Sur certains couples de congruences de droites

LUCIEN GODEAUX

Etant donné deux congruences de droites (a), (b), Finikoff dit qu'elles présentent la configuration T lorsque les plans focaux de chacune d'elles passent par les foyers de l'autre [1]. M. Rosenfeld a établi que les points A, B qui représentent sur l'hyperquadrique de Klein Q les droites a, b, se trouvent sur une droite joignant deux points transformés de Laplace l'un de l'autre [2]. Notre but est de donner de ce théorème une démonstration purement géométrique.

1. – Soient (a), (b) deux congruences de droites. Désignons par A_1, A_2 les foyers de la droite a, par B_1, B_2 ceux de la droite b, par α_1, α_2 les plans focaux de a tangents respectivement en A_1, A_2 aux surfaces (A_1), (A_2), par β_1, β_2 les plans focaux de b tangents respectivement en B_1, B_2 aux surfaces (B_1), (B_2).

Les congruences (a), (b) présentent la configuration T si elles sont liées par une correspondance biunivoque telle que:

1) Le plan α_1 passe par B_2 et le plan α_2 par B_1,

2) Le plan β_1 passe par A_2 et le plan β_2 par A_1.

Observons que les plans α_2, β_2 passent par la droite $r_1 = A_1B_1$ et les plans α_1, β_1 par la droite $r_2 = A_2B_2$.

2. – Soient A, B les points de l'hyperquadrique de Klein Q représentant les droites a, b. Les faisceaux de rayons (A_1, α_2), (A_2, α_1) sont représentés sur Q par des droites a_1, a_2 qui sont tangentes en A aux courbes de la surface (A) images des développables de la congruence (a). De même, les faisceaux (B_1, β_2), (B_2, β_1) sont représentés sur Q par deux droites b_1, b_2 tangentes en B aux courbes qui représentent les développables de la congruence (b).

Les faisceaux (A_1, α_2) et (B_1, β_2) ont en commun la droite r_1, donc les droites a_1, b_1 se coupent en un point R_1 image de la droite r_1.

De même, les droites a_2, b_2 se coupent en un point R_2 image de r_2.

Les droites AB, R_1R_2 ne peuvent appartenir à Q. Le plan tangent en A à la surface (A) est le plan AR_1R_2 et le plan tangent en B à la surface (B) est BR_1R_2.

Menons une tangente en A à la surface (A), coupant la droite R_1R_2 en un point P.A cette tangente correspond une tangente à la surface (B) en B. Prenons la conjuguée harmonique de cette tangente par rapport aux droites BR_1, BR_2 et soit P' le point où cette seconde tangente coupe la droite R_1R_2.

La correspondance entre les points P, P' est algébrique et est une homographie.

Deux cas peuvent se présenter:

1) Il existe un seul couple de points P, P' partageant harmoniquement R_1, R_2.

2) Les points P, P' sont conjugués harmoniques par rapport à R_1, R_2 quelque soit P.

3. - Plaçons-nous dans le premier cas.

Supposons que les congruences soient rapportées à des paramètres u, v, égaux pour deux droites homologues.

En chaque point de la surface (A), il existe deux droites AP, AP' partageant harmoniquement les tangentes AR_1, AR_2. Il existe donc sur (A) deux familles de courbes γ_1, γ'_1 telles que par un point A passent une courbe de chaque famille, la tangente à la courbe γ_1 passant par P et la tangente à la courbe γ'_1 passant par P'. A ces courbes correspondent sur (B) des courbes γ_2, γ'_2 possédant la propriété analogue.

On peut supposer que par un changement des paramètres u, v, les courbes γ_1, γ_2 soient données par $v = C^{te}$ et les courbes γ'_1, γ'_2 par $u = C^{te}$.

Faisons varier u. Le plan tangent le long de la droite AB à la surface engendrée par cette droite est fixe et coïncide avec ABP. Cette surface est donc une développable. Désignons par U le point où la droite AB touche l'arête de rebroussement de cette développable.

Lorsque v varie, le plan tangent à la surface engendrée par la droite AB le long de cette droite est fixe et coïncide avec ABP'. Cette surface est donc une développable. Soit V le point où la droite touche l'arête de rebroussement de la développable.

Les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

4. - Plaçons-nous dans le second cas.

Dans la correspondance entre les surfaces (A), (B), les droites AR_1 et BR_1 d'une part, AR_2, BR_2 d'autre part se correspondent, c'est-à-dire que dans la correspondance entre les congruences (a), (b), les développables se correspondent. On peut supposer que les variables u, v aient été choisies de telle sorte que les développables soient données par $u = \mathrm{C}^{te}$ et $v = C^{te}$.

Lorsque u varie, le plan tangent le long de la droite AB à la surface (AB) est fixe et coïncide avec ABR_1. Soit U le point de contact de AB avec l'arête de rebroussement de la développable engendrée par AB.

Lorsque v varie, le plan tangent le long de AB à la surface (AB) est fixe et coïncide avec ABR_2. La surface (AB) est donc une développable, soit V le point de contact de la droite avec l'arête de rebroussement. Les point U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

On obtient ainsi le théorème de M. Rosenfeld.

Si A, B représentent sur l'hyperquadrique de Klein les droites de deux congruences présentant la configuration T, il existe sur la droite AB deux points transformés de Laplace l'un de l'autre.

Bibliographie.

[1] S. P. Finikoff, *Theorie der Kongruenzen*, traduit par G. Bol (Berlin, 1959). Voir p. 275 et suiv. Voir aussi M. Decuyper, *Sur quelques transformations des congruences de droites*, « Deuxième Colloque de Géométrie différentielle du C.B.R.M. », (Louvain, 1962) où l'on trouvera une bibliographie complète.

[2] B. A. Rosenfeld, *Die metrische Methode in der projektive Differentialgeometrie* (en russe), « Mathem. Sammelbd. », (1948, pp. 157-192. Voir aussi le mémoire de M. Decuyper cité plus haut.