que les raisonnements précédents supposent que l'un au moins des nombres x_0, x_1 n'est pas nul.

9. Voici un exemple d'une variété Ω satisfaisant aux conditions précédentes.

Dans un espace S_5 la variété V_3^8 intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface du quatrième ordre possède une surface canonique d'ordre zéro. Les sections hyperplanes de V_3^8 sont des surfaces de genres $p_a = p_g = 5$ et les sections curvilignes C de la variété ont le genre 9. Supposons que la variété soit transformée en soi par une homographie harmonique H ayant comme axes deux plans. Dans chacun de ces plans, l'involution I déterminée par H sur V_3^8 possède huit points unis.

La variété Ω image de l'involution I est dépourvue de surface canonique et possède une surface bicanonique d'ordre zéro. En conservant les notations précédentes, la relation (7) devient

$$2\,\Phi_0 + A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{18} \equiv 2\,\Phi_1 + A_{01} + A_{02} + \cdots + A_{08}\,.$$

Entre les genres arithmétiques $p_a = 5$ de F_0 (ou de F_1) et p_a' de Φ_0 (ou de Φ_1), on a la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.8,$$

d'où $p_a' = 3$.

On peut obtenir un modèle projectif de la variété Ω en rapportant projectivement les hyperquadriques de S_5 unies pour H et ne contenant pas les axes de cette homographie aux hyperplans d'un espace à 11 dimensions. On obtient dans cette espace une variété V_5^8 intersection des cônes projetant deux surfaces de Veronese à partir des espaces à cinq dimensions contenant l'une d'elles. La variété Ω est l'intersection de V_5^8 avec un hyperplan et une hyperquadrique.

Liège, Août 1965.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Godeaux, *Sur une surface algébrique du huitième ordre,* The Tôhoku Mathematical Journal, 1933, pp. 122-126.

[2] L. Godeaux, *Variétés algébriques à trois dimensions dont la surface canonique est d'ordre zéro,* Bulletin de l'Académie royale de Belgique, Juillet 1965 (en cours d'impression).

[3] Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno,* Memorie della Società dei XL, 1906, pp. 327-352; Memorie scelte di Geometria, volume II, pp. 241-272.

[4] L. Godeaux, *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications,* Edizioni Cremonese, Roma, 1963.

[5] Enriques-Campedelli, *Lezioni sulla Teoria delle Superficie algebriche,* Padova, Cedam, 1932. Voir pp. 336, 337.

[6] Voir par exemple Bertini, *Complementi di Geometria proiettiva,* Bologna, Zanichelli, 1928, pp. 281 et suivantes, ou L. Godeaux, *Géométrie algébrique,* tome I, Liège, Sciences et Lettres, 1948, pp. 195 et suivantes.