VARIETES ALGEBRIQUES A TROIS DIMENSIONS DONT LA SURFACE CANONIQUE EST D'ORDRE ZERO

LUCIEN GODEAUX

LIÉGE

(Recibido el 18 de julio de 1965)

Les couples de points dans un espace à quatre dimensions conjugués par rapport à quatre hyperquadriques linéairement indépendantes, se correspondent dans une transformation birationnelle T dont la surface fondamentale est une surface du dixième ordre de genres

$$p_a = p_g = 4, p^{(1)} = 6.$$

Nous considérons dans cette note les hypersurfaces du cinquième ordre passant par la surface fondamentale et transformées en elles-mêmes par T. Sur chacune de ces hypersurfaces, T détermine une involution du second ordre. Nous déterminons les variétés à trois dimensions images de ces involutions. Chacune d'elles possède une surface canonique d'ordre zéro.

Nous utilisons les résultats que avons obtenus sur les involutions appartenant à une surface ou une variété algébriques; on en trouvera un exposé dans un ouvrage récent (1).

1. Considérons dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions quatre hyperquadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 irréductibles et linéairement indépendantes, ayant en commun 16 points distincts. A un point P de S_4, nous faisons correspondre le point P' intersection des hyperplans polaires de P par rapport aux quatre hyperquadriques. Nous définissons ainsi une transformation birationnelle involutive T.

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et Applications* (Rome, Cremonese, 1963).

Si

$$f_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0$$

sont les équations des hyperquadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, à un hyperplan

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

T fait correspondre l'hypersurface du quatrième ordre

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_0} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_0} & \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0$$

Ces hypersurfaces passent par la surface fondamentale Δ d'équations

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_0} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_4} \right\| = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

d'ordre dix et des genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$.

A un plan correspond une surface du sixième ordre rencontrant la surface Δ suivant une courbe d'ordre vingt.

A une droite correspond une courbe du quatrième ordre s'appuyant en 15 points sur la surface Δ.

2. Les hypersurfaces du cinquième ordre passant par la surface Δ ont pour équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial x_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \dfrac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

où $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ sont les équations de cinq hyperplans. En tenant compte des quatre dernières lignes du determinant du premier nembre, on voit que le nombre de ces hypersurfaces linéairement indépendantes est $5.5-4=21$.

Observons que si φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont les dérivées partielles d'une fonction f_0, l'équation (2) s'écrit

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

et représente une hypersurface V_0 transformée en soi par T. En effet, si nous dénotons par Q_0 l'hyperquadrique d'équation $f_0 = 0$, l'équation de V_0 exprime que les hyperplans polaires d'un point P par rapport aux cinq hyperquadriques Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 passent par un même point P'.

L'hypersurface V_0 est la jacobienne de cinq hyperquadriques.

Supposons maintenant que l'équation

$$x'_0\,\varphi_0 + x'_1\,\varphi_1 + x'_2\,\varphi_2 + x'_3\,\varphi_3 + x'_4\,\varphi_4 = 0 \qquad (3)$$

représente un système-nul.

Si nous représentons par Δ_i le déterminant tiré de la matrice (1) en supprimant la i-ième colonne, les équations de la transformation T s'écrivent

$$\rho\, x'_i = \Delta_i\,, \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

et l'équation (3) s'écrit

$$\varphi_0\,\Delta_0 + \varphi_1\,\Delta_1 + \ldots + \varphi_4\,\Delta_4 = 0\,,$$

ce qui donne l'équation (2). Nous appelerons V_1 l'hypersurface obtenue de cette manière, qui donne de nouvelles hypersurfaces transformées en elles-mêmes par T.

On sait que tout système-nul de l'espace S_4 est singulier, c'est-à-dire que les hyperplans polaires d'un système-nul passent tous par un point. Celui-ci appartient à la variété V_1 correspondante, de même que son homologue dans T, qui est généralement distinct du précédent.

Les hyperquadriques de S_4 distinctes des quatre hyperquadriques données sont au nombre de 11, donc il y a 11 hypersurfaces V_0 linéairement indépendantes. Les systèmes-nuls de S_4 linéairement indépendants sont au nombre de 10, donc il y a 10 hypersurfaces V_1 linéairement indépendantes.

3. Les points unis de la transformation T sont les 16 points communs aux quatre hyperquadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. En général une hypersurface V_0 ne passe pas par ces points.

Par contre si l'on observe qu'une hypersurface V_1 est le lieu des points dont les hyperplans polaires par rapport à quatre hyperquadriques et à un système-nul passent par un même point et que le plan polaire d'un point par rapport à un système nul passe par ce point, on voit que les hypersurfaces V_1 passent par les 16 points unis de T.

4. Les sections hyperplanes d'une hypersurface du cinquième ordre privée de points de multiplicité supérieure à deux sont des surfaces de genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$, dont le système canonique est découpé par les hyperplans. Par conséquent l'hypersurface possède une surface canonique d'ordre zéro et tout système linéaire de surfaces tracées sur cette hypersurface est son propre adjoint.

Sur une hypersurface V_0, les hypersurfaces d'ordre cinq passant par Δ découpent des surfaces d'ordre 15 que nous désignerons par F. Les surfaces F forment un système linéaire $|F|$ qui est son propre adjoint.

Une surface F, intersection de deux hypersurfaces V du cinquème ordre passant par Δ, est représentée par une matrice à six lignes et cinq colonnes de formes linéaires, elle a par conséquent les genres [1] $p_a = p_g = 19$, $p^{(1)} = 71$.

On observera que le système canonique d'une surface F est découpé par les hypersurfaces V ne contenant pas F, ce qui confirme les valeurs $p_a = p_g = 19$.

---

(1) Voir notre note *Surfaces représentées par des matrices de formes linéaires* en cours de publication dans les Bulletins de l'Académie roy. de Belgique.

D'autre part, parmi les hypersurfaces V se trouvent celles qui sont formées d'un hyperplan et d'une hypersurface du quatrième ordre passant par Δ, ce qui confirme que le degré du système linéaire $| F |$ sur une variété V est égal à 70, d'où pour F, $p^{(1)} = 71$.

5. Considérons une surface F_0; elle a les genres $p_a = 19$, $p^{(1)} = 71$ et contient une involution I_0 d'ordre deux engendrée par T.

Soit Φ_0 une image de l'involution I_0. Celle-ci étant privée de points unis, entre le genre arithmétique $p_a = 19$ et celui p'_a de Φ_0, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1)$$

d'où $p'_a = 9$.

Le genree linéaire $p^{(1)} = 71$ de F_0 est lié à celui $p'^{(1)}$ de Φ_0 par la relation

$$p^{(1)} - 1 = 2(p'^{(1)} - 1),$$

d'où $p'^{(1)} = 36$.

La surface Φ_0 image de l'involution engendrée par T sur la surface F_0 intersection de deux hypersurfaces V_0 a les genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 36$.

Appelons F_{01} una surface intersection de deux hypersurfaces V_0 et V_1. Sur une telle surface, T engendre une involution d'ordre deux privée de points unis et le raisonnement précédent peut être rerpris sans modifications.

La surface Φ_{01} image de l'involution engendrée par T sur la surface F_{01} intersection de deux hypersurfaces V_0 et V_1 a les genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 36$.

6. Considérons maintenant une surface F_1 intersection de deux hypersurfaces V_1. La transformation T engendre sur cette surface une involution I_1 d'ordre deux possédant seize points unis. Soit Φ_1 una image de cette involution.

Entre les genres arithmétiques $p_a = 19$ de F_1 et celui p'_a de Φ_1, nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.16,$$

d'où $p'_a = 11$.

Le genre linéaire de Φ_1 est comme pour Φ_0, $p^{(1)} = 36$.

La surface Φ_1 image de l'involution engendrée par T sur la surface F_1 intersection de deux hypersurfaces V_1 a les genres $p_a = p_g = 11$, $p^{(1)} = 36$.

7. Les hypersurfaces V_0 sont en nombre ∞^{10}. Fixons une $\overline{V_0}$ de ces hypersurfaces et rapportons projectivement les ∞^9 autres aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à 9 dimensions. L'involution d'ordre deux engendrée par T sur la variété $\overline{V_0}$ a pour image une variété Ω_0 de S_9.

Les sections hyperplanes de Ω_0 sont des surfaces Φ_0 et il en résulte que la variété Ω_0 est d'ordre 35.

Observons que sur une surface F_0, le système canonique est découpé par les hypersurfaces V et que ce système contient deux systèmes linéaires composés avec l'involution I_0. L'un, de dimension 8 est découpé par les hypersurfaces V_0, l'autre, de dimension 9, est découpé par les hypersurfaces V_1. Nous avons démontré que celui de ces systèmes de dimension minimum est le transformé du système canonique de Φ_0. Par conséquent, le système canonique des surfaces Φ_0 est découpé par les hyperplans de S_9. En d'autres termes, le système $|\Phi_0|$ sur la variété Ω_0 est son propre adjoint et cette variété possède une surface canonique d'ordre zéro.

A la section F_{01} de l'hypersurface V_0 par les hypersurfaces V_1 correspond sur Ω_0 une surface Φ_{01} qui a les mêmes caractères que les surfaces Φ_0.

D'après la théorie des involutions, il existe le long d'une surface Φ_{01} una hyperquadrique de S_9 inscrite dans Ω_0 et on a sur cette variété

$$2\,\Phi_{01} \equiv 2\,\Phi_0.$$

La variété Ω_0 a donc le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

La variété Ω_0 image dans un espace à 9 dimensions de l'involution engendrée par T sur une hypersurface V_0 possède une surface canonique d'ordre zéro et a le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

8. Fixons maintenant l'attention sur une hypersurface V_1, soit $\overline{V_1}$, et désignons par Ω_1 une image de l'involution engendrée par T sur cette variété.

En rapportant projectivement les ∞^{10} hypersurfaces V_0 aux hyperplans d'un espace S_{10} à dix dimensions, on obtient comme modèle projectif de Ω_1 une variété d'ordre 35 dont les sections hyperplanes sont les surfaces Φ_{01}.

La variété $\overline{V_1}$ passe par les seize points unis de la transformation T. La variété Ω_1 possède donc 16 points de diramation et nous avons établi que ces points sont quadruples pour cette variété, le cône tangent en un de ces points ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese. Désignons par A_0, A_1, ..., A_{16} ces points.

Le système canonique d'une surface F_{01}, découpé par les hypersurfaces V, possède deux systèmes composés au moyen de l'involution I_{01}. L'un, découpé par les hypersurfaces V_0 est dépourvu de points-base. L'autre, découpé par les hypersurfaces V_1, passe par les 16 points unis de T, c'est-à-dire de I_{01}. Le système canonique privé de points base est le transformé du système canonique de Φ_1. On voit donc que le système $|\Phi_1|$ est son propre adjoint et que Ω_1 possède une surface canonique d'ordre zéro.

Aux surfaces F_1 appartenant à la variété $\overline{V}_1$ correspondent sur Ω_1 des surfaces Φ_1 d'ordre 35, ayant des points doubles coniques en $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Le long de chacune de ces surfaces il existe une hyperquadrique de S_{10} touchant la variété Ω_1. Les sufaces Φ_1 forment un système linéaire de dimension 8. Le système $|\Phi_1|$ est son propre adjoint de sorte que le système canonique d'une surface Φ_1 est découpé par les autres surfaces Φ_1.

La variété Ω_1 image dans un espace à dix dimensions de l'involution engendrée par T sur une hypersurface V_1 possède une surface canonique d'ordre zéro et seize points quadruples, les cônes tangents en chacun de ces points ayant comme sections hyperplanes des surfaces de Veronese.

9. Considérons encore l'hypersurface V_1 et rapportons projectivement les autres hypersurfaces du système $|\overline{V}_1|$ aux hyperplans d'un espace S_8 à huit dimensions. Soit Ω_{01} la variété de S_8 représentant l'involution engendrée par T sur $\overline{V}_1$.

Le degré effectif du système $|V_1|$ étant $70-16=54$, la variété Ω_{01} est d'ordre 27.

Les sections hyperplanes de la variété Ω_{01} sont les surfaces Φ_1 et comme on vient de le voir le système $|\Phi_1|$ est son propre adjoint. Cette variété possède donc une surface canonique d'ordre zéro.

Aux points infiniment voisins d'un point uni de T correspondent les points d'un plan appartenant à la variété Ω_{01}. Celle-ci possède donc 16 plans. Une section hyperplane Φ_1 contient donc seize droites et on sait que chacune d'elles est une courbe rationnelle de degré virtuel -2.

Aux surfaces F_{01} appartenant à $\overline{V}_1$ correspondent sur Ω_{01} des surfaces Φ_{01}, le long de chacune d'elles une hyperquadrique est inscrite dans Ω_{01}.

La variété Ω_{01} image dans un espace à huit dimensions de l'involution engendrée par T sur une variété V_1 possède une surface canonique d'ordre zéro et contient seize plans.