16. Surfaces dont les Quadriques de Lie se Touchent en Quatre Points*

LUCIEN GODEAUX
Belgian Mathematical Research Center, Liège, Belgium

Abstract. To a point x of a surface (x) we have attached a sequence of quadrics $\Phi, \Phi^1, \Phi^2, \ldots$ the first of which is the Lie quadric; two consecutive quadrics are tangent at four points, these points being characteristic for the two quadrics. We also study the case in which the quadric Φ^1 is the Lie quadric of a surface $(\bar{x})$.

Abrégé. A un point x d'une surface (x) nous avons attaché une suite de quadriques $\Phi, \Phi^1, \Phi^2, \ldots$ dont la première est la quadrique de Lie, deux quadriques consécutives se touchant en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques. On étudie ici le cas où la quadrique Φ^1 est la quadrique de Lie d'une surface $(\bar{x})$.

En chaque point d'une surface (x), nous avons attaché une suite de quadriques $\Phi, \Phi^1, \Phi^2, \ldots$ dont la première est la quadrique de Lie, deux quadriques consécutives de cette suite se touchant en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques.[1,2,3] Si cette suite ne comprend qu'un nombre fini n de quadriques, la quadrique Φ^n est la quadrique de Lie d'une surface $(\bar{x})$ et la suite de quadriques associée au point $\bar{x}$ est $\Phi^n, \Phi^{n-1}, \ldots, \Phi$.[4] Le cas où $n = 0$ donne les surfaces (x), $(\bar{x})$ ayant mêmes quadriques de Lie.[5] Nous avons consacré plusieurs notes au cas où $n = 1$; les quadriques de Lie Φ, Φ^1 des surfaces (x), $(\bar{x})$ se touchent alors en quatre points.[6]

La méthode que nous avons suivie consiste dans l'étude de la suite de Laplace L associée dans l'espace à cinq dimensions S_5 à une surface (x). Cette suite de Laplace L est déterminée par les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, représentant les tangentes aux asymptotiques de la surface (x). Lorsque la suite de quadriques s'arrête à la quadrique Φ^n, la suite L a la période $2n + 6$. Si $n = 0$, elle a la période six et si $n = 1$, la période huit.

Nous reprenons dans ce travail l'étude du cas $n = 1$, où les surfaces (x) et $(\bar{x})$ ont des quadriques de Lie se touchant en quatre points, mais sans utiliser la suite L. Nous formerons les équations du point $\bar{x}$ en donnant les conditions pour que des huit points caractéristiques de la quadrique Φ^1, quatre coincident en un seul, les quatre autres étant distincts.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Nous utiliserons les coordonnées normales de Wilczynski, de sorte que le point x satisfait au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

---

* A mon ami V. Hlavatý.

$$x_{uu} + 2bx_v + c'x = 0,$$
$$x_{vv} + 2dx_u + c''x = 0,$$

a, b, c′, c″ étant des fonctions de u, v différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire. Nous supposerons que la surface (x) n'est pas réglée, ce qui implique que les fonctions a et b ne sont pas nulles.

Au point x, nous attachons le tétraèdre mobile d'Elie Cartan, dont les sommets sont les points de rencontre des directrices de Wilczynski avec la quadrique de Lie, c'est-à-dire les points

$$x, m = x(\log a)_u - 2x_u, n = x(\log b)_v - 2x_v,$$
$$y = [8\,ab - (\log a)_u(\log b)_v]x + 2x_u(\log b)_v + 2x_v(\log a)_u - 4x_{uv}$$

Un point de l'espace sera représenté par

$$z_1x + z_2m + z_3n + z_4y,$$

z_1, z_2, z_3, z_4 étant les coordonnées locales de ce point.

La quadrique de Lie attachée au point x a pour équation locale

$$\Phi \equiv z_1z_4 + z_2z_3 = 0.$$

Au point x, nous avons attaché une suite de quadriques $\Phi, \Phi^1, \Phi^2, \ldots$ telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune de ces quadriques. La quadrique Φ^1 a pour équation

$$\Phi^1 \equiv z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \theta(z_1z_4 + z_2z_3) = 0,$$

où l'on pose

$$\alpha = 2(\log a)_{uu} + (\log a)_u^2 + 4(b_v + c'),$$
$$\beta = 2(\log b)_{vv} + (\log b)_v^2 + 4(a_u + c''),$$
$$\theta = \frac{\beta(\log b^2\beta)_v}{2a} = \frac{\alpha(\log a^2\alpha)_u}{2b}$$

en utilisant la relation

$$a\alpha_u + 2\alpha a_u = b\beta_v + 2\beta b_v.$$

La quadrique Φ^1 a en général huit points caractéristiques: les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 où elle touche la quadrique de Lie Φ et quatre points où elle touche la quadrique Φ^2. Nous supposerons que ces quatre points coincident en un seul point P. Celui-ci décrira une surface dont Φ^1 est la quadrique de Lie et on obtient ainsi deux surfaces dont les quadriques de Lie se touchent en quatre points P_1, P_2, P_3, P_4.

2. Rappelons tout d'abord quelques notations. Nous posons

$$h_1 = -(\log b)_{uv} + 4ab, h_2 = -(\log bh_1)_{uv} + h_1,$$
$$k_1 = -(\log a)_{uv} + 4ab, k_2 = -(\log ak_1)_{uv} + k_1,$$

et ensuite

$$H = (\log b), H^1 = (\log bh_1), H^2 = (\log bh_1h_2),$$
$$\overline{H}^1 = (\log b^2h_1), \ \overline{H}^2 = (\log b^3h_1^2h_2),$$
$$K = (\log a), \ K^1 = (\log ak_1), \ K^2 = (\log ak_1k_2),$$
$$\overline{K}^1 = (\log a^2k_1), \ \overline{K}^2 = (\log a^3k_1^2k_2).$$

Cela étant, observons que l'on a

$$\alpha_u = 2b\theta - 2\alpha K_u, \ \alpha_v = -2k_1 \ K_u^1,$$
$$\beta_v = 2a\theta - 2\beta H_v, \ \beta_u = -2h_1 \ H_v^1,$$
$$\theta_u = 4b\beta - \frac{h_1\beta_1}{a} - \theta K_u, \ \theta_v = 4a\alpha - \frac{k_1\alpha_1}{b} - \theta H_v,$$

avec

$$\alpha_1 = \alpha + K_{uu}^1 + K_u^1\overline{K}_u^1, \ \beta_1 = \beta + H_{vv}^1 + H_v^1\overline{H}_v^1.$$

Nous avons

$$\Phi_u^1 = -K\Phi^1 - \frac{h_1}{a}\left[\beta_1\Phi - 2a(z_1z_3 - \alpha x_2z_4) - aH_v^1(z_2^2 + \alpha z_4^2)\right] = 0,$$

$$\Phi_v^1 = -H\Phi^1 - \frac{k_1}{b}\left[\alpha_1\Phi - 2b(z_1z_2 - \beta z_3z_4) - bK_u^1(z_3^2 + \beta z_4^2)\right] = 0.$$

Pour notre objet, la courbe commune aux quadriques

$$\Phi_u^1 + K\Phi^1 = 0, \ \Phi_v^1 + H\Phi^1 = 0 \tag{1}$$

doit passer par les points P_1, P_2, P_3, P_4 et rencontrer la quadrique Φ^1 en quatre points confondus en P.

Si les quadriques Φ^1 et (1) avaient un contact du second ordre en P, elles appartiendraient à un système homaloidal et se rencontreraient en sept points confondus en P. Cette hypothèse est donc à rejeter.

Si dans le réseau déterminé par Φ^1 et les quadriques (1) il y avait un cône, dans le faisceau de ce réseau ne contenant pas le cône, il y aurait une quadrique dégénérée en deux plans passant par P, un de ces plans étant le plan tangent à Φ^1 en P. Mais alors, le point P compterait pour six points caractéristiques et cette hypothèse est à rejeter.

Il en résulte que les quadriques (1) doivent être des cônes de sommet P. Ces cônes ont en commun les quatre droites joignant P aux points P_1, P_2, P_3, P_4.

3. Ecrivons que la quadrique $\Phi_u^1 + K_u\Phi^1$ est un cône. Nous avons

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_1 & -2a\alpha \\ 2a & \beta_1 & -2aH_v^1 & 0 \\ \beta_1 & -2a\alpha & 0 & -\tfrac{1}{2}a\alpha H_v^1 \end{vmatrix} = \theta$$

c'est-à-dire

$$\beta_1^2 + 4a^2\alpha = 0. \tag{I}$$

On constate que non seulement la quadrique considérée est un cône, mais qu'elle dégénère en deux plans, c'est-à-dire que les plans

$$\begin{aligned} &2az_3 + \beta_1 z_4 = 0, && \beta_1 z_3 - 2a\alpha z_4 = 0, \\ &2az_1 + \beta_1 z_2 - 2aH_V^1 z_3 = 0, && \beta_1 z_1 - 2a\alpha z_2 - 4a\alpha H_V^1 z_4 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

passent par une même droite. Sous la condition (I), les deux premiers plans coincident et d'autre part on a

$$\begin{aligned} &\beta_1[2az_1 + \beta_1 z_2 - 2aH_V^1 z_3] - 2a[\beta_1 z_1 - 2a\alpha z_2 - 4a\alpha H_V^1 z_4] \\ &\quad = 2aH_V^1 (\beta_1 z_3 - 2a\alpha z_4) = 0. \end{aligned}$$

Observons que si p_1 est la droite commune aux plans (2), c'est-à-dire aux plans π_1, π_2 formant la quadrique considérée, cette droite appartient au plan tangent à Φ^1 en P. En effet, chacun des plans π_1, π_2 coupe Φ^1 suivant une conique touchant en P le plan tangent à cette quadrique d'une part, et la droite p_1 d'autre part.

Ecrivons maintenant que la quadrique $\Phi_V^1 + H_V\Phi^1$ est un cône. On a

$$\begin{vmatrix} 0 & 2b & 0 & \alpha_1 \\ 2b & -2bK_u^1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & -2b\beta \\ \alpha_1 & 0 & 2b\beta & -4b\beta K_u^1 \end{vmatrix} = \theta,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1^2 + 4b^2\beta = 0. \tag{II}$$

Sous cette condition, la quadrique dégénère en deux plans, c'est-à-dire que les plans

$$\begin{aligned} &2bz_2 + \alpha_1 z_4 = 0, && \alpha_1 z_2 - 2b\beta z_4 = 0, \\ &2bz_1 - 2bK_u^1 z_2 + \alpha_1 z_3 = 0, && \alpha_1 z_1 - 2b\beta z_3 - 4b\beta K_u^1 z_4 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

passent par un même droite p_2 appartenant au plan tangent à Φ^1 en P.

4. Pour notre objet, les droites p_1 et p_2 doivent se rencontrer au point P. Ecrivons que le premier et le troisième plans (2) et le premier et le troisième plans (3) ont un point commun. Nous avons

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & \beta_1 \\ 0 & 2b & 0 & \alpha_1 \\ a & \beta_1 & -2aH_V^1 & 0 \\ b & -2bK_u^1 & \alpha_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$a\alpha_1 K_u^1 = b\beta_1 H_v^1. \qquad \text{(III)}$$

Sous les conditions (I), (II), (III) quatre des points caractéristiques des quadriques Φ^1 sont confondus en P et les quatre autres points caractéristiques P_1, P_2, P_3, P_4 de ces quadriques sont les sommets des quadrilatères de Demoulin.

Les coordonnées du point P sont

$$\alpha_1(2aK_u^1 - \beta_1) = \beta_1(2bH_v^1 - \alpha_1), \quad 2a\alpha_1, \quad 2b\beta_1, \quad -4ab.$$

et on vérifie sans peine que ce point appartient bien à la quadrique Φ^1.

5. Dans une note récente,[7] nous avons établi des conditions qui, en tenant compte des équations (I) et (II), s'écrivent

$$\overline{H}_v^2\,(H_v^1\beta_1 + a\theta) = 0, \quad \overline{K}_u^2\,(K_u^1\,\alpha_1 + b\theta) = 0$$
$$H_v^1\,(H_v^1\overline{H}_v^2 - \beta_1) = a\theta - \beta\overline{H}_v^2,$$
$$K_u^1\,(K_u^1\overline{K}_u^2 - \alpha_1) = b\theta - \alpha\overline{K}_u^2.$$

Observons que $\overline{H}_v^2$ et $\overline{K}_u^2$ étant nuls ou non, on a

$$H_v^1\beta_1 + a\theta = 0, \quad K_u^1\,\alpha_1 + b\theta = 0. \qquad \text{(IV)}$$

En utilisant ces relations, les coordonnées du point P s'écrivent

$$\rho z_1 = \alpha_1\beta_1 + 4ab\theta, \rho z_2 = -2a\alpha_1, \rho z_3 = -2b\beta_1, \rho z_4 = 4ab$$

de sorte que le point P, que nous désignerons par $\bar{x}$, est

$$\bar{x} = (\alpha_1\beta_1 + 4ab\theta)x - 2a\alpha_1 m - 2b\beta_1 n + 4aby.$$

6. Pour obtenir l'équation du plan tangent à la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$, on peut prendre celle du plan tangent à la quadrique Φ^1 ou celle du plan contenant les droites p_1, p_2. Dans le premier cas, on obtient une équation plus compliquée que dans le second, mais la première se réduit évidemment à la seconde en tenant compte des conditions précédentes.

La droite p_1 passe par le point $(\beta_1, -2a, 0, 0)$ et la droite p_2 par le point $(\alpha_1\ 0, -2b\ 0)$. L'équation du plan tangent est

$$4abz_1 + 2b\beta_1 z_2 + 2a\alpha_1 z_3 + (\alpha_1\beta_1 - 4ab\theta)z_4 = 0$$

On vérifie que ce plan coupe la quadrique Φ^1 suivant les droites p_1, p_2.

REFERENCES

1. Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé, Bull. Acad. Roy. Belg. 812-820 (1927); 31-41 (1928).

2. La Théorie des Surfaces et l'espace réglé, Actualités sci. (Paris, Hermann, (**138**): (1934).

3. La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé, Mém. Acad. Roy. Belg. (1964).

4. Surfaces associées à une suite de Laplace périodique, Bull. Soc. Sci. Liége, 597-601, 811-813 (1963). Voir aussi la Géométrie différentielle des surfaces... (loc. cit.).

5. Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie, Bull. Acad. Roy. Belg. 158-186, 345-348 (1928).

6. Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, Bull. Acad. Roy. Belg. 245-254, 363-368 (1953).

7. Sur les directrices de Wilczynski des surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, Bull. Acad. Roy. Belg. 48-55 (1964).