L. GODEAUX
1966
Atti del " Simposio internazionale
di Geometria algebrica „
(Roma 30 settembre - 5 ottobre 1965)

La Géométrie algébrique italienne [1]

par **LUCIEN GODEAUX** (Liège)

Lorsqu'il est question de Géométrie italienne, on pense tout de suite à Cremona. Ce n'est cependant pas des travaux de l'illustre géomètre, il padre della Geometria italiana comme l'appelait Enriques, que nous voudrions vous entretenir, mais de ceux des géomètres qui, après lui, ont porté avec succès le flambeau des recherches géométriques.

La question qui s'est posée à ces géomètres peut s'énoncer de la manière suivante : Considérons les variétés algébriques à n dimensions, ou, suivant une expression souvent employée en Italie, les êtres (ente) algébriques à n dimensions. Convenons de dire que deux variétés appartiennent à la même classe lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par une correspondance birationnelle sans que celle-ci puisse s'étendre, en tant que correspondance birationnelle, aux espaces ambiants, dont les dimensions peuvent d'ailleurs être différentes. Il s'agit alors de caractériser les variétés de chaque classe, c'est-à-dire de trouver les caractères des variétés qui restent invariants vis-à-vis des transformations birationnelles. C'est ce que l'on appelle la *Géométrie sur une variétés algébrique.* Disons tout

[1] Nous n'avons pas donné d'indications bibliographiques précises pour la raison suivante : Les *Memorie Scelte* de Castelnuovo ont été publiés (Bologne, Zanichelli, 1937), les deux premiers volumes de ceux d'Enriques sont parus (Bologne, Zanichelli, 1956, 1959). D'autre part les oeuvres de Corrado Segre ont été publiées (Rome, Cremonese, 1957-1963), de même que celles de Gaetano Scorza (Rome, Cremonese, 1960-1963). Un seul volume des oeuvres de Severi a été publié (Rome, Cremonese, 1950), il contient ses travaux de Géométrie enumérative, mais Severi a publié trois volumes (Rome, Cremonese, 1942, 1958, 1959) où il revient sur ses travaux antérieurs en les approfondissant. On y trouvera les renseignements bibliographiques sur ses publications. Les *Memorie Scelte* de M. O. Chisini ont également été publiés (Bologna, Zanichelli, 1961).

de suite que ce problème n'a été étudié que surtout dans le cas des courbes et des surfaces. Même dans ces cas, il reste encore bien des questions à élucider.

Vers 1890, sous l'influence d'Enrico d'Ovidio, de Giuseppe Veronese, de Corrado Segre, les jeunes géomètres italiens étaient familiarisés avec la géométrie projective hyperspatiale. Quelques années plus tôt, les mathématiciens étudiaient la théorie des formes algébriques binaires et celle des groupes de points sur une droite qui en est l'interprétation géométrique. Castelnuovo eut l'idée de remplacer la droite par une courbe rationelle normale hyperspatiale, ce qui simplifie notablement les recherches en question. Castelnuovo dut sans doute se proposer de remplacer la courbe rationnelle par une courbe de genre quelconque; c'est peut-être là qu'il faut voir l'origine de la méthode hyperspatiale dans la géométrie sur une courbe algébrique.

Le Géométrie sur une courbe algébrique avait été construite par Brill et Noether en utilisant les courbes planes. Dès 1888, Castelnuovo publie un travail sur les courbes elliptiques et l'année suivante un second travail sur les courbes algébriques où les courbes sont situées dans des espaces à un nombre quelconque de dimensions. Au lieu d'utiliser le restsatz comme Brill et Noether, il utilise la formule donnant le nombre de groupes de $r+1$ points communs à deux séries, l'une d'ordre m et de dimension un, l'autre d'ordre n et de dimension r.

Castelnuovo était alors l'assistant de d'Ovidio à Turin, il y avait rencontré Corrado Segre et de leurs entretiens devait sortir un exposé de la Géométrie sur une courbe algébrique publié par Segre en 1894 sous le titre *Introduzione alla Geometria sopra un ente semplicemente infinito.* La méthode hyperspatiale y est systématiquement employée.

Parmi les travaux de Castelnuovo consacrés aux courbes algébriques, il convient de citer une étude sur les correspondances entre les groupes de p points appartenant à une courbe de genre p, qui est au fond l'étude des transformations birationnelles en elle-même de la variété de Jacobi attachée à la courbe, une recherche très importante sur la dimension de la somme minimum de plusieurs séries linéaires, c'est-à dire la dimension d'une série qui contient les groupes formés de groupes des séries. Appliquée aux multiples d'une série linéaire, cette question fournit le maximum du genre d'une courbe d'ordre n appartenant à un espace à r dimensions. La question analogue pour les surfaces reste à étudier. Citons aussi le mémoire où Castelnuovo démontre qu'une série d'indice un et de dimension supérieure à l'unité appartient à une série linéaire. Il devait revenir plus tard (1900) sur la théorie des courbes en déterminant les conditions pour qu'une série de groupes de points simplement infinie et d'indice supérieur à l'unité appartienne à une série linéaire.

Il serait injuste de ne pas citer Bertini, qui participa lui aussi à l'élaboration de la Géométrie sur une courbe algébrique. On doit d'ailleurs à ce géomètre la première étude faite dans l'esprit indiqué plus haut. Dès 1877, il établit en effet que l'on peut ramener, par des transformations birationnelles, les transformations birationnelles involutives du plan à quatre types bien définis. Les involutions du second ordre du plan se répartissent donc en quatre classes. Une restriction cependant: la transformation birationnelle entre deux êtres d'une même classe s'étend à tout le plan.

C'est aussi par rapport au groupe des transformations birationnelles du plan que Bertini, Guccia, Jung, Martinetti ont tenté de classer les systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre donné. Deux systèmes linéaires de courbes de genre p appartiennent à une même classe, ou sont birationnellement équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle du plan. Se basant sur le théorème de Noether, d'après lequel une transformation birationnelle du plan est le produit de transformations quadratiques, ils utilisent ces dernières et cherchent à caractériser chaque classe en y fixant un système satisfaisant à une condition projective, par exemple en prenant le système dont les courbes ont l'ordre minimum. Nous reviendrons plus loin sur le théorème de Noether. Castelnuovo devait reprendre ces questions en utilisant systématiquement la géométrie sur une courbe algébrique. Dans un mémoire publié en 1891, il utilise les systèmes adjoints successifs à un système linéaire et obtient des résultats fondamentaux. Il rencontre les systèmes surabondants, dont l'étude devait être reprise beaucoup plus tard par Gambier et Légaut, sans cependant arriver à une solution complète.

La question des systèmes linéaires de courbes planes conduit à la détermination des surfaces rationnelles hyperspatiales à sections hyperplanes de genre donné. Castelnuovo a étudié les surfaces à sections hyperplanes elliptiques, hyperelliptiques et de genre trois. De son côté, Enriques a fait l'étude des systèmes linéaires de surfaces à sections variables elliptiques ou hyperelliptiques. Ce genre de questions fut repris plus tard par Gaetano Scorza et étendu aux variétés algébriques à plusieurs dimensions.

Le théorème de Noether dont il a été question plus haut est basé sur le fait qu'étant donné un réseau homaloïdal de courbes planes d'ordre n, la somme des multiplicités des trois points de multiplicité maximum surpasse n. En 1901, C. Segre remarque que la démonstration de Noether ne peut s'appliquer à tous les cas lorsque les points de multiplicité maximum sont infiniment voisins. Il appartenait à Castelnuovo de donner une démonstration complète en utilisant des transformations de Jonquières, qui sont réductibles à des transformations quadratiques. Plus tard, M. Chisini donna une démonstration élégante du théorème de Noether en n'utilisant que des transformations quadratiques.

La considération des adjoints successifs à un système linéaire a conduit Castelnuovo à la détermination des transformation birationnelles du plan possédant une courbe de points unis de genre supérieur à l'unité, problème abordé par Doehlemann sous forme projective. Elle a aussi conduit Enriques à la détermination des groupes continus de transformations birationnelles du plan.

Dans un autre ordre d'idée, signalons la démonstration due à Castelnuovo d'un théorème énoncé par Kronecker, à savoir que si une surface de l'espace ordinaire contient une double infinité de sections planes réductibles, c'est une réglée ou une surface de Steiner.

Les premières recherches de Castelnuovo sur les surfaces algébriques datent de 1890. Dans une première note il montre qu'une surface possédant un faisceau irrationnel de courbes est irrégulière et dans une seconde, il s'occupe d'inégalités entre les genres d'une surface. Noether avait démontré qu'entre le genre linéaire $p^{(1)}$ d'une surface et le genre géométrique p_g, subsiste l'inégalité $p^{(1)} \geqq 2p_g - 3$ et que dans le cas de l'égalité, les courbes canoniques de la surface sont hyperelliptiques. Castelnuovo montre que dans le cas de l'inégalité, le minimum de genre linéaire est $3p_g - 6$ et il détermine les surfaces correspondantes.

En 1891, Castelnuovo fut appelé à l'Université de Rome et l'année suivante, Federigo Enriques fut envoyé à Rome pour un séjour de perfectionnement. Désireux de connaître les recherches de Géométrie algébrique, celui-ci s'adressa à Castelnuovo. Dans la notice qu'il a consacrée à son beau-frère à la mort de celui-ci, en

1946, Castelnuovo rappelle les interminables promenades dans les rues de Rome, où la géométrie algébrique était le thème préféré des conversations. Enriques s'assimila rapidement la géométrie sur une courbe algébrique et entreprit son extension aux surfaces algébriques. Il me tenait chaque jour au courant de ses recherches, écrit Castelnuovo et je les soumettais à une critique sévère. De ces entretiens allait naître la Géométrie sur une surface algébrique, un des plus beaux joyaux de la Mathématique italienne.

Avant d'entrer dans plus de détails sur cette collaboration, nous voudrions dire quelques mots d'un travail important de Castelnuovo. Lüroth a démontré qu'une involution appartenant à une droite est rationnelle et la démonstration est élémentaire. Castelnuovo a réussi à démontrer qu'une involution du plan, c'est-à dire un système doublement infini de groupes de points tel qu'un point appartienne en général à un seul groupe, est rationnelle, mais la démonstration est loin d'être élémentaire. Pour arriver à son résultat, il commence par construire une surface dont les points représentent les groupes de l'involution, puis il montre que sur cette surface chaque système linéaire a une série caractéristique còmplète et qu'il existe un système dont la dimension est supérieure au genre. Ce sont là des propriétés caractéristiques des surfaces rationnelles, d'où le théorème.

On peut se demander si la propriété valable pour la droite et le plan l'est aussi pour l'espace. La réponse est négative. Enriques a montré que la variété intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface cubique de l'espace à cinq dimensions est representable par une involution de l'espace. Or, Gino Fano a démontré que cette variété n'était pas rationnelle. L'étude des involutions de l'espace reste à faire.

De 1893 à 1897 parurent quatre mémoires, deux dus à Enriques et les deux autres à Castelnuovo, où furent jetées les bases de la Géométrie sur une surface algébrique suivant la méthode algébrico-géométrique qui avait déjà été utilisée dans la Géométrie sur une courbe algébrique par C. Segre et Castelnuovo. Il importe de remarquer que cette méthode est spécifiquement italienne. En 1896, les deux géomètres publièrent dans les Mathematische Annalen un exposé très intéressant des progrès qu'ils avaient réalisés dans la théorie des surfaces algébriques.

Au moment où Enriques commençait ses recherches, un seul mémoire important avait été publié sur la question, celui de Noether. Mais comme l'écrit Castelnuovo, c'était un mémoire obscur, aux démonstrations pesantes, ne jetant aucune lumière sur les questions, plusieurs propriétés semblaient d'ailleurs plus intuitives que démontrées. Enriques devait donc reprendre la question ab ovo en se guidant sur les analogies avec la géométrie sur une courbe et sur les propriétés des systèmes linéaires de courbes planes.

Sur une courbe algébrique, l'instrument utilisé est la série linéaire de groupes de points. Sur une surface algébrique, il fallait donc définir les systèmes linéaires de courbes, ce qui est plus difficile à cause de la présence éventuelle de points-base et de courbes fondamentales. Il fallait aussi étendre aux surfaces deux théorèmes dus à Bertini dans le cas du plan, à savoir que la courbe d'un système linéaire ne peut avoir de point multiple variable et que les systèmes de degré nul sont composés au moyen d'un faisceau de courbes. Enfin, il fallait définir d'une manière précise la somme et la soustraction des systèmes linéaires. Ces difficultés surmontées, les caractères d'un système linéaire sont le degré, le genre de ses courbes et sa dimension. Sur une courbe du système sont définies la série caractéristique découpée sur cette courbe par les autres courbes du système, et la série canonique. Il fallait ensuite définir le système adjoint $|C'|$ à un système linéaire $|C|$, formé par les courbes C' découpant sur chaque courbes C des groupes canoniques. Ici se présente une difficulté : il peut y avoir plusieurs systèmes répondant à cette condition. Enriques a surmonté cette difficulté en introduisant des courbes qu'il appelle sous-adjointes. Si l'on suppose que la surface F considérée est d'ordre n dans l'espace ordinaire, les courbes sous-adjointes sont découpées par les surfaces d'ordre $n-3$ adjointes à la surface F supposée débarrassée de ses points multiples isolés, tandis que les courbes adjointes sont découpées par les surfaces adjointes d'ordre $n-3$ en tenant compte de ces points multiples. Plus tard, en 1901, Enriques introduira une autre définition du système adjoint. Les jacobiennes des réseaux tirés d'un système linéaire $|C|$ forment un système linéaire $|C_j|$, le jacobien de $|C|$. Le système adjoint à $|C|$ est alors $|C_j - 2C|$.

Enriques introduit alors le système canonique $|K| = |C' - C|$ et montre que l'on a $(C+D)' \equiv C' + D \equiv C + D'$. Il introduit de plus le système bicanonique qui, si $|C''|$ est l'adjoint à $|C'|$, est $|C'' - C| = |2K|$.

La genre p d'une courbe plane d'ordre n peut se définir comme le nombre des adjointes d'ordre $n-3$ linéairement indépendantes, mais aussi au moyen d'une formule arithmétique faisant intervenir les multiplicités de ses points singuliers. Si l'on définit les surfaces adjointes d'ordre $n-4$ à une surface F d'ordre n par leur passage par les points et courbes multiples de la surface, le calcul donne pour le système de ces adjointes la dimension p_a-1, alors que la dimension effective est p_g-1 qui peut être supérieure à p_a-1. Les nombres p_a, p_g sont les genres arithmétique et géométrique de la surface F. On est conduit à répartir les surfaces en deux catégories : les surfaces régulières pour lesquelles $p_a=p_g$ et les surfaces irrégulières pour lesquelles $p_g>p_a$. Le nombre $q=p_g-p_a$ est l'irrégularité de la surface.

Dans son premier mémoire, *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (1893), Enriques s'était heurté à une difficulté lorsque la série caractéristique d'un système linéaire n'est pas complète et les restrictions qu'il apportait revenaient à supposer $p_a=p_g$, $p_g>0$. Dans son second mémoire, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (1896), aucune restriction n'est plus faite et les raisonnements s'appliquent aussi bien aux surfaces rationnelles ou réglées qu'aux autres.

Les invariants introduits sont le genre géométrique p_g, le bigenre P_2 nombre des courbes bicanoniques linéairement indépendantes, et le genre linéaire $p^{(1)}$, genre d'une courbe canonique, le degré du système canonique étant $p^{(1)}-1$.

Les mémoires de Castelnuovo, *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (1894), *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (1897), complètent ceux d'Enriques et traitent surtout des surfaces d'irrégularité $q=p_g-p_a>0$. Dans ce cas, la série caractéristique d'un système linéaire complet $|C|$ et la série découpée sur une courbe C par ses adjointes C' ne sont pas complètes. Précisément Castelnuovo montre que si la surface est régulière ($q=0$), les deux séries sont complètes et réciproquement, tandis que si la surface est irrégulière ($q>0$), les deux séries sont incomplètes et leurs défauts sont au plus égaux à q. Il établit aussi une propriété importante : Si l'on considère les séries découpées sur une courbe C par les courbes C', $C'+C$, $C'+2C, \dots, C'+hC, \dots$, à partir d'une certaine valeur de h, ces séries sont complètes et la somme des défauts des séries pour les valeurs inférieures de h est égale à q. L'importance de ce théorème résulte du fait que les notions d'adjonction et de défaut d'une série sont invariantes pour les transformations birationnelles ; le genre géométrique p_g et l'irrégularité q sont aussi des invariants et par suite le genre arithmétique $p_a = p_g - q$ est également un invariant. En 1905, Picard a démontré par voie analytique que les courbes C' découpaient sur une courbe C une série de défaut q, c'est-à-dire que le système adjoint est régulier. Severi en a donné une démonstration géométrique en 1908, mais en utilisant des systèmes continus de courbes. En 1947, nous avons pu établir le théorème en utilisant seulement des systèmes linéaires et des propriétés établies par Castelnuovo dans son second mémoire.

Le théorème de Riemann-Roch, donnant la dimension d'un système linéaire, déjà établi par Enriques pour les surfaces régulières, l'est ici dans le cas général.

Dans son second mémoire, Castelnuovo avait jeté les fondements de l'étude des systèmes linéaires de surfaces de base assignée, émettant l'espoir que cette théorie serait approfondie. Nous croyons que ce voeu ne fut pas exaucé.

En 1901, Castelnuovo et Enriques publièrent ensemble un mémoire très important : *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche,* qui fixe en somme l'état de la théorie des systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique. Ils y précisent notamment les notions de degré et de genre virtuels d'un système linéaire, ce qui permet de donner plus de généralité aux théorèmes, et celle de l'adjonction. Ils passent en revue les invariants d'une surface : genres géométrique, arithmétique, linéaire, plurigenres, nombre de courbes linéairement indépendantes des multiples du système canonique, invariant de Zeuthen-Segre, invariant Ω souvent appelé invariant de Castelnuovo-Enriques et en relation avec le genre linéaire. L'invariant de Zeuthen-Segre fut introduit par ce dernier sous forme invariantive en 1896. Il généralise une formule de Zeuthen relative aux faisceaux de sections planes d'une surface.

La théorie des courbes exceptionnelles, courbes rationnelles qui peuvent, par une trasformation birationnelle convenablement choisie, correspondre à un point simple de la surface transformée est traitée dans ce mémoire. Les auteurs montrent que certaines courbes exceptionnelles ne peuvent exister que sur les surfaces de la classe des réglées. Ils montrent aussi que les surfaces sur lesquelles le procédé d'adjonction s'éteint pour un système linéaire, appartiennent à la classe des réglées, rationnelles ou non.

Avec ce mémoire se clôt en quelque sorte la théorie générale des systèmes linéaires de courbes sur une surface algébrique. Comme nous l'avons dit plus haut, elle est spécifiquement italienne et on ne peut qu'admirer l'élégance des moyens mis en oeuvre. Dans un bon nombre de travaux, Castelnuovo et surtout Enriques chercheront à caractériser des classes de surfaces par leurs invariants. Un second stade de la Géométrie sur une surface algébrique va naître, celui des systèmes continus de courbes, mais avant d'en parler, nous voudrions nous arrêter sur quelques recherches antérieures à 1900.

Un courbe de genre $p = 0$ est rationnelle. Castelnuovo s'est posé la question de déterminer les conditions pour qu'une surface soit rationnelle. Il faut évidemment que l'on ait $p_a = p_g = 0$, mais ces conditions ne sont pas suffisantes. Castelnuovo a en effet construit une surface de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un faisceau de courbes bicanoniques elliptiques et Enriques une surface précisément la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, qui possède une courbe bicanonique d'ordre zéro ($P_2 = 1$). Si $P_2 = 0$, le second adjoint $|C''|$ à un système $|C|$ ne contient pas ce système et la suite des adjoints successifs à $|C|$ se termine, ce qui implique la rationnalité de la surface. Les conditions pour qu'une surface soit rationnelle sont donc $p_a = P_2 = 0$, la condition $P_2 = 0$ entraînant $p_g = 0$.

Cette étude de Castelnuovo pose le problème de déterminer les surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$. Campedelli et nous-même avons donné des exemples ; récemment, nous avons pu démontrer que celles de ces surfaces qui ont un système bicanonique irréductible étaient images d'involutions privées de points unis appartenant à une surface algébrique régulière.

Noether avait établi qu'une surface possédant un faisceau de courbes rationnelles peut se ramener, par des transformations birationnelles, à une surface possédant un faisceau de coniques (ou à une surface réglée). Enriques a réussi, en 1899, à construire sur une surface une courbe unisécante des coniques du faisceau. Il en résulte qu'une surface possédant un faisceau de courbes rationnelles appartient à la classe des réglées.

Une observation sur la représentation paramétrique d'une courbe algébrique a conduit Enriques à établir que si l'on a sur une surface un système continu rationnel de dimension supérieure à l'unité, ses courbes sont contenues totalement dans un système linéaire.

On sait que dans une classe de courbes algébriques, on peut toujours trouver une courbe n'ayant que des points doubles. Beppo Levi a, en 1898, démontré que dans une classe de surfaces algébriques, il existe au moins une surface de l'espace ordinaire ayant une courbe double et des points triples à la fois pour la surface et pour la courbe double. Théorème capital lorsque l'on utilise les adjointes à la surface. Il en résulte que dans une classe de surfaces algébriques il existe des modèles hyperspatiaux dépourvus de points singuliers.

Picard, en 1884, avait attaché à une surface algébrique des intégrales de différentielles totales qui, comme les intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique se partagent en trois espèces suivant qu'elles restent finies, ou ont des singularités polaires, ou des singularités logarithmiques. En 1893, Humbert démontra que toute surface algébrique sur laquelle existe un système continu de courbes n'appartenant pas à un système linéaire possède des intégrales de Picard de première espèce. Ensuite Enriques parvint à démontrer, en 1901, que toute surface algébrique possédant p intégrales de Picard de première espèce, contient un système continu de courbes non contenues dans un système linéaire. Les surfaces irrégulières et les surfaces possédant des intégrales de Picard de première espèce forment donc une même famille. Les efforts de Castelnuovo et d'Enriques allaient porter sur les relations entre ces surfaces et sur l'étude des systèmes continus de courbes, non linéaires, tracés sur une surface. Ils furent aidés dans cette tâche par Francesco Severi élève de Corrado Segre, qui s'était d'abord occupé de Géométrie énumérative. En 1903, il fut à Bologne l'assistant d'Enriques et se tourna vers la Géométrie algébrique ; il devait y apporter une contribution importante.

On connaissait plusieurs exemples de surfaces irrégulières : les surfaces réglées et les surfaces possédant un faisceau irrationnel de courbes (Castelnuovo). Une surface réglée de genre p représente les couples de points d'une droite et d'une courbe de genre p. De Franchis, Maroni et surtout Severi ont étudié en 1903 les surfaces représentant les couples de points de deux courbes non rationnelles ou les couples de points non ordonnées d'une courbe non rationnelle. Pour ces surfaces, l'irrégularité est égale au nombre des intégrales de Picard de première espèce attachées à la surface. Castelnuovo, Enriques et Severi allaient démontrer que cette relation est vraie pour toutes les surfaces. Notons en passant qu'à propos des premières surfaces, Severi fit un exposé de la théorie des corrrespondances entre les points d'une courbe algébrique, donnant ainsi une forme géométrique à une théorie due à Hürwitz sous forme transcendante.

Un premier pas fut fait par Severi (1904) qui démontra qu'une surface algébrique possédant q intégrales de Picard de première espèce avec $2q$ périodes, a l'irrégularité au moins égale à q. Ensuite Enriques (1904) établit que les courbes d'un ordre donné tracées sur une surface algébrique irrégulière se distribuent en un nombre fini de systèmes continus algébriques qui n'appartiennent pas à des systèmes linéaires. Nous reviendrons plus loin sur la démonstration de cette propriété donnée par Enriques.

La construction d'Enriques revient à ceci : Il existe sur une surface d'irrégularité $q = p_g - p_a$ des systèmes linéaires complets, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels le défaut de la série caractéristique vaut p_a (Castelnuovo). Si $|C|$ est un tel système, n son degré, π son genre, sa dimension est

$$r = p_a + n - \pi + 1$$

(théorème de Riemann-Roch). Le système $|C|$ appartient à un système continu algébrique complet $\{C\}$ formé de ∞^q systèmes de mêmes caractères que $|C|$. La dimension du systèmes $\{C\}$ est

$$p_g + n - \pi + 1.$$

De cette propriété, Castelnuovo allait déduire qu'une surface d'irrégularité q possède q intégrales de Picard de première espèce distinctes. Sa démonstration, particulièrement élégante, rappelle d'ailleurs son mémoire sur les correspondances entre les groupes de p points sur une courbe de genre p. Il démontre que l'on peut établir, par addition et soustraction, des correspondances biunivoques entre les systèmes linéaires $|C|$ du système continu $\{C\}$. Représentant alors les systèmes linéaires $|C|$ par les points d'une variété V à q dimensions, celle-ci est transformée en elle-même par les transformations birationnelles d'un groupe transitif, ∞^q, deux à deux permutables. Cette variété, qu'il appelle variété de Picard, possède q intégrales de différentielles totales distinctes (Picard). Il en déduit l'existence de q intégrales de Picard de première espèce distinctes attachées à la surface.

A la même époque, Severi a également donné une démonstration du théorème en question. Il donne tout d'abord une condition pour que les courbes d'un système continu soient contenues dans un système linéaire. Cette condition, qu'il appelle le premier théorème d'Abel sur une surface, est que la somme des valeurs des intégrales abéliennes aux points communs à deux courbes du système, reste constante. Se basant alors sur la propriété d'Enriques, il démontre que le nombre des intégrales de Picard de première espèce, distinctes, est égal à q et que celui des intégrales de seconde espèce est égal à $2q$.

L'important théorème dont nous venons d'esquisser la démonstration, porte le nom de Théorème de Castelnuovo-Enriques-Severi; il a été obtenu par une collaborations étroite entre ces trois géomètres, qui se communiquaient leurs résultats au fur et à mesure qu'ils les obtenaient. Son importance a retenu l'attention de Poincaré qui en a donné, par voie transcendante, une nouvelle démonstration en 1910.

Revenons maintenant sur la propriété des systèmes continus réguliers de courbes tracées sur une surface algébrique due à Enriques. La démonstration est basée sur deux lemmes. D'après le premier, une courbe variable dans un système continu ne peut dégénérer sans acquérir au moins un nouveau point double. Le second concerne la série caractéristique d'une courbe d'un système continu. La série caractéristique d'une courbe d'un système linéaire est celle qui est découpée sur cette courbe par les autres courbes du système. Pour l'étude de systèmes continus, Severi a été conduit à une généralisation : la série caractéristique d'une courbe appartenant à un système continu est la série découpée sur cette courbe par les courbes infiniment voisines du système. En bien, le second lemme d'Enriques dit qu'une courbe d'un système continu algébrique de courbes planes ayant un certain nombre de points doubles variables et touchant une courbe donnée en un certain nombre de points variables, a la série caractéristique (au sens de Severi) complète. Reprenant toutes ces théories en 1921, Severi remarqua que la série considérée par Enriques est non spéciale et que par conséquent le théorème n'est applicable qu'aux surfaces de genre $p_g = 0$. La propriété énoncée par Enriques est cependant vraie comme cela résulte de la démonstration de Poincaré. La désir de démontrer la propriété d'Enriques par une voie purement géométrique a suscité de nombreux travaux d'Enriques lui-même et de M. Beniamino Segre dont le plus important de celui-ci parut en 1938 dans les Annali di Matematica.

Signalons un théorème important sur les surfaces irrégulières dû à Castelnuovo. De Franchis avait démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface contienne un faisceau irrationnel de courbes est qu'elle possède deux intégrales de Picard algébriquement indépendantes, mais fonctions l'une de l'autre. Généralisant la question, Castelnuovo la ramène à la condition pour que deux variétés hyperspatiales aient un point commun ; il établit que si l'on a $p_g \geq 2(p_a + 2)$, la surface possède un faisceau irrationnel de courbes. La question fut reprise par Rosenblatt et surtout par Comessatti, qui a déterminé les surfaces satisfaisant à la condition précédente.

On doit à M. A. Andreotti deux mémoires importants sur les surfaces irrégulières, dont le premier fut couronné par l'Académie royale de Belgique en 1951. Partant d'un théorème de Severi suivant lequel une surface irrégulière privée d'un faisceau de genre égale à l'irrégularité a une image simple ou multiple dans la variété de Picard correspondant à la matrice des périodes des intégrales simples de première espèce attachés à la surface, l'auteur considère les surfaces comme immergées dans cette variété.

La théorie de la base des courbes tracées sur une surface est due à Severi. Celui-ci dit que des courbes tracées sur une surface algébrique F sont algébriquement liées si une combinaison linéaire de certaines de ces courbes à coefficients entiers et positifs et une combinaison analogue des autres courbes donnent deux courbes appartenant à un même système continu irréductible. Elles sont algébriquement distinctes dans le cas opposé. Le but de Severi est de montrer que l'on peut choisir sur la surface F un certain nombre ϱ de courbes algébriquement distinctes telles que toute courbe tracée sur la surface soit algébriquement liée à ces courbes. On savait d'ailleurs que le nombre ϱ existait pour certaines surfaces particulières, mais ces cas particuliers ne pouvaient servir dans le cas général. Severi établit certains critères arithmétiques permettant de décider si des courbes sont algébriquement liées. Il utilise ensuite, et c'est là le point capital, un théorème de Picard suivant lequel il existe un entier positif ϱ tel que l'on puisse construire une intégrale de Picard de troisième espèce n'ayant aucune singularité logarithmitique en dehors de $\varrho + 1$ courbes algébriques. Ces $\varrho + 1$ courbes sont liées algébriquement et on peut donc toujours trouver ϱ courbes algébriquement distinctes. L'existence du nombre-base ϱ était ainsi établie.

Au cours d'un Colloque tenu a Liège en 1949, Severi émit l'idée que l'on pourrait arriver au nombre-base par voie purement algébrique. C'est ce que fit effectivement M. A. Néron lors d'un second Colloque tenu en 1952, Si $C_1, C_2, \dots, C_\varrho$ forment une base sur F, toute courbe C tracée sur la surface est donnée par la relation

$$\lambda C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_\varrho C_\varrho ,$$

λ étant un entier positif et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varrho$ des entiers positifs, nuls ou négatifs. Severi s'est demandé s'il était possible de choisir les courbes formant la base de telle sorte que λ soit un diviseur de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\varrho$. La réponse est affirmative et l'on obtient alors une base intermédiaire.

Une question intéressante est la division sur une surface algébrique introduite également par Severi. Il peut exister un certain nombre σ de systèmes distincts $\{G_1\}, \{G_2\}, \dots, \{G_\sigma\}$ de mêmes caractères, tels que leurs multiples suivant un entier μ appartiennent à un même système $\{G\}$. Le nombre σ est du reste indépendant de $\{G\}$. Cela étant, en partant d'une base intermédiaire, et en désignant par $G_1, G_2, \dots, G_{\sigma-1}$ des courbes ayant pour multiples suivant λ des courbes du système $\{C_1\}$, on peut écrire en posant $\lambda_i = \lambda\lambda_i'$,

$$C \equiv \lambda_1' C_1 + \lambda_2' C_2 + \dots + \lambda_\varrho' C_\varrho + \mu_1 G_1 + \mu_2 G_2 + \dots + \mu_{\sigma-1} G_{\sigma-1} .$$

La base ainsi déterminée est appelée base-minima.

Lorsque Severi établit cette théorie, un seul exemple de surface ayant le diviseur σ supérieur à l'unité et précisément égal à 2 était connu. C'est la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Enriques avait démontré que cette surface était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont tous les genres sont égaux a l'unité. Nous avons remarqué, en 1914, que si l'on construit sur une surface algébrique une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, l'image de cette involution est une surface de diviseur p.

Dans un mémoire publié en 1910, considérant une base intermédiaire, Severi remarque que le degré de la courbe C donnée par

$$\lambda C \equiv \lambda (\lambda_1' C_1 + \lambda_2' C_2 + \dots + \lambda_\varrho' C_\varrho)$$

est une forme quadratique définie de $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_\varrho'$. Si la surface est régulière, le groupe des transformations birationnelles (éventuel) de la surface en elle-même est isomorphe au groupe des substitutions linéaires, à coefficients entiers, de module ± 1, de cette forme quadratique en soi. Il applique cette théorie à la surface du quatrième ordre contenant une sextique de genre deux, déjà considérée par Fano.

Nous avons dit plus haut que Poincaré avait donné, par voie transcendante, une démonstration du théorème de Castelnuovo-Enriques-Severi ; dans ce mémoire, il rencontre également des propriétés de la base.

Dans un mémoire publié en 1914, G. Albanese observe qu'un système continu de courbes étant donné sur une surface irrégulière, il peut se faire que les systèmes linéaires qu'il contient forment un ensemble irréductible en tant que lieu de systèmes linéaires, mais réductible en tant qu'ensemble de courbes. De là deux sortes d'équivalences algébriques de deux courbes et adaptation de la théorie de la base à ces équivalences. Vers la même époque, Rosenblatt avait fait la même observation.

La plupart des travaux dont il vient d'être question sont antérieurs à 1906. Lorsque, en collaboration avec Simart, Picard publia le second volume de sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (1906), il demanda à Castelnuovo et Enriques de résumer les resultats obtenus en Italie sur ces théories, prouvant ainsi l'intérêt pris à l'étranger par ces questions.

Avant d'aller plus loin, rappelons qu'un legs de Guccia permettait d'attribuer une médaille d'or à des travaux de Géométrie lors du Congrès international des Mathématiciens de Rome en 1908. Sur le rapport d'un jury dont faisait partie Poincaré, la médaille Guccia fut décernée à Severi.

On pourrait dire que la valeur d'une théorie générale se mesure aux applications que l'on peut en faire. Nous avons dit plus haut que Castelnuovo et Enriques avaient appliqué avec succès leur théorie à la détermination de surfaces données par des propriétés particulières. Une occasion fut offerte de montrer la fécondité de la théorie lorsque l'Académie des Sciences de Paris mit au concours, en 1906, l'étude des surfaces hyperelliptiques. Cela nous valut deux importants mémoires : l'un de Bagnera et De Franchis, où la question était traitée d'un point de vue transcendant: l'autre, d'Enriques et Severi, est une belle application des méthodes italiennes. Les auteurs étudient les surfaces de Picard, leurs relations avec la surface de Jacobi, représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre deux ; ils déterminent des modèles projectifs des surfaces représentant des involutions appartenant à une surface de Jacobi. Considérant les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface de Picard, ils démontrent qu'une telle involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en soi. La démonstration d'Enriques-Severi s'étend aux involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface quelconque, comme nous l'avons établi en 1914, non sans quelques discussions avec Enriques et Severi. Malheureusement, en 1926, nous avons construit un exemple où le théorème est en défaut. Considérons deux courbes C, C' et supposons que la première contienne une involution d'ordre p, privée de points unis, non cyclique. De telles involutions ont été construites notamment par Comessatti. La surface des couples de points des courbes C, C' contient une involution d'ordre p, privée de points unis, non cyclique.

Le mémoire d'Enriques et Severi fut couronné en 1907 par l'Académie de Paris. Celui de Baguera et De Franchis fut complété plus tard par un travail où les auteurs déterminaient le nombre-base et le nombre des intégrales doubles de seconde espèce appartenant à une surface hyperelliptique. Le prix Bordin leur fut décerné en 1909.

Si l'on considère dans l'espace ordinaire une surface algébrique d'ordre $n+n'$, ayant un point multiple d'ordre n à l'infini sur l'axe des z, en la projetant de ce point sur le plan $z=0$, on obtient ce que l'on appelle un plan multiple d'ordre n ou plan n-uple. Le contour apparent de la surface est une courbe D appelée courbe de diramation. Inversement, le problème qui se pose est de déterminer une fonction z de x, y à n valeurs, le passage d'une de ces valeurs à une autre ayant lieu de long d'une courbe D donnée. Dans le cas $n=2$, la solution est immédiate, mais lorsque $n>2$, la courbe D ne peut être quelconque ; elle doit posséder un certain nombre de points doubles ordinaires et un certain nombre de points de rebroussement. Le problème de l'existence des plans multiples a été considéré par Enriques puis par M. O. Chisini. Celui-ci a construit des modèles très généraux de courbes de diramation et ces recherches l'ont conduit notamment à un joli modèle topologique d'une courbe algébrique plane mettant en évidence les points singuliers de la courbe. Un autre élève d'Enriques, M. O. Zariski, a également étudié le problème des plans multiples, de même que M. B. Segre dans le cas $n=6$.

La Géométrie sur une courbe algébrique utilise les séries de groupes de points et la Géométrie sur une surface algébrique les systèmes de courbes. Peut-on obtenir des résultats nouveaux en considérant sur une surface des ensembles de groupes de points? Severi s'est posé la question et il lui a consacré plusieurs mémoires à partir de 1932. Si l'on considère sur une surface deux systèmes linéaires de courbes $|C_1|$, $|C_2|$, les groupes de points d'intersection des courbes C_1 et C_2 forment une série élémentaire. On définit alors la somme et la différence de séries éléméntaires et une série d'équivalence est une série obtenue par addition et soustraction de séries élémentaires. Cette théorie peut s'étendre aux systèmes de variétés appartenant à une variété algébrique comme on le verra dans un instant.

Le premier résultat important concernant la Géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions est dû à Castelnuovo et Enriques (1906). Il peut s'énoncer de la manière suivante : L'irrégularité d'une surface tracée sur une variété algébrique à trois dimensions ne dépend pas de la surface envisagée pourvu que celle-ci puisse engendrer un système linéaire au moins doublement infini dont les courbes variables communes à deux surfaces soient irréductibles. Cette irrégularité est l'irrégularité superficielle de la variété.

En 1909, Severi publia un mémoire où il jette les bases de la Géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions, mais cette théorie fit peu de progrès jusqu'au moment où M. B. Segre, profitant des systèmes d'équivalence introduits par Severi, publia deux mémoires importants dont l'un fut couronné par l'Académie royale de Belgique en 1935. Nous ne pouvons penser donner ici un résumé des résultats obtenus par M. Segre, bornons-nous à signaler qu'il étudie les correspondance entre deux surfaces algébriques, question qui avait déjà retenu l'attention de G. Albanese, qui se plaçait à un autre point de vue.

Une question importante est la détermination de la rationnalité d'une variété algébrique à trois dimensions. Noether, en 1890, avait posé la question de savoir si la variété cubique de l'espace à quatre dimensions est rationnelle ou non. Bien des travaux ont été publiés sur cette question et le mémoire le plus important est dû à G. Fano (1946). Ce géomètre s'est du reste attaché à déterminer la rationnalité de plusieurs variétés algébriques à trois dimensions, mais le cas général n'a pas encore été abordé.

Nous reviendrons maintenant à la théorie des courbes algébriques pour signaler un beau résultat de Ruggiero Torelli : Deux courbes algébriques ayant même tableau de périodes des intégrales abéliennes de première espèce sont birationnellement identiques. Une nouvelle démonstration en a été donnée récentemment par M. S. Cherubino.

La théorie des fonctions abéliennes est trop voisine de celle des variétés algébriques pour que les géomètres italiens n'aient pas été attirés par l'etude de ces fonctions. Deux d'entre eux, Carlo Rosati et Gaetano Scorza ont imaginé des représentations géométriques qui font intervenir dans la théorie la géométrie projective d'éléments réels.

Supposons que $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ soient les cycles d'un système de rétrosections de la surface de Riemann d'une courbe C. Au cycle donné par

$$\sigma \sim m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \ldots + m_{2p} \sigma_{2p},$$

Rosati fait correspondre le point d'un espace S_{2p-1} à $2p-1$ dimensions dont les coordonnées sont les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_{2p}$. D'autre part, à une intégrale abélienne de première espèce, il associe l'hyperplan ayant pour coordonnées les périodes de cette intégrale le long des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$. Ces hyperplans passent par un espace à $p-1$ dimensions et si un de ces hyperplans contient un point, l'intégrale correspondante a une période nulle le long du cycle dont ce point est l'image. Rosati a appliqué cette représentation à l'étude des correspondances entre les points de la courbe C, en utilisant les homographies et les réciprocités à coefficients réels de l'espace S_{2p-1}. La représentation de Scorza est en quelque sorte la dualistique de celle de Rosati. Partant d'une matrice de Riemann, c'est-à-dire d'une matrice à p lignes et $2p$ colonnes dont les éléments satisfont à certaines relations, Scorza considère dans l'espace S_{2p-1} les points dont les coordonnées sont données par les éléments des p lignes de la matrice. Ces p points déterminent un espace à $p-1$ dimensions dont les sections hyperplanes correspondent aux intégrales abéliennes. Scorza a utilisé cette représentation pour étudier les intégrales abéliennes réductibles d'une courbe algébrique, les transformations birationnelles en elles-mêmes des surfaces hyperelliptiques et pour démontrer le théorème d'existence des fonctions abéliennes singulières.

La théorie des fonctions abéliennes a retenu de nouveau l'attention de Castelnuovo qui a étendu, avec sa clarté habituelle, aux fonctions d'une nombre quelconque de variables des théorèmes obtenus par Humbert pour les fonctions de deux variables.

De beaux cours sur les fonctions abéliennes ont été faits par le regretté Fabio Conforto à l'Istituto di Alta Matematica de 1942 à 1952.

Nous terminerons ici l'exposé de l'évolution de la Géométrie algébrique italienne que M. B. Segre a eu bonté de nous demander de faire. Nous avons cherché à mettre en relief les idées principales et cependant il y a des lacunes dans notre exposé, tant fut touffue la production italienne depuis 1890. Nous eussions voulu tenir compte des recherches d'Annibale Comessatti sur les variétés réelles et sur les liaisons entre les courbes algébriques et la topologie, de celles de Luigi Brusotti et de son élève Galafassi sur les courbes réelles, de celles de Fabio Conforto et de Mario Baldassarri, trop tôt disparus, après avoir donné plus que des promesses. Nous n'avons pas fait allusion aux travaux des jeunes géomètres italiens, mais nul doute qu'ils ne soient dignes de ceux des anciens.

Bien des mathématiciens étrangers ont utilisé les résultats obtenus en Italie et beaucoup d'entre eux sont venus étudier dans ce pays. Nous ne nous hasarderons pas à dresser une liste, elle serait longue et nous risquerions des omissions regrettables. Qu'il nous soit permis de dire que si on lit les travaux de M. S. Lefschetz, on y sent tout de suite l'influence italienne. Du reste c'est ce géomètre qui, dans la préface d'un ouvrage précisément consacré à la Géométrie algébrique, a invoqué les travaux des « superbes géomètres de l'Ecole Italienne ».

Voici près de soixante ans que nous avons commencé à étudier les travaux des géomètres italiens. Nous fûmes enthousiasmé et notre admiration a crû avec les années. Faut-il ajouter que parmi les géomètres que nous admirons, Castelnuovo occupe une place de choix. La Mathématique est un art et Castelnuovo fit de la Géométrie en artiste de grand talent.

BIBLIOGRAPHIE

Plusieurs ouvrages didactiques ont été publiés par des géomètres italiens.

Sur la théorie des courbes.

SEVERI, *Lezioni di Geometria algebrica*, (Padova, Draghi, 1908).

SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, (Leipzig, Teubner 1921).

ENRIQUES - CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (4 volumes, Bologna, Zanichelli, 1915-1934).

SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*. (Bologna, Zanichelli, 1926).

Sur la théorie des surfaces.

ENRIQUES - CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padova, Cedam, 1932).

ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologna, Zanichelli, 1949).

On peut également consulter le bel article de Castelnuovo et Enriques : *Die Algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationnalen Transformationen aus.* (Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Teubner. Band III_2, Heft 6. 1915).

Tipografia «Oderisi» Editrice - Gubbio 1967