 Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 102, 838-844 (1968)

GÉNÉRALISATION DE THÉORÈMES DE BLOCH SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES

Nota del m. s. LUCIEN GODEAUX

(Adunanza del 12 dicembre 1968)

SUNTO. — Costruzioni di alcuni sistemi lineari sovrabbondanti di curve piane.

Dans une note aux *Comptes Rendus* (1), André Bloch a énoncé, sans démonstration, quelques théorèmes sur les quartiques planes.

Si, des 16 points communs à deux quartiques, 3 sont en ligne droite, les 13 autres points sont les points-base d'un réseau de quartiques et réciproquement.

Si, des 16 points communs à deux quartiques, 6 sont sur une conique, les 10 autres points sont sur une cubique et réciproquement.

Si, des 16 points communs, sept sont sur une conique, les 9 autres points sont les points-base d'un faisceau de cubiques et réciproquement.

Ces théorèmes se démontrent aisément en utilisant les propriétés de la série canonique d'une quartique. Ils peuvent être généralisés et donnent des constructions de systèmes surabondants de courbes d'ordre n et d'ordre $n-1$. C'est l'objet de cette note.

1. - Soient dans un plan C_1, C_2 deux courbes planes d'ordre $n > 3$ se recontrant en n^2 points distincts dont $\frac{1}{2}\, n(n-3)+1 = \frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)$ sont situés sur une courbe C'_0 d'ordre $n-3$, isolée. Nous désignerons par B ce groupe de points et par A le groupe de points qui, avec B, forme l'intersection de C_1 et de C_2.

La courbe C'_0 passant par B rencondre encore la courbe C_1 en un groupe B'_1 de $\frac{1}{2}\, n(n-3)-1$ points. Par B'_1 passent au moins ∞^1

(1) BLOCH A., *Théorèmes d'Algèbre et de Géométrie* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Franc, 2e semestre 1944, pp. 301-302).

courbes C' adjointes à C_1; ces courbes découpent sur C_1 des groupes B_1 de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points formant une série $|B_1|$ comprenant le groupe B. Soit $i \geq 2$ l'indice de spécialité de B'_1 sur C_1. La série $|B_1|$ a la dimension $i-1$.

Par le groupe A menons une courbe C d'ordre n distincte de C_1, C_2. Elle coupe C_1 en dehors de A en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points qui varient dans une série linéaire qui contient le groupe B. Cette série appartient donc à la série $|B_1|$.

La courbe C considérée et la courbe C_1 déterminent un faisceau; les courbes C_1, C_2 déterminent un faisceau. Ces deux faisceaux appartiennent à un réseau et il y a au moins ∞^2 courbes C d'ordre n passant par le groupe A. Il y en a au plus ∞^i et précisément ∞^i si la courbes C passant par A découpent sur C_1 la série complète $|B_1|$.

2. - Partons maintenant d'un groupe A de $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ points distincts et supposons que les courbes C d'ordre n passant par A forment un système linéaire de dimension $i \geq 2$.

Sur une courbe C_1 du système $|C|$, les autres courbes C découpent une série $|B_1|$ d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ et de dmension $i-1$. Les groupes B_1 sont spéciaux, chacun d'eux étant situé sur une courbe C' adjointe à C_1. Si C_2 est une seconde courbe du système $|C|$, on voit que les courbes C_1, C_2 ont en commun, en dehors du groupe A, un groupe B de $\frac{1}{2}n(n-3)+1$ points appartenant à une courbe C'_0 d'ordre $n-3$. On retombe donc dans le cas étudié plus haut.

Nous voyons en outre que si $|C|$ a la dimension i, la série $|B_1|$ a la dimension $i-1$ et le groupe B'_1 a l'indice de spécialité i sur la courbe C_1.

Considérons deux courbes C'_1, C'_2 adjointes à C_1 et passant par B'_1.

Les courbes C'_1, C'_2 ont en commun, en dehors de B'_1, un groupe $\overline{B}$ de $\frac{1}{2}(n-3)(n-6)$ points. Le groupe $\overline{B}$ appartient à une adjointe C''_0 aux courbes C'. Cette courbe C''_0 est d'ordre $n-6$ et on est ramené au problème précédent où n est remplacé par $n-3$. Et ainsi de suite.

Comme n est supérieur à 3, on sera ramené finalement aux cas où n est égal à 4, 5 ou 6.

Dans le cas $n = 4$, les quartiques C_1, C_2 ont en commun un groupe de trois points en ligne droite. Le groupe B'_1 se réduit à un point d'indice de spécialité 2. Le groupe A, de 13 points, est la base d'un réseau de quartiques. C'est le cas considéré par Bloch.

Supposons $n = 5$. Les quintiques C_1, C_2 ont en commun six points situés sur une conique C'_0. Le groupe B'_1 comprend quatre points par lesquels passent ∞^1 coniques C'. On a de nouveau $i = 2$. Le groupe A, de 19 points, est la base d'un réseau de quintiques.

Supposons enfin $n = 6$. Les sextiques C_1, C_2 ont en commun un groupe B de 10 points situés sur une cubique C'_0. Le groupe B'_1 se compose de huit points par lesquels passent ∞^1 cubiques C'. On a encore $i = 2$ et les sextiques passant par le groupe A de 26 points forment un réseau.

Le nombre n étant suérieur à trois est de la forme $3\nu + 4$, $3\nu + 5$ ou $3\nu + 6$.

Supposons $n = 3\nu + 4$ et que i ait la valeur maximum. On passera successivement aux cas

$$n = 3(\nu - 1) + 4, i - 1; \ldots; \; n = 3(\nu - k) + 4, i - k; \ldots; \; n = 4, i - \nu = 2,$$

d'où $i = \nu + 2$.

Si $n = 3\nu + 5$ ou $n = 3\nu + 6$, le même raisonnement conduit également à $i = \nu + 2$. Nous obtenons donc le théorème suivant:

Si deux courbes d'ordre $n > 3$ *se rencontrent en* n^2 *points distincts dont* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *se trouvent sur une coubre isolée d'ordre* $n - 3$, *le groupe des* $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ *points restants est la base d'un système linéaire de courbes d'ordre* n *de dimension* i, i *étant au moins égale à* 2 *et ayant pour valeur maximum* $\nu + 2$, $\nu + 1$ *étant le quotient de la division da* n *par* 3. *Réciproquement, si un groupe de* $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ *points est la base d'un système linéaire de courbes d'ordre* n *de dimension* $i \geq 2$, *deux courbes de ce système ont encore en commun un groupe de* $\frac{1}{2}(n-1\ (n-2)$ *points situés sur une courbe d'ordre* $n - 3$.

Le groupe A est surabondant.

3. - Soient maintenant deux courbes C_1, C_2 se rencontrant en n^2 points distincts dont un groupe B de $\frac{1}{2}(n-2)\ (n+1)+1=$ $=\frac{1}{2}n(n-1)$ points se trouve sur une courbe Γ d'ordre $n-2$. Soit A le groupe de $\frac{1}{2}n(n+1)$ points qui avec B forme l'intersection des courbes C_1, C_2.

La courbe Γ rencontre la courbe C_1 en dehors de B en un groupe B'_1 de $\frac{1}{2}n(n-3)$ points qui appartient à une courbe C'_0 d'ordre $n-3$ adjointe à C_1. Les courbes d'ordre $n-2$ passant par B'_1 rencontrent encore la courbe C_1 en des groupes B_1 de $\frac{1}{2}n(n-1)$ points. La série $|B_1|$ contient la groupe B et est par conséquent non spéciale. Elle a la dimension $n-1$.

Les courbes C d'ordre n passant par le groupe A forment un système linéaire de dimension au moins égale à n. Sur la courbe C_1 elles découpent une série d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)$ qui contient le groupe B et par conséquent coïncide avec $|B_1|$. Les courbes C passant par A forment donc un système de dimension n.

Observons que parmi les courbes d'ordre $n-2$ passant par B'_1 se trouvent les courbes formées par la courbe C'_0 et par les droites du plan. Par conséquent, la série $|B_1|$ contient la série $|G|$ découpée sur C_1 par les droites du plan. Il existe donc des courbes C qui comprennent comme partie les droites du plan. Il existe donc une courbe d'ordre $n-1$ passant par A.

Le groupe A de $\frac{1}{2}n(n+1)$ points appartient donc à une courbe d'ordre $n-1$.

4. - Inversement, supposons qu'un groupe A de $\frac{1}{2}n(n+1)$ points appartiennent à une courbe Γ_0 d'ordre $n-1$.

Les courbes C d'ordre n passant par A découpent sur l'une d'entre elles C_1 une série $|B_1|$ d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)$ et de dimension $n-1$. Parmi les courbes C se trouvent les courbes formées de Γ_0 et des droites du plan. Si l'on désigne par $|G|$ la série découpée sur C_1 par les droites du plan, on a $|B_1-G|=B'_1$, B'_1 étant le groupe de

$\frac{1}{2}\,n(n-3)$ points de rencontre de la courbe C_1 avec Γ_0. Sur C_1, le groupe B'_1 est spécial et situé sur une adjointe C'_0 d'ordre $n-3$.

Les courbes d'ordre $n-2$ passant par B'_1 découpent sur C_1 une série d'ordre $\frac{1}{2}\,n(n-1)$ qui comprend les groupes $G+B'_1$ et coïncide donc avec $|B_1|$. On en conclut qu'une courbe C_2 de $|C|$ rencontre C_1 en un groupe de $|B_1|$ appartenant à une courbe d'ordre $n-2$.

Si deux courbes d'ordre $\mathrm{n}>3$ *se rencontrent en* n^2 *points distincts dont* $\frac{1}{2}\,\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)$ *sont situés sur une courbe d'ordre* $\mathrm{n}-2$, *le groupe des* $\frac{1}{2}\,\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$ *points restants appartient à une courbe d'ordre* $\mathrm{n}-1$. *Réciproquement, si un groupe de* $\frac{1}{2}\,\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$ *points appartient à une courbe d'ordre* $\mathrm{n}-1$, *deux courbes d'ordre* n *passant par ces points se rencontrent encore en* $\frac{1}{2}\,\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)$ *points appartenant à une courbe d'ordre* $\mathrm{n}-2$.

Pour $n=4$, on retrouve le résultat de Bloch.

5. - Nous généraliserons le résultat précédent en supposant que des n^2 points distincts communs aux courbes C_1, C_2, il en est un groupe B de $\frac{1}{2}\,(n-2)\,(n+1)+k$ qui appartiennent à une courbe Γ d'ordre $\mathrm{n}-2\,[1<k\leq\frac{1}{2}\,n(n-3)]$. Nous désignerons encore par A le groupe des $\frac{1}{2}\,(n+1)-k+1$ points restants.

La courbe Γ rencontre la courbe C_1 en dehors de B en un groupe B'_1 de $\frac{1}{2}\,n(n-3)-k+1$ points qui, sur C_1, est un groupe spécial dont l'indice de spécialité est au moins égal à k.

Les courbes d'ordre $n-2$ passant par B'_1 découpent sur C_1 une série $|B_1|$ d'ordre $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)+k-1$ non speciale, dont la dimension est égale à $n+k-2$. La série $|B_1|$ contient le groupe B.

Les courbes C, d'ordre n, passant par le groupe A découpent sur C_1 une série d'ordre $\frac{1}{2}\,n(n-1)+k-1$ qui contient le groupe B et par conséquent appartient à la série $|B_1|$.

Observons que la dimension du système $|C|$ est au moins égale à $n+k+1$ et par conséquent la série caractéristique du système $|C|$ coïncide avec la série $|B_1|$. Par suite, la dimension du système $|C|$ est exactement $n+k-1$.

Parmi les courbes d'ordre $n-2$ passant par B'_1, il en est qui sont formées d'une courbe C'_1 d'ordre $n-3$ passant par B'_1 et d'une droite du plan. Précisément, si nous désignons par $i \geq k$ l'indice de spécialité de B'_1 sur C_1, une droite de plan est associée à ∞^{i-1} courbes C'_1 pour former des courbes d'ordre $n-2$ passant par B'_1. Il en résulte qu'il y a ∞^{i-1} courbes C passant par A qui contiennent comme partie une droite du plan. Par conséquent, las courbes d'ordre $n-1$ passant par A forment un système linéaire de dimension $i-1$.

6. - Inversement, supposons que par un groupe A de $\frac{1}{2}n(n+1)-$ $-k+1$ points passent ∞^{i-1} courbes D d'ordre $n-1$.

La série caractéristique $|B_1|$ du système des courbes C d'ordre n passant par le groupe A est d'ordre $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)+k$ et de dimension $n+k-2$. Nous la considérons sur une courbe C_1.

Une droite du plan associée à ∞^{i-1} courbes D donne une courbe C passant par A. Les courbes D découpent sur C_1 une série $|\bar{B}'_1|$ d'ordre $\frac{1}{2}n(n-3)-k+1$ et de dimension $i-1$. Les courbes d'ordre $n-2$ passant par un groupe B'_1 découpent sur C_1 une série $|\bar{B}^1|$ d'ordre $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)+k$ et de dimension $n+k-2$. Si l'on désigne par $|G|$ la série découpée sur C_1 par les droites du plan, on a

$$|B_1-G| = |B'_1|, \quad |\bar{B}_1-G| = |B'_1|,$$

d'où $|B_1| = |\bar{B}_1|$.

Une courbe irréductible C_2 de $|C|$ rencontre C_1 suivant un groupe de $|B_1|$, c'est-à-dire suivant un groupe de $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)+k$ points situées sur une courbe d'ordre $n-2$.

Si deux courbes d'ordre $\mathrm{n}>3$ *se rencontrent en* n^2 *points distincts dont* $\frac{1}{2}(\mathrm{n}-2)(\mathrm{n}+1)+\mathrm{k}$ *appartiennent à une courbe d'ordre* $\mathrm{n}-2$ *isolée, les courbes d'ordre* $\mathrm{n}-1$ *passant par les* $\frac{1}{2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)-\mathrm{k}+1$

points restants de l'intersection des courbes d'ordre n *forment un système linéaire de dimension* i — 1, *où*

$$1 \leq k \leq i < \frac{1}{2}\, n\,(n-3) - 1\,.$$

Réciproquement, si les courbes d'ordre n — 1 *passant par un groupe* A *de* $\frac{1}{2}$ n(n + 1) — k + 1 *points forment un système linéaire de dimension* i — 1, *deux courbes d'ordre* n *passant par* A *se rencontrent encore en* $\frac{1}{2}$ (n — 2) (n + 1) *points appartenant à une courbe d'ordre* n — 2.

Le système $|D|$ des courbes d'ordre $n-1$ passant par A est surabondant.

Pour $k=1$, on a $i=1$ et on retrouve le théorème précédent. Pour $n=4$, $k=2$, on retrouve le théorème de Bloch.