SUR LES SUITES DE QUADRIQUES ASSOCIÉES AUX POINTS D'UNE SURFACE

PAR

LUCIEN GODEAUX (Liége)

Hommage à M. O. Mayer à l'occasion de son 70-e anniversaire

Dans un travail déjà ancien [1], nous avons associé à chaque point d'une surface une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques.

Dans cette Note, après avoir rappelé brièvement la construction des quadriques de la suite, nous établissons par un raisonnement géométrique la propriété des points de contact de deux quadriques consecutivés d'être caractéristiques pour les deux quadriques (notre démonstration initiale était analytique). Nous construisons ensuite deux nouvelles suites de quadriques associées à chaque point de la surface.

Nous terminons en indiquant comment dégénère une quadrique de la première suite.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfont à un système d'équations complètement intégrable,

$$x_{uu} + 2bx_v + c_1 x = 0, \qquad x_{vv} + 2ax_u + c_2 x = 0.$$

Soient

$$U = |x, x_u|, \quad V = |x, x_v|$$

les points de l'hyperquadrique Q de Klein de l'espace S_5 à cinq dimensions, qui représentent les tangentes xx_u et xx_v aux asymptotiques en un point x de la surface. Nous avons

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0$$

et les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils déterminent une suite de Laplace L,

$$(L) \qquad \ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. On a précisément

$$U^{n+1} = U^n_v + U^n (\log. b h_1 h_2 \ldots h_n)_v, \qquad U^n_u = h_n U^{n-1},$$

$$V^{n+1} = V^n_u + V^n (\log. a k_1 k_2 \ldots k_n)_u, \qquad V^n_v = k_n V^{n-1},$$

où

$$h_n = -(\log. b h_1 h_2 \ldots h_{n-1})_{uv} + h_{n-1},$$

$$k_n = -(\log. a k_1 k_2 \ldots k_{n-1})_{uv} + k_{n-1}$$

et $h_0 = k_0 = 4ab$.

La suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Le point U^n est le pôle de l'hyperplan $V^{n-2} V^{n-1} V^n V^{n+1} V^{n+2}$. La poiat V^n est le pôle de l'hyperplan $U^{n-2} U^{n-1} U^n U^{n+1} U^{n+2}$.

En particulier le point U est le pôle de l'hyperplan $U^1 U V V^1 V^2$ et le point V, celui de l'hyperplan $V^1 V U U^1 U^2$.

Nous ferons les hypothèses suivantes:

— La suite L est illimitée dans les deux sens.

— En dehors des points U, V, aucun point de la suite L n'appartient à l'hyperquadrique Q.

2. Considérons les deux plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ qui sont conjugués par rapport à Q. Le premier coupe Q suivant une conique γ_n et le second suivant une conique γ'_n.

Les points de γ_n représentent une suite de droites $d, d', d'', \ldots$ ne se rencontrant pas deux à deux et les points de γ'_n une suite de droites $c, c', c'', \ldots$ Chaque droite de la première suite rencontre chaque droite de la seconde suite et ces droites appartiennent à une quadrique Φ_n. Les points de γ_n représentent les droites d'une demi-quadrique et ceux de γ'_n les droites de la demi-quadrique complémentaire de support Φ_n.

Nous avons ainsi attaché au point x de la surface (x) une suite de quadriques $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$ dont la première, qui correspond aux plans $U U^1 U^2$, $V V^1 V^2$ est la quadrique de Lie, osculatrice aux réglées gauches asymptotiques au point x.

Considérons deux quadriques consécutives Φ_{n+1}, Φ_n de la suite et désignons par C'_n, C''_n les points de rencontre de la droite $V^n V^{n+1}$ et par D'_n, D''_n ceux de la droite $U^n U^{n+1}$ avec Q. Les points C'_n, C''_n sont distincts, car s'ils étaient confondus en un point C_n, le lieu de C_n serait une surface à laquelle $V^n V^{n+1}$ serait tangente et C_n coïnciderait soit avec V^n, soit avec V^{n+1}. De même, les points D'_n, D''_n sont distincts.

Les points C'_n, C''_n appartiennent aux coniques γ'_{n-1}, γ'_n et par conséquent représentent deux droites c'_n, c''_n communes aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. De même, les points D'_n, D''_n représentent deux droites d'_n, d''_n communes aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n et celles-ci ont donc en commun les côtés d'un quadrilatère gauche et se touchent aux sommets $c'_n d'_n, c'_n d''_n, c''_n d'_n, c''_n d''_n$ de ce quadrilatère.

Les droites $C'_n D'_n$, $C'_n D''_n$, $C''_n D'_n$, $C''_n D''_n$ appartiennent à l'hyperquadrique Q et représentent les faisceaux de tangentes communes aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n aux sommets correspondants du quadrilatère.

Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, sommets d'un quadrilatère gauche dont les côtés appartiennent aux deux quadriques.

Pour $n = 1$, on retrouve le quadrilatère de Demoulin.

3. Nous allons montrer que les points de contact des deux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n sont caractéristiques pour les deux quadriques.

Pour plus de simplicité, nous désignerons par C un des points C'_n, C''_n et par D un des points D'_n, D''_n. Nous montrerons que le point cd est caractéristique pour les deux quadriques.

Faisons varier u et observons que la tangente en C à la ligne u est la tangente à la conique γ'_n en ce point. Il en résulte que la réglée (c_u) engendrée par c lorsque u varie se raccorde le long de c à la quadrique Φ_n.

Si nous faisons varier v, la tangente en C à la ligne v est tangente en ce point à la conique γ'_{n+1}, donc la réglée (c_v) engendrée par c lorsque v varie, se raccorde le long de cette droite à la quadrique Φ_{n-1}.

On démontre de même que lorsque u varie, la réglée (d_u) engendrée par d se raccorde le long de cette droite à la quadrique Φ_{n-1}. La réglée (d_v) engendrée par d lorsque v varie se raccorde le long de cette droite à la quadrique Φ_n.

Cela étant, lorsque u, v varient les tangentes aux courbes u, v situées sur les surfaces (c_u), (c_v), (d_u), (d_v) au point cd appartiennent au plan tangent commun aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. Par conséquent, la surface (cd) fait partie des enveloppes des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n.

Les points de contact de deux quadriques consécutives de la suite engendrent une surface commune aux enveloppes des deux quadriques.

Observons que si $n = 1$, l'enveloppe des quadriques de Lie se compose de la surface (x) et du lieu des sommets $c'_1 d'_1, c''_1 d'_1, c'_1 d''_1, c''_1 d''_1$ du quadrilatère de Demoulin. Le point x compte pour quatre parmi les points caractéristiques des quadriques Φ.

4. Considérons les tangentes aux courbes u aux points C'_n, C''_n. Elles appartiennent au plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ et se coupent en un point A_n. L'hyperplan polaire du point A_n passe par les points C'_n, C''_n, c'est-à-dire par la droite $V^n V^{n+1}$ et, puisqu'il appartient au plan $V^n V^{n+1} V^{n+2}$, par les points U^n, U^{n+1}, U^{n+2}.

Les tangentes aux lignes v aux points C'_n, C''_n appartiennent au plan $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ et se coupent en un point A'_n. L'yhperplan polaire du point A'_n contient la droite $V^n V^{n+1}$ et le plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$.

Les hyperplans polaires des points A_n, A'_n ont en commun l'espace à trois dimensions $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$ et celui-ci est par conséquent le conjugué de la droite $A_n A'_n$.

Les tangentes aux courbes v aux points D'_n, D''_n appartiennent au plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et se coupent en un point B_n dont l'hyperplan polaire est $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1} V^{n+2}$. Les tangentes aux courbes u aux points D'_n, D''_n appartiennent au plan $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ et se coupent en un point B'_n ayant pour hyperplan polaire $U^n U^{n+1} V^{n-1} V^n V^{n+1}$. La droite $B_n B'_n$ est donc la conjuguée de l'espace à trois dimensions $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$ et coïncide avec la droite $A_n A'_n$.

Les plans tangents aux surfaces engendrées par les points de rencontre des droites $U^n U^{n+1}$, $V^n V^{n+1}$ avec l'hyperquadrique Q passent par une même droite, conjuguée de l'espace à trois dimensions $U^n U^{n+1} V^n V^{n+1}$.

La droite contenant les points A_n, A'_n, B_n, B'_n coupe Q aux points représentant les diagonales du quadrilatère gauche formé par les droites c'_n, c''_n, d'_n, d''_n.

5. Considérons la droite $A_{n-1} B'_n$. Puisque les hyperplans polaires des points A_{n-1}, B'_n sont respectivement $V^{n-1} V^n U^{n-1} U^n U^{n+1}$ et $U^n U^{n+1} V^{n-1} V^n V^{n+1}$, la droite $A_{n-1} B'_n$ est la conjuguée de l'espace à trois dimensions $U^n U^{n+1} V^{n-1} V^n$.

Soient M et M' deux points de la droite $A_{n-1} B'_n$ conjugués par rapport à Q. Les plans $U^n U^{n+1} M$ et $V^{n-1} V^n M'$ sont conjugués par rapport à Q et il leur correspond une quadrique passant par les droites $c'_{n-1}, c''_{n-1}, d'_n, d''_n$, qui appartiennent à la quadrique Φ_{n-1}.

Les plans $U^n U^{n+1} M'$ et $V^{n-1} V^n M$ sont également conjugués par rapport à Q et il leur correspond une quadrique passant par ces mêmes droites.

Lorsque le couple MM' varie sur la droite $A_{n-1} B'_n$, on obtient les quadriques du faisceau ayant pour base les droites $c'_{n-1}, c''_{n-1}, d'_n, d''_n$.

En particulier, si $M = B'_n$ et $M' = A_{n+1}$, on obtient la quadrique Φ_{n-1}. Si $M = A_{n-1}$ et $M' = B'_n$, on obtient une quadrique Ψ_n qui est définie d'une manière intrinsèque. La quadrique dont l'équation s'obtient en dérivant celle de Φ_{n-1} par rapport à u appartient au faisceau déterminé par Φ_{n-1} et Ψ_n.

Répétons le même raisonnement en partant de la droite $A'_n B_{n-1}$ dont l'espace conjugué est $U^{n-1} U^n V^n V^{n+1}$. Si N et N' sont deux points de cette droite conjugués par rapport à Q, les plans $U^{n-1} U^n N$ et

$V^n V^{n+1} N'$ d'une part, les plans $U^{n-1} U^n N'$ et $V^n V^{n+1} N$ d'autre part, représentent des quadriques passant par les droites c'_n, c''_n, d'_{n-1}, d''_{n-1}, qui appartiennent à Φ_{n+1}. En particulier, la quadrique Ψ'_n qui correspond aux plans $U^{n-1} U^n A'_n$ et $V^n V^{n+1} B_{n-1}$ passe par ces droites. La quadrique dont l'équation s'obtient en dérivant celle de Φ_{n-1} par rapport à v appartient au faisceau déterminé par les quadriques Φ_{n-1} et Ψ'_n.

On voit donc que les points caractéristiques des quadriques Φ_{n-1} sont les sommets des quadrilatères gauches formés des droites $c'_n\, c''_n\, d'_n\, d''_n$ et $c'_{n-1}\, c''_{n-1}\, d'_{n-1}\, d''_{n-1}$. Les sommets du premier quadrilatère sont aussi caractéristiques pour les quadriques Φ_{n-2} et ceux du second pour les quadriques Φ_n.

Les quadriques Ψ_n, Ψ'_n n'existent que pour $n \geqslant 2$. Nous avons ainsi attaché au point x de la surface (x) *deux nouvelles suites de quadriques* $\Psi_2, \Psi_3, \ldots, \Psi_n, \ldots,$ *et* $\Psi'_2, \Psi'_3, \ldots, \Psi'_n, \ldots$

6. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ ne se rencontraient pas. Supposons qu'il en soit autrement et qu'ils aient en commun un point P. Celui-ci étant son propre conjugué appartient à Q et l'hyperplan tangent à cette hyperquadrique en ce point contient les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ et $V^n V^{n+1} V^{n+2}$.

La conique γ_n, section de Q par le plan $U^n U^{n+1} U^{n+2}$ dégénère en deux droites $p_1 = PD'_n$ et $p_2 = PD''_n$. La conique γ'_n, section de Q par $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ dégénère en deux droites $p'_1 = PC'_n$, $p'_2 = PC''_n$.

Tout point de p_1 est le conjugué de tout point de p'_1, donc le plan $p_1 p'_1$ appartient à Q. Il en est de même des plans $p_2 p'_1$, $p_1 p'_2$, $p_2 p'_2$. Deux de ces plans représentent les droites de deux plans et les deux autres, les droites de deux gerbes.

Soit p la droite de l'espace ordinaire ayant pour image le point P. Supposons que le plan $p_1 p'_1$ représente un plan réglé ϖ_1. Alors, le plan $p_2 p'_2$ représente également un plan réglé ϖ_2 et les plans ϖ_1, ϖ_2 passent par la droite p.

Le plan $p_1 p'_2$ représente une gerbe de rayons dont le sommet P_1 appartient à la droite p et le plan $p_2 p'_1$ une gerbe de rayons dont le sommet P_2 appartient à p.

La demi-quadrique homologue de $\gamma_n = p_1 + p_2$ dégénère en deux faisceaux de rayons (P_1, ϖ_1) et (P_2, ϖ_2). De même, la demi-quadrique homologue de $\gamma'_n = p'_1 + p'_2$ est formée des deux faisceaux de rayons (P_2, ϖ_1) et (P_1, ϖ_2). Comme quadrique-lieu, la quadrique Φ_n dégénère en deux plans ϖ_1, ϖ_2 et comme quadrique-enveloppe, en deux gerbes de rayons de sommets P_1, P_2.

Au point D'_n correspond une droite d'_n du faisceau (P_1, ϖ_1). Aux points D''_n, C'_n, C''_n correspondent respectivement les droites d''_n du faisceau

(P_2, ϖ_2), c'_n du faisceau (P_2, ϖ_1) et c''_n du faisceau (P_1, ϖ_2). Si la quadrique Φ_{n-1} est irréductible, c'est-à-dire si les plans $U^{n-1} U^n U^{n+1}$ et $V^{n-1} V^n V^{n+1}$ ne se rencontrent pas, cette quadrique touche le plan $c''_n d'_n$ en P_1, le plan $c'_n d''_n$ en P_2, le plan ϖ_1 au point $c'_n d'_n$ et le plan ϖ_2 en $c''_n d''_n$. Ces points sont caractéristiques pour la quadrique.

Aux points $D'_{n+1}, D''_{n+1}, C'_{n+1}, C''_{n+1}$ correspondent des droites d'_{n+1} de (P_1, ϖ_1), d''_{n+1} de (P_2, ϖ_2), c'_{n+1} de (P_2, ϖ_1), c''_{n+1} de (P_1, ϖ_2). Ces droites appartiennent à la quadrique Φ_{n+1} et les sommets du quadrilatère gauche qu'elles forment sont des points caractéristiques de cette quadrique.

Il convient d'observer que les plans $U^n U^{n+1} U^{n+2}$, $V^n V^{n+1} V^{n+2}$ ne peuvent se rencontrer en un point qu'exceptionnellement. Si cela se présentait pour toutes les valeurs de u, v, le plan ϖ_1 serait constamment tangent aux surfaces (c'_n, d'_n) et (c'_{n+1}, d'_{n+1}) et ces deux surfaces devraient coïncider. Mais alors les points D'_n, D'_{n+1} coïncideraient et les droites $U^n U^{n+1}$ et $U^{n+1} U^{n+2}$ coïncideraient. Comme par hypothèse les points U^n, U^{n+1}, U^{n+2} ne peuvent appartenir à Q, la suite L serait rectiligne, ce qui est impossible.

Liége, le 12 février 1965.

BIBLIOGRAPHIE

1. Godeaux L. — *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé*, Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 812 820; 1928, pp. 31-41. Voir aussi:
2. — *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé* (Actualités scient., Nr. 138, Paris, Hermann, 1934).
3. — *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé*. Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1964, pp. 1-84.

ASUPRA ŞIRURILOR DE CUADRICE ASOCIATE PUNCTELOR UNEI SUPRAFEŢE

Rezumat

Într-o lucrare mai veche [1], autorul a asociat fiecărui punct al unei suprafeţe un şir de cuadrice care conţinea ca prim termen cuadrica lui Lie. Cu această ocazie a stabilit pe cale analitică proprietatea că două cuadrice consecutive ale şirului sînt tangente în patru puncte care sînt caracteristice pentru ambele cuadrice.

În Nota de faţă, după ce reaminteşte pe scurt construcţia cuadricelor şirului, autorul stabileşte printr-un raţionament geometric proprietatea de contact a două cuadrice consecutive de a fi caracteristice pentru ambele cuadrice. Se introduc în continuare două noi şiruri de cuadrice asociate fiecărui punct al suprafeţei. În sfîrşit se indică modul de degenerare al unei cuadrice din primul şir.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ КВАДРИК АССОЦИИРОВАННЫХ ТОЧКАМ ПОВЕРХНОСТИ

Краткое содержание

В работе [1] автор ассоциировал каждой точки поверхности последовательность квадрик с первым элементом—квадрика Ли. Там он устанавливает аналитическим образом свойство: две последовательные квадрики касаются друг друга в четырёх точках являющихся характеристическими для обеих квадрик.

В этой заметке автор устанавливает геометрическим образом свойство точек касания, двух последовательных квадрик, быть характеристическими для них. Потом вводятся две новые последовательности квадрик ассоциированные каждой точки поверхности.

Наконец указывается как вырождает квадрика первой последовательности.