RÉSEAUX DE QUADRIQUES ASSOCIÉS AUX POINTS D'UNE SURFACE OU AUX DROITES D'UNE CONGRUENCE *W*

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liège)

A un point d'une surface non réglée nous avons associé une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie [1]. Deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune des quadriques. A chacune des quadriques de la suite est donc associé un réseau de quadriques ayant pour base les huit points caractéristiques de la quadrique. Nous avons déterminé ce réseau d'une manière intrinsèque dans un travail récent [2].
A une droite d'une congruence *W* dont les nappes focales ne sont pas réglées, nous avons également associé une suite de quadriques qui possède les mêmes propriétés que la suite dont il vient d'être question [3]. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune des quadriques. A chaque quadrique est associé un réseau ayant pour base les huit points caractéristiques de la quadrique en question.
Dans cette note, nous commençons par reproduire brièvement les raisonnements qui nous ont conduit à la construction intrinsèque du réseau attaché à une quadrique de la première suite dont il est question plus haut, en y ajoutant quelques détails. Nous résolvons ensuite le même problème pour les quadriques associées à une droite d'une congruence *W*.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. A cette surface nous associons dans l'espace S_5 à cinq dimensions une suite de Laplace L,

$$\ldots,\ U^n,\ \ldots,\ U^1,\ U,\ V,\ V^1,\ \ldots,\ V^n\ \ldots \qquad (L)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, déterminée par les points U, V qui représentent sur l'hyperquadrique Q de

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, N° 5, P. 655–660, BUCAREST, 1968

Klein, les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x). Nous supposerons cette suite illimitée dans les deux sens.

La suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices rectilignes d'une quadrique Φ^n. On a ainsi une suite de quadriques Φ, $\Phi^1, \ldots, \Phi^n, \ldots$ attachée au point x de la surface (x), la première étant la quadrique de Lie.

Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques. Celles-ci ont donc en commun les côtés d'un quadrilatère gauche.

I

2. La droite UV appartient à Q, les droites UU^1, VV^1 touchent cette hyperquadrique respectivement en U et V. Nous supposerons qu'en dehors des points U, V, aucun point de la suite L n'appartient à Q, ce qui est le cas général. Dans ces conditions, les droites joignant deux points consécutifs de la suite rencontrent Q en deux points distincts, exception faite pour les droites UV, UU^1, VV^1.

Supposons $n \geqslant 1$ et désignons par C_n, C'_n les points de rencontre de la droite $V^n V^{n+1}$ avec Q, par D_n, D'_n ceux de la droite $U^n\, U^{n+1}$. A ces points correspondent dans l'espace S_3 contenant la surface (x) des droites que nous désignerons respectivement par c_n, c'_n, d_n, d'_n.

La quadrique Φ^n contient les droites c_n, c'_n d_n, d'_n, c_{n+1}, c'_{n+1}, d_{n+1} d'_{n+1}.

Les tangentes aux lignes u des surfaces (D_n), (D'_n) appartiennent au plan $U^{n-1} U^n\, U^{n+1}$ et se coupent en un point A^n. Les tangentes aux lignes u des surfaces (C_n), (C'_n) se coupent en un point $\overline{B}^n$ qui appartient au plan $V^n V^{n+1}\, V^{n+2}$. Les tangentes aux courbes v des surfaces (D_n), (D'_n), se coupent en un point $\overline{A}^n$ du plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et les tangentes aux courbes v des surfaces (C_n), (C'_n) se coupent en un point B^n du plan $V^{n-1}\, V^n\, V^{n+1}$.

Rappelons, bien que cela ne nous soit pas utile ici, que les points A^n, B^n, $\overline{A}^n$, $\overline{B}^n$ sont en ligne droite, conjuguée de l'espace $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$.

Désignons par $\Phi^n = 0$ l'équation de la quadrique Φ^n. Nous avons établi que la quadrique $\Phi^n_u = 0$ coupe Φ^n suivant les droites c_n, c'_n, d_{n+1}, d'_{n+1}. La quadrique $\Phi^n_v = 0$ coupe Φ^n suivant les droites c_{n+1}, c'_{n+1}, d_n, d'_n.

Nous allons former les faisceaux de quadriques déterminés par Φ^n, Φ^n_u, et par Φ^n, Φ^n_v, d'une manière intrinsèque.

3. L'hyperplan polaire du point A^{n+1} contient les points D_{n+1}, D'_{n+1} donc la droite $U^{n+1} U^{n+2}$ et le plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ conjugué du plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ qui contient A^{n+1}. Le point $\overline{B}^n$ appartient au plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ donc à l'hyperplan polaire de A^{n+1}. Les points A^{n+1} et $\overline{B}^n$ sont donc conjugués par rapport à Q. D'ailleurs, l'hyperplan polaire de $\overline{B}^n$ contient les points $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ V^n V^{n+1} et la droite $A^{n+1} \overline{B}^n$ est conjuguée de l'espace $U^{n+1} U^{n+2} V^n V^{n+1}$.

Soient A', B' deux points de la droite $A^{n+1}\overline{B}^n$ conjugués par rapport à Q. Les plans $A' U^{n+1} U^{n+2}$ et $B' V^n V^{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q. Leurs intersections avec Q représentent les droites des deux modes d'une quadrique Φ' passant par les droites c_n, c'_n, d_{n+1}, d'_{n+1}. Il en résulte que la quadrique Φ' appartient au faisceau déterminé par les quadriques Φ^n et Φ^n_u.

Observons que les plans $B'U^{n+1}U^{n+2}$ et $A'V^nV^{n+1}$ sont également conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices rectilignes d'une quadrique Φ'' passant par les mêmes droites que Φ' et appartenant au faisceau précédent. Dans ce faisceau, il existe une correspondance involutive faisant se correspondre Φ' et Φ''.

Dans cette correspondance, la quadrique Φ^n qui correspond aux plans $A^{n+1}U^{n+1}U^{n+2}$ et $\overline{B}^nV^nV^{n+1}$ a pour homologue une quadrique Θ^n qui correspond aux plans $\overline{B}^nU^{n+1}U^{n+2}$ et $A^{n+1}V^nV^{n+1}$ et qui est déterminée d'une manière intrinsèque.

Soient R_1, R_2 les points d'intersection de la droite $A^{n+1}\overline{B}^n$ avec Q. Les plans $R_1U^{n+1}U^{n+2}$ et $R_1\ V^nV^{n+1}$ sont conjugués et la quadrique correspondante est dégénérée en deux plans contenant par exemple l'un les droites c_nd_{n+1} et $c'_nd'_{n+1}$. De même les plans $R_2U^{n+1}U^{n+2}$ et $R_2\ V^nV^{n+1}$ correspondent à une quadrique dégénérée en deux plans $c_n\,d'_{n+1}$ et $c'_n\ d_{n+1}$.

Les quadriques Φ^n et Θ^n déterminent un faisceau contenant deux quadriques dégénérées en deux plans, donc les autres quadriques et en particulier Θ^n sont irréductibles.

4. La quadrique Φ^n_v appartient de même à un faisceau contenant deux quadriques dégénérées en deux plans.

Les points $\overline{A}^n$ et B^{n+1} sont conjugués par rapport à Q et si A', B' sont deux points de la droite $\overline{A}^n\ B^{n+1}$ conjugués par rapport à Q, aux sections de cette hyperquadrique par les plans $A'V^{n+1}V^{n+2}$ et $B'U^nU^{n+1}$ correspondent les droites d'une quadrique Φ'. Aux plans $B'V^{n+1}V^{n+2}$ et $A'U^nU^{n+1}$ correspond de même une quadrique Φ''. Les quadriques Φ' et Φ'' déterminent un faisceau contenant Φ^n et Φ^n_v. Elles passent par les droites $d_n\,d'_n$ et c_{n+1}, c'_{n+1}.

Dans ce faisceau, il y a une correspondance involutive entre ses éléments et à la quadrique Φ^n correspond la quadrique $\overline{\Theta}^n$ représentée par les plans $\overline{A}^nV^{n+1}V^{n+2}$ et $B^{n+1}U^nU^{n+1}$.

Si R_1, R_2 sont les points de rencontre de la droite $\overline{A}^nB^{n+1}$ avec Q, aux plans $R_1V^{n+1}\,V^{n+2}$ et $R_1\ U^n\ U^{n+1}$, d'une part, $R_2\ V^{n+1}\ V^{n+2}$ et $R_2U^nU^{n+1}$ d'autre part, correspondent des quadriques dégénérées en deux plans. Les autres quadriques du faisceau et notamment $\overline{\Theta}^n$ sont irréductibles.

5. Les quadriques Φ^n, Θ^n, $\overline{\Theta}^n$ déterminent un réseau ayant pour base les huit points caractéristiques de Φ^n. On a ainsi une suite de réseaux attachés à chaque point de la surface (x) pour $n \geqslant 1$.

Observons que la quadrique de Lie Φ a pour points caractéristiques le point x compté quatre fois et les sommets du quadrilatère de Demoulin de côtés c_1, c'_1, d_1, d'_1. Les points caractéristiques de Φ sont situés sur les quadriques d'un réseau déterminé par Φ et par les cônes passant par les droites projetant du point x les sommets du quadrilatère de Demoulin.

Les réseaux associés aux quadriques Φ^n et Φ^{n+1} n'ont aucune quadrique en commun ; ils appartiennent au système de dimension cinq ayant pour base les points communs aux droites c_{n+1}, c'_{n+1}, d_{n+1}, d'_{n+1}.

II

6. Soit (j) une congruence W dont les surfaces focales (x), $(\overline{x})$ ont pour asymptotiques des courbes u, v et ne sont pas des réglées. La droite j est représentée sur Q par un point J satisfaisant à une équation de Laplace (Darboux).

A la surface (x) correspond une suite de Laplace L et à la surface $(\overline{x})$ une suite de Laplace $\overline{L}$

$$\ldots, \overline{U}^n, \ldots, \overline{U}^1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}^1, \ldots, \overline{V}^n, \ldots \qquad (\overline{L}$$

analogue à L.

Le point J est l'intersection des droites UV, $\overline{U}\overline{V}$; il détermine une suite de Laplace

$$\ldots, J^n, \ldots, J^1, J, J^{-1}, \ldots, J^{-n}, \ldots \qquad (J)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, inscrite dans les suites L et $\overline{L}$. Le point J^n est l'intersection des droites $U^{n-1}U^n$ et $\overline{U}^{n-1}\overline{U}^n$, le point J^{-n} celui des droites $V^{n-1}V^n$, $\overline{V}^{n-1}\overline{V}^n$.

Le point P^i, pôle de l'hyperplan $J^{i-2}J^{i-1}J^iJ^{i+1}J^{i+2}$ est l'intersection des droites $V^{i-1}\overline{V}^{i-1}$ et $V^i\overline{V}^i$. Il appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, P^n, \ldots, P^1, P, P^{-1}, \ldots, P^{-n} \qquad (P)$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v, circonscrites aux suites L et $\overline{L}$.

Les plans $J^nJ^{n+1}J^{n+2}$ et $P^nP^{n+1}P^{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices rectilignes d'une quadrique Ψ^n. On a ainsi une suite de quadriques

$$\ldots, \Psi^n, \ldots, \Psi^1, \Psi^0, \Psi, \Psi^{-0}, \Psi^{-1}, \ldots, \Psi^{-n}, \ldots$$

attachée à la droite j. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques.

7. Supposons $n > 0$ et désignons par C_n, C'_n les points d'intersection de la droite J^nJ^{n+1} avec Q, par D_n, D'_n ceux de Q avec la droite P^nP^{n+1}, par c_n, c'_n, d_n, d'_n les droites de S_3 représentées par ces points.

Les points caractéristiques de la quadrique Ψ^n sont les quatre points d'intersection des droites c_n, c'_n, d_n, d'_n et les quatre points d'intersection des droites c_{n+1}, c'_{n+1}, d_{n+1}, d'_{n+1}.

Désignons par A^n le point d'intersection des tangentes aux lignes u des surfaces (C_n), (C'_n), par B^n celui des tangentes aux lignes v des surfaces (D_n), (D'_n), par $\overline{A}^n$ le point d'intersection des tangentes aux lignes v des surfaces (C_n), (C'_n), enfin par $\overline{B}^n$ celui des tangentes aux courbes u des surfaces (D_n), (D'_n).

On remarquera que les quatre points A^n, B^n, $\overline{A}^n, \overline{B}^n$ sont en ligne droite, droite conjuguée de l'espace à trois dimensions $J^nJ^{n+1}P^nP^{n+1}$.

8. Considérons les matrices à six colonnes

$$|J^n \quad J^{n+1} \quad J^{n+2}|, \ |P^n \quad P^{n+1} \quad P^{n+2}| \tag{1}$$

qui correspondent à la surface Ψ^{-n}.

En dérivant par rapport à u, on introduit les matrices

$$|J^{n-1} \quad J^{n+1} \quad J^{n+2}|, \ |P^n \quad P^{n+1} \quad P^{n+3}|.$$

On en déduit que si $\Psi^n_u = 0$ est la dérivée de l'équation $\Psi^n = 0$ de la quadrique Ψ^n, la quadrique Ψ^n_u passe par les droites $c_{n+1}, c'_{n+1}, d_n, d'_n$.

Le point A^{n+1} est le pôle de l'hyperplan $J^{n+1}J^{n+2}P^nP^{n+1}P^{n+2}$ et le point $\overline{B}^n$ celui de l'hyperplan $P^nP^{n+1}J^nJ^{n+1}J^{n+2}$. Ces points sont donc conjugués par rapport à Q et la droite $A^{n+1}\overline{B}^n$ est la conjuguée de l'espace $J^{n+1}J^{n+2}P^nP^{n+1}$.

Considérons maintenant deux points A', B' de la droite $A^{n+1}\overline{B}^n$ conjugués par rapport à Q. Aux plans $A'J^{n+1}J^{n+2}$ et $B'P^nP^{n+1}$ correspond une quadrique Ψ' et aux plans $B'J^{n+1}J^{n+2}$ et $A'P^nP^{n+1}$ une quadrique Ψ''. Ces deux quadriques passent par les droites c_{n+1}, c'_{n+1}, d_n, d'_n et déterminent un faisceau contenant les quadriques Ψ^n et Ψ^n_u. Elles se correspondent de plus dans une involution du faisceau.

Dans cette involution, il correspond à la quadrique Ψ_n la quadrique représentée par les plans $\overline{B}^nJ^{n+1}J^{n+2}$ et $A^{n+1}P^nP^{n+1}$. Désignons-la par Σ^n.

Dans le faisceau déterminé par Ψ^n et Σ^n, il existe deux quadriques dégénérées en deux plans (quand A' et B' coïncident en un point de Q). Les autres quadriques du faisceau sont donc irréductibles.

9. Dérivons les matrices (1) par rapport à v. Cela introduit les matrices

$$|J^n \quad J^{n+1} \quad J^{n+3}|, \ |P^{n-1} \quad P^{n+1} \quad P^{n+2}|$$

On en conclut que la dérivée $\Psi^n_v = 0$ de l'équation $\Psi^n = 0$ de Ψ^n passe par les droites c_n, c'_n, d_{n+1}, d^1_{n+1}.

Les points $\overline{A}^n$ et B^{n+1} sont conjugués par rapport à Q. Soient A', B' deux points de la droite $\overline{A}^n B^{n+1}$ conjugués par rapport à Q. Aux plans $A'J^nJ^{n+1}$ et $B'P^{n+1}P^{n+2}$ correspond une quadrique Ψ' et aux plans $B'J^nJ^{n+1}$ et $A^{n+1}P^{n+1}P^{n+2}$ correspond une quadrique Ψ''. Ces deux quadriques passent par les droites c_n, c'_n, d_{n+1}, d'_{n+1} et déterminent un faisceau contenant la quadrique Ψ^n. Dans ce faisceau, les quadriques Ψ' et Ψ'' se correspondent dans une involution et dans celle-ci, à la quadrique Ψ^n correspond une quadrique $\overline{\Sigma}^n$ représentée par les plans $B^{n+1}J^nJ^{n+1}$ et $\overline{A}^nP^{n+1}P^{n+2}$.

Les quadriques Ψ^n, Σ^n, $\overline{\Sigma}^n$ déterminent un réseau ayant pour base les huit points caractéristiques de la quadrique Ψ^n.

Ce qui vient d'être établi pour la quadrique Ψ^n subsiste quand on remplace n par $-n$ et $n+1$ par $-n-1$. Cela donne le réseau associé à la quadrique Ψ^{-n}.

10. Dans ce qui précède, nous avons supposé $n \geqslant 1$. La quadrique Ψ^0 représente les sections de Q par les plans JJ^1J^2 et PP^1P^2. Rappelons que P

est l'intersection des droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$ (c'est la seconde image du complexe linéaire osculateur à la congruence le long de la droite j). Le point P^1 est l'intersection des droites $V\bar{V}$ et $V^1\bar{V}^1$, le point P^2 celui des droites $V^1\bar{V}^1$ et $V^2\bar{V}^2$.

La quadrique Ψ^0 passe par les droites c_1, c_1', d_1, d_1', xx_v, $\bar{x}\bar{x}_v$ et j. Ses points caractéristiques sont les intersections des quatre premières droites et les points x, $\bar{x}$ comptés chacun deux fois.

Le point A^1 est l'intersection des tangentes aux courbes u des surfaces (C_1), (C_1') ; il se trouve dans le plan JJ^1J^2. Le point $\bar{B}^0$ est l'intersection des tangentes aux courbes u des surfaces engendrées par les points d'intersection de Q avec PP^1, c'est-à-dire de (V), $(\bar{V})$. $\bar{B}^0$ coïncide donc avec le point J^{-1}. La quadrique $\sum^0$ correspond donc au couple de plans $J^{-1}J^1J^2$ et A^1PP^1. Elle passe par les droites c_1, c_1', xx_v $\bar{x}\bar{x}_v$.

Le point B^1 est l'intersection des tangentes aux courbes v des surfaces (D_1), (D_1'). La droite JJ^1 est tangente à Q au point J, de sorte que le point A^0 est indéterminé sur la droite JJ^1. Observons que l'hyperplan polaire de B^1, situé dans le plan PP^1P^2, est $P^1P^2J\,J^1\,J^2$ et le point A^0 devant être conjugué à B^1, A^0 doit coïncider avec J^1.

La quadrique $\bar{\sum}^0$ correspond aux plans $J^1P^1P^2$ et B^1JJ^1 ; elle passe par les droites c_1, c_1' et j, comptée deux fois.

Les quadriques Ψ^0, $\sum^0$, $\bar{\sum}^0$ déterminent un réseau ayant pour base les points caractéristiques de Ψ^0. Elles touchent les surfaces (x), $(\bar{x})$ en x, $\bar{x}$ et se raccordent le long de la droite j.

On arrive à des conclusions analogues pour la quadrique Ψ^{-0}, qui correspond aux plans $JJ^{-1}J^{-2}$ et $PP^{-1}P^{-2}$. La quadrique Ψ^{-0} passe par les droites c_{-1}, c'_{-1}, d_{-1}, d'_{-1}, xx_u, $\bar{x}\bar{x}_u$ et j. Les quadriques du réseau associé passent par les mêmes droites et se raccordent le long de j.

11. Il nous reste à considérer la quadrique Ψ qui correspond aux plans J^1JJ^{-1} et P^1PP^{-1}.

Le premier de ces plans touche l'hyperquadrique Q au point J, donc la quadrique Ψ contient la droite j comptée deux fois. Le second plan contient les points U, $\bar{U}$, V, $\bar{V}$, donc la quadrique Ψ contient les droites xx_u, xx_v, $\bar{x}\bar{x}_u$, $\bar{x}\bar{x}_v$. On en conclut que la quadrique Ψ est dégénérée en deux plans : les plans tangents aux surfaces (x), $(\bar{x})$, ces derniers passant par la droite j.

Le réseau associé à Ψ est constitué par les couples de plans passant par la droite j.

Reçu le 29 décembre 1967

Université de Liège
Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé.* Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1927, pp. 812—826 ; 1928, pp. 31—41. On trouvera un exposé de nos recherches dans notre mémoire *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé.* Mémoires in -8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964, pp. 1—84.
2. *Sur l'enveloppe des quadriques attachées à un point d'une surface.* Bulletin de la Société des Sciences de Liége, 1964, pp. 607—609.
3. *Sur quelques familles de quadriques associées aux points d'une surface.* Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 1928, pp. 213—226.