Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Febbraio-Aprile 1968 - Serie IV, vol. XLVI
n. 1-2 (pagg. 171-174)

Sur deux surfaces limites d'une surface de Steiner

A la mémoire de mon vieil Ami Oscar Chisini

On sait que la surface de Steiner, du quatrième ordre possède trois droites doubles, arêtes d'un trièdre, dont le sommet est triple pour la surface. La surface est rationnelle et on peut la représenter sur un plan de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent les coniques conjuguées [1] des coniques-enveloppes d'un faisceau tangentiel, c'est-à-dire les coniques tangentes à quatre droites. Trois coniques de ce faisceau tangentiel dégénèrent en des couples de faisceaux de rayons.

On peut aussi considérer les surfaces qui représentent les systèmes de coniques-lieux conjuguées aux coniques d'un faisceau tangentiel ne contenant que deux coniques dégénérées en des couples de faisceaux de rayons, ou ne possédant qu'une seule conique de cette espèce. On obtient encore des surfaces du quatrième ordre possédant trois droites doubles et un point triple, mais les droites sont infiniment voisines. On obtient donc des cas limites de la surface de Steiner, comme nous nous proposons de le montrer dans cette note [2].

1. Un faisceau de coniques-enveloppes ne possédant que deux coniques dégénérées en des couples de faisceaux de rayons est formé des coniques tangentes à trois droites, le point de contact avec une de ces droites étant fixe. Il peut être représenté par l'équation

$$\lambda_1(\xi_1^2-\xi_2^2)+\lambda_2\xi_0\xi_1=0.$$

---

(1) Rappelons que une conique-lieu $\Sigma a_{ki}x_i x_k = o(a_{ki} = a_{ki})$ est conjuguée à une conique-enveloppe $\Sigma \alpha_{ik}\xi_i\xi_k = o(\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$ lorsque l'on a $\Sigma a_{ik}\alpha_{ik} = o$. Voir Bertini, *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoeri, 1907). Voir pp. 327 et suiv. Voir aussi L. Godeaux, *Géométrie algébrique*, tome I (Liége, 1948), pp. 195 et suiv.

(2) Nous avons signalé l'existence de ces surfaces dans l'ouvrage cité plus haut.

Les coniques-lieux conjuguées forment le système linéaire

$$(1)\qquad \lambda_0 x_0^2+\lambda_1 x_0 x_2+\lambda_2 x_1 x_2+\lambda_3(x_1^2+x_2^2)=0.$$

Rapportons projectivement les courbes de ce système aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_0}{x_0^2}=\frac{X_1}{x_0 x_2}=\frac{X_2}{x_1 x_2}=\frac{X_3}{x_1^2+x_2^2}.$$

On obtient ainsi la surface F d'équation

$$(2)\qquad X_0 X_1^2 X_3=X_1^4+X_0^2 X_2^2.$$

Les coniques du système (1) données par $\lambda_3=0$ passent par le point O_1 (0, 1, 0) en y touchant la droite $x_2=0$ et par le point O_2 (0, 0, 1). Elles forment un système homaloïdal et par consequent les droites passant par le point O_3' (0, 0, 0, 1) ne rencontrent plus F qu'en un point. Le point O_3' est donc triple pour la surface F, comme on le voit d'ailleurs par l'équation (2).

Les courbes (1) rencontrent la droite $x_0=0$ suivant les points

$$\lambda_2 x_1 x_2+\lambda_3(x_1^2+x_2^2)=0$$

formant une involution ayant pour points unis le point $x_1=x_2=1$ et le point $x_1=1$, $x_2=-1$. Les coniques (1) passant par un point de la droite $x_0=0$ passent par le point conjugué de ce point dans l'involution. Les points de la droite $X_0=X_1=0$ représentent des couples de points du plan et cette droite est donc double pour la surface F.

Les courbes (1) rencontrent la droite $x_2=0$ en des couples de points

$$\lambda_0 x_0^2+\lambda_3 x_1^2=0,$$

formant une involution et on en conclut comme plus haut que la droite $X_1=X_2=0$ est double pour la surface F.

Projetons la surface F du point O_3' sur le plan $X_3=0$. On obtient ainsi une nouvelle repésentation plane de la surface F et à ses sections planes correspondent les courbes

$$(3)\qquad X_0 X_1^2(\lambda_0 X_0+\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2)+\lambda_3(X_1^4+X_0^2 X_2^2)=0.$$

On peut poser

$$X_1^4+X_0^2 X_2^2=(X_1^2+iX_0 X_2)(X_1^2-iX_0 X_2)$$

et on voit que l'équation $X_1^4+X_0^2X_2^2=0$ représente deux coniques tangentes en O_0, O_2 aux droites O_0O_1 et O_2O_1. La courbe passe donc deux fois par le point O_2 et deux fois par le point infiniment voisin de ce point sur la droite $X_0=0$. On en conclut que la même propriété existe pour les courbes (3). Par conséquent, la surface F passe doublement par une droite infiniment voisine de la droite $X_0=X_1=0$, située dans le plan $X_0=0$ et passant par le point O_3'.

La surface F, du quatrième ordre, passe doublement par la droite $X_1=X_2=0$, par la droite $X_0=X_1=0$ et par une droite infiniment voisine de celle-ci, située dans le plan $X_0=0$. Elle passe trois fois par le point O_3' commun à ces trois droites.

La surface F contient ∞^2 coniques comme la surface de Steiner. Elles sont découpées par les cônes

$$\lambda_0X_0X_2+\lambda_1X_1^2+\lambda_2X_1X_2=0.$$

de sommet O_3', qui passent par les droites doubles de la surface.

2. Un faisceau tangentiel de coniques-enveloppes ne contenant qu'une seule courbe dégénérée en deux faisceaux de rayons est représenté par une équation qui peut s'écrire

$$\lambda_1\xi_1\xi_2+\lambda_2(\xi_2^2+\xi_0\xi_1)=0.$$

Le système des coniques conjuguées a pour équation

$$\lambda_0x_0^2+\lambda_1(x_2^2-x_0x_1)+\lambda_2x_0x_2+\lambda_3x_1^2=0. \tag{1}$$

Rapportons projectivement ses courbes aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_0}{x_0^2}=\frac{X_1}{x_2^2-x_0x_1}=\frac{X_2}{x_0x_2}=\frac{X_3}{x_1^2}.$$

On obtient une surface F d'équation

$$X_0^3X_3=(X_2^2-X_0X_1)^2. \tag{2}$$

Les coniques déduites du système (1) où l'on pose $\lambda_3=0$ forment un système homaloïdal: elles passent par le point O_1 (0, 1, 0) et y osculent la courbe $x_2^2-x_0x_1=0$. Il en résulte que le point O_3' (0, 0, 0, 1) est triple pour la surface F. L'équation de la surface montre d'ailleurs que c'est un point triple uniplanaire.

Les coniques (1) coupent la droite $x_0=0$ suivant les couples de points

$$\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 x_1^2=0,$$

formant une involution et les courbes (1) passant par un point d'un groupe de cette involution passent par l'autre. On en conclut que la droite $X_0=X_2=0$ est double pour la surface.

Projetons la surface F du point O_3' sur le plan $X_3=0$. Aux sections planes correspondent les courbes

$$X_0^3(\lambda_0 X_0+\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2)+\lambda_3(X_2^2-X_0X_1)^2=0. \tag{3}$$

L'équation $X_2^2-X_0X_1=0$ représente une conique tangente en O_0, O_1 aux droites O_0O_2, O_1O_2. On en conclut que les courbes (3) passent deux fois par le point O_1 et par le point qui lui est infiniment voisin sur la droite $X_0=0$.

Effectuons la transformation quadratique

$$X_0 : X_1 : X_2=z_0z_2 : z^2_1 : z_1z_2,$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur $X_2=0$ le point $z_0=z_2=0$. Aux courbes (3) correspondent les courbes

$$z_0^3z_2(\lambda_0 z_0z_2+\lambda_1 z_1^2+\lambda^2 z_1z_2)+\lambda_3 z_1^4(z_2-z_0)^2=0.$$

Le point infiniment voisin du point (0, 1, 0) sur la droite $z_2-z_0=0$ est double pour les courbes précédentes. Cette droite est la transformée de la conique $X_2^2-X_0X_1=0$ et au point double considéré correspond un point situé sur la courbe précédente dans le domaine du second ordre du point O_1. Il en résulte que les courbes (3) ont un point double en O_1 suivi de deux points doubles infiniment voisins successifs.

La surface F possède deux droites doubles infiniment voisines successives de $X_0=X_2=0$ situées sur le cône $X_2^2-X_0X_1=0$. En d'autres termes ce cône oscule la surface F le long de la droite $X_0=X_2=0$.

La surface F, du quatrième ordre, possède une droite double à laquelle sont infiniment voisines successives deux droites doubles situées sur un cône du second ordre dont le sommet est triple pour la surface.

La surface F contient également ∞^2 coniques. Elles sont découpées par les cônes

$$\lambda_0 X_0^2+\lambda_1(X_2^2-X_0X_1)+\lambda_3 X_0X_2=0.$$

L. Godeaux

azzoguidi soc. tip. edit. via e. ponente 421 b 40132 bologna italy 1968