SUR LES SECTIONS DES VARIÉTÉS DE SEGRE

PAR

LUCIEN GODEAUX (LIÉGE).

Il y a un certain intérêt, en Géométrie algébrique, de disposer d'un certain nombre de modèles de variétés algébriques. Il arrive en effet qu'en étudiant celles de ces variétés possédant certaines propriétés, ces modèles permettent de vérifier si les variétés obtenues existent. C'est ainsi par exemple que l'existence de surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$ a permis à Castelnuovo d'orienter la recherche des conditions de rationnalité d'une surface algébrique de fixer l'attention sur le bigenre P_2 [1].

Le but de cette note est de construire des variétés algébriques possédant une variété canonique d'ordre zéro ou dont le système canonique est constitué par les sections hyperplanes. Nous les obtenons en coupant une variété de Segre par des espaces linéaires.

Rappelons que la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces linéaires à r dimensions est une variété à $2r$ dimensions plongée dans un espace à $r(r+2)$ dimensions et d'ordre [2]

$$\frac{(2r)!}{(r!)^2} = 2\frac{(r+1)(r+2)\dots(2r-1)}{(r-1)!}.$$

Nous développons la question en supposant $r = 4$, le cas où r est quelconque se traitant exactement de la même manière. Nous indiquons in fine la généralisation au cas de r quelconque.

Ajoutons que nous utilisons certaines propriétés des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique ; on les trouvera dans un ouvrage récemment publié [3].

1. Considérons la variété de Segre V_8^{70} d'un espace S_{24} à 24 dimensions, représentant les couples de points de deux espaces $(y), (z)$ à quatre dimensions. Si y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 et z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées des points des espaces $(y), (z)$, en posant

$$X_{ik} = y_i z_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

les équations de la variété s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$|X_{ik}|$$

a la caractéristique un.

Si l'on considère entre les espaces $(y), (z)$ l'homographie $y_i = z_i$, on obtient dans S_{24} l'homographie biaxiale harmonique H d'équations

$$\rho X'_{ik} = X_{ki}.$$

Les axes de l'homographie H sont un espace σ_9 à 9 dimensions d'équations

$$X_{ii} = 0, \quad X_{ik} + X_{ki} = 0$$

et un espace σ_{14} à 14 dimensions d'équations

$$X_{ik} - X_{ki} = 0.$$

La variété V_8^{70} ne rencontre pas l'espace σ_9 mais elle rencontre l'espace σ_{14} suivant la variété de Veronese Ω_4^{16} obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de σ_{14} les hyperquadriques de l'espace (y). Les équations de Ω_4^{16} s'obtiennent en écrivant que le déterminant *symétrique*

$$|X_{ik}| \quad (X_{ik} = X_{ki})$$

est de caractéristique un.

L'homographie H détermine sur V_8^{70} une involution du second ordre I ayant comme unique variété unie la variété Ω_4^{16}. Pour obtenir une variété image de l'involution I, rapportons projectivement les hyperplans passant par σ_9 aux hyperplans d'un espace Σ_{14} en posant

$$\rho Y_{ik} = X_{ik} + X_{ki}.$$

Les équations de la variété image V_8^{35} s'obtiennent en écrivant que le déterminant *symétrique*

$$|Y_{ik}|, \quad (Y_{ik} = Y_{ki})$$

est de caractéristique *deux*.

Si ce déterminant est de caractéristique un, il représente la variété de Veronese $\Omega_4'^{16}$ qui correspond à Ω_4^{16}. Cette variété est quadruple pour la variété V_8^{35}.

2. Les hyperplans passant par σ_{14} découpent sur V_8^{40} des variétés transformées en elles-mêmes par H. A ces variétés correspondent sur V_8^{35} des variétés passant par la variété de Veronese $\Omega_4'^{16}$.

Considérons en effet l'hyperplan passant par σ_{14} d'équation

$$\Sigma \lambda_{ik} (X_{ik} - X_{ki}) = 0.$$

Elevons les deux membres de cette équation au carré et remarquons qu'en tenant compte des équations de V_8^{70}, c'est-à dire sur cette variété, on a

$$(X_{ik} - X_{ki})(X_{jh} - X_{hj}) = \rho^2 (Y_{jk} Y_{hi} - Y_{hk} Y_{ji}).$$

Nous obtenons l'équation

$$\Sigma \lambda_{ik} \lambda_{jh} (Y_{jk} Y_{hi} - Y_{hk} Y_{ji}) = 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire dans Σ_{14} l'équation d'une hyperquadrique passant par la variété $\Omega_4'^{16}$.

Désignons par A les sections hyperplanes de la variété V_8^{35} et par A_0 les variétés découpées sur cette variété par les hyperquadriques (1).

Considérons sur V_8^{70} les variétés découpées par les hyperquadriques Q de S_{24}, transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes σ_9 et σ_{14}. A ces variétés correspondent sur V_8^{35} celles qui sont découpées par les hyperquadriques Q' de Σ_{14}. Faisons varier Q d'une manière continue et faisons-la tendre vers un hyperplan passant par σ_9 et compté deux fois. La variété correspondante sur V_8^{35} est $2A$. Si au contraire nous faisons tendre Q vers un hyperplan passant par σ_{14} compté deux fois, Q' tend vers la variété $2A_0$ augmentée d'une varieté R équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, au domaine de $\Omega_4'^{16}$ sur V_8^{35}. On a donc

$$2A \equiv 2A_0 + R.$$

Les variétés A_0 sont d'ordre 35 et les hyperquadriques (1) touchent la variété V_8^{35} en tout point d'intersection en dehors de $\Omega_4'^{16}$.

3. Observons qu'à une section hyperplane $\Sigma\, a_{ik} X_{ik} = 0$ de V_8^{70} correspond une réciprocité $\Sigma\, a_{ik} y_i z_k = 0$ entre les espaces (y) et (z).

Si nous considérons la section V_4^{70} de V_8^{70} par un espace S_{20} à 20 dimensions, c'est-à-dire par quatre hyperplans, les couples de points y, z sont homologues dans une transformation birationnelle T qui fait correspondre aux hyperplans de l'espace (y) des hypersurfaces du quatrième ordre passant par une surface Δ_2 du dixième ordre et inversement.

Pour préciser, si les équations des quatre réciprocités sont

$$z_0 \varphi_{i0} + z_1 \varphi_{i1} + z_2 \varphi_{i2} + z_3 \varphi_{i3} + z_4 \varphi_{i4} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

où les fonctions φ sont linéaires par rapport aux y, à l'hyperplan

$$\lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 = 0$$

correspond dans l'espace (y) l'hypersurface

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{30} & \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{40} & \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

du quatrième ordre, passant par la surface Δ du dixième ordre, d'équations

$$\| \varphi_{ik} \| = 0. \quad (i = 1,2,3,4; k = 0,\ 1,2,3,4).$$

A une section hyperplane de V_4^{70} correspond dans l'espace (y) une hypersurface du cinquième ordre passant par Δ. Cette hypersurface possède une surface canonique d'ordre zéro, donc *la variété* V_4^{70} *a comme sections hyperplanes des variétés à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro.*

Considérons une de ces sections, soit V_3^{70} et désignons par F ses sections hyperplanes. Puisque la variété considérée a une surface canonique d'ordre zéro le système $|F|$ est son propre adjoint et par conséquent le système canonique d'une surface F coïncide avec le système de ses sections hyperplanes.

La section de la variété de Segre V_8^{70} *par un espace à 18 dimensions est une surface dont le système canonique est celui de ses sections hyperplanes (surface projectivement canonique). Ses genres sont* $p_a = p_g = 19$, $p^{(1)} = 71$.

4. Introduisons maintenant l'homographie biaxiale harmonique H définie plus haut. Les sections de la variété V_8^{70} par des hyperplans passant par σ_9 ou par σ_{14} sont des variétés sur lesquelles H détermine une involution du second ordre.

Considérons un espace S_{20} à 20 dimensions passant par σ_q. L'homographie H détermine dans cet espace une homographie H' harmonique, ayant comme axes σ_9 et un espace σ_{10} à dix dimensions, contenu dans σ_{14}. Cet espace σ_{10} rencontre la variété de Veronese Ω_4^{16} en 16 points.

L'espace S_{20} coupe V_8^{70} suivant une variété V_4^{70} contenant une involution du second ordre possédant seize points unis. L'image de cette involution est dans Σ_{14}, la section par un espace à dix dimensions de la variété V_8^{35}. Cette section est une variété V_4^{35} possédant seize points quadruples coniques situés sur la variété de Veronese $\Omega_4^{'16}$.

La section de la variété V_4^{70} par un hyperplan passant par σ_9 est transformée en elle-même par H' et il lui correspond une section hyperplane de V_4^{35} ne rencontrant pas en général la variété de Veronese $\Omega_4^{'16}$. Considérons une de ces sections hyperplanes V_3^{70}. Elle appartient à un espace S_{19} à 19 dimensions passant par σ_9 et dans lequel H' détermine une homographie H'' ayant comme axes σ_9 et un espace σ'_9 à 9 dimensions appartenant à σ_{10}.

Désignons comme plus haut par F les sections hyperplanes de V_3^{70}, par F_0 celles qui sont découpées par les hyperplans passant par σ_9 et par F_1 celles qui sont découpées par les hyperplans passant par σ'_9. A ces surfaces correspondent sur la variété V_3^{35} image de l'involution déterminée par H'' sur V_3^{70} dans un espace Σ_9 de Σ_{14}, les surfaces F'_0, F'_1, les premières étant les sections hyperplanes de V_3^{35}.

La variété V_3^{70} ayant une surface canonique d'ordre zéro, le système $|A|$ est son propre adjoint. Il en résulte que sur la surface F'_0, le système canonique est découpé soit par les surfaces F'_0 soit par les surfaces F'_1. Or nous avons établi que le système canonique de F'_0, était celui des systèmes précédents qui a la plus petite dimension; c'est donc actuellement le système découpé par les surfaces F'_0, qui a la dimension huit. Il en résulte que les systèmes $|F'_0,|$, $|F'_1|$ sont chacun son propre adjoint et la variété V_3^{35} possède une surface canonique d'ordre zéro.

D'après la théorie des involutions, on a

$$2F'_0 \equiv 2F'_1$$

et la variété V_3^{35} a le diviseur de Severi égal à 2.

5. Le système $|F'_0|$ étant son propre adjoint, le système canonique d'une de ses surfaces est découpé par les hyperplans et les surfaces F'_0 sont donc des surfaces projectivement canoniques.

Une surface F'_0, d'ordre 35, est située dans un espace linéaire à huit dimensions, elle a donc les genres

$$p_a = p_g = 9, \quad p^{(1)} = 36.$$

D'ailleurs, la surface F_0 étant projectivement canonique a le genre $p_a = 19$. L'involution déterminée par H'' sur cette surface est privée de points unis, donc le genre arithmétique p'_a de F'_0 est donné par

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 9$.

Si l'on considère un déterminant symétrique à 25 éléments et les 15 termedistincts de ce déterminant comme les coordonnées des points d'un espace S_{14} à 14 dimensions, la variété dont les équations s'obtiennent écrivant que ce détermis nant a la caractéristique deux, a huit dimensions et est d'ordre 35. Les sections de cette variété par *des espaces à 9 dimensions sont des variétés à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro,*

des espaces à 8 dimensions sont des surfaces projectivement canoniques de genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 36$.

Les surfaces F_1' ont les mêmes genres que les surfaces F_0'.

6. Les sonsidérations précédentes peuvent s'étendre à l'étude des variétés de Segre représentant les couples de points de deux espaces à r dimensions. Les procédés de démonstration sont exactement les mêmes et nous nous bornerons à indiquer les résultats.

Une variété de Segre V_{2r}^{2N} représentant les couples de points de deux espaces à r dimensions est d'ordre

$$2N = 2\frac{(r+1)(r+2)\dots(2r-1)}{(r-1)!}$$

et appartient à un espace S à $r(r+2)$ dimensions.

La section de cette variété par un espace à r^2+r-1 dimensions est une variété à $r-1$ dimensions dont la variété canonique est d'ordre zéro.

La section par un espace à r^2+r-2 dimensions est une variété à $r-2$ dimensions dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

Si l'on considère un déterminant symétrique à $\frac{1}{2}r(r+3)$ lignes et colonnes dont les éléments distincts sont les coordonnées des points d'un espace Σ à $\frac{1}{2}r(r+1)-1$ dimensions, la variété dont les équations sont obtenues en écrivant que ce déterminant a la caractéristique deux, est de dimension $2r$ et d'ordre N. Sa section par un espace à $\frac{1}{2}(r+1)(r-2)-1$ dimensions est une variété à $r-1$ dimensions dont la variété canonique est d'ordre zéro. Les sections hyperplanes de cette variété ont pour système canonique celui des sections hyperplanes si $r \geqslant 3$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Castelnuovo — *Sulle superficie di genere zero.* Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1894–96; Memorie scelte, Bologna Zanichelli, 1937, pp. 305—334.

2. Segre C. — *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891, pp. 192—204. Voir aussi le volume I de notre *Géométrie algébrique,* Chap. X (Liége, 1948).

3. Voir notre ouvrage *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications.* Rome; Cremonese, 1963.