BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 3—4, 1968

C.D. 513.821

SURFACES ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES TRANSFORMÉES RATIONNELLES DE LA SURFACE DE STEINER

PAR

LUCIEN GODEAUX

1. La surface de Steiner, du quatrième ordre, d'équation

$$x_0 x_1 x_2 x_3 = x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_2^2,$$

passe doublement par les droites $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$, $x_1 x_2 = 0$, et triplement par le point (1, 0, 0, 0). Nous avons montré que si l'on remplace dans cette équation les coordonnées courantes par des formes du second degré en x_0, x_1, x_2, x_3, on obtient une surface d'ordre huit, de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$ [1]. Si l'on remplace les coordonnées courantes par des formes du second degré en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, on obtient, dans l'espace à quatre dimensions, une variété algébrique d'ordre huit, dépourvue de surface canonique mais possédant une surface bicanonique d'ordre zéro [2], [3]. Il s'agit en somme de transformées rationnelles de la surface de Steiner.

Le procédé pour étudier ces variétés est simple ; elles représentent des involutions du second ordre appartenant à l'intersection complète de quatre hyperquadriques d'un espace à six ou à sept dimensions.

La surface de Steiner a comme cas particuliers la surface où deux des droites doubles sont infiniment voisines et la surface où les trois droites doubles sont infiniment voisines successives de l'une d'entre elles [1]). Ces surfaces ont respectivement comme équations

$$x_0 x_1^2 x_3 = x_1^4 + x_2^2 x_3^2, \quad x_0 x_3^3 = (x_2^2 - x_1 x_3)^2.$$

Le but de cette Note est d'étudier les transformées rationnelles des surfaces précédentes. Il est à prévoir que les caractères resteront les mêmes

---

1) Nous avons signalé l'existence de ces surfaces dans [4] et nous les avons étudié dans [5].

que dans le cas général, mais il nous a semblé nécessaire d'en donner une démonstration.

2. Nous aurons à utiliser au cours du travail des propriétés des invos lutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous renverron- pour ces propriétés à notre ouvrage sur ces questions [6].

3. Considérons dans un espace S_6 à six dimensions un plan (y) et un espace (x) à trois dimensions ne se rencontrant pas et une homographie H d'équations

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{y_0'}{-y_0} = \frac{y_1'}{-y_1} = \frac{y_2'}{-y_2} .$$

La surface F, d'équations

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0 , \quad y_1 y_2 = \varphi_1 , \quad y_2 y_0 = \varphi_2 , \quad y_0 y_1 = \varphi_3 ,$$

où φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes quadratiques linéairement indépendantes en x_0, x_1, x_2, x_3, est d'ordre 16 et transformée en elle-même par l'homographie H. Sur cette surface l'homographie ci-dessus engendre une involution I du second ordre, privée de points unis. Rappelons que le système canonique de F coïncide avec le système de ses sections hyperplanes. Une image de cette involution s'obtient en projetant F de l'espace (y) sur l'espace (x). On obtient l'équation

$$\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = \varphi_2^2 \varphi_3^2 + \varphi_3^2 \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 ,$$

transformée rationnelle de la surface de Steiner.

4. Envisageons quelques cas particuliers.

Supposons que la surface F ait pour équations

$$y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0 , \quad y_0 y_2 = \varphi_1 , \quad y_1 y_2 = \varphi_2 , \quad y_0^2 = \varphi_3 .$$

L'image de l'involution engendrée sur cette surface par l'homographie H est

(1) $$\varphi_0 \varphi_1^2 \varphi_3 = \varphi_1^4 + \varphi_2^2 \varphi_3^2 .$$

Appelons Γ_1, Γ_2, Γ_3 les biquadratiques d'équations respectivement

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_3 = \varphi_1 = 0 , \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Elles ont en commun huit points A (A_1, A_2,..., A_8).

La surface (1) passe doublement par les biquadratiques Γ_1, Γ_2, Γ_3, et triplement par les points A. De plus, elles coupent la quadrique $\varphi_3 = 0$ suivant une biquadratique infiniment voisine de Γ_2, que nous désignerons par Γ_2'.

La surface (1) est d'ordre huit et ses adjointes, d'ordre quatre, doivent passer par les biquadratiques Γ_2, Γ_3, Γ_2'. D'après la théorie des involutions, les courbes canoniques de la surface (1) correspondent aux sections de F par les hyperplans passant par l'espace (x). Ces sections sont de genre 17 et par conséquent les courbes canoniques de la surface (1) sont de genre 9.

Les adjointes à la surface (1) ont pour équation

$$\lambda_0 \varphi_1 \varphi_3 + \lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 + \lambda_2 \varphi_1^2 = 0 ;$$

elles passent doublement par les points A.

La surface (1) a le genre géométrique $p_g = 3$. Elle est régulière comme la surface F et ses genres sont donc $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$.

Comme cette surface représente une involution d'ordre 2 privée de points unis, le diviseur de Severi est $\sigma = 2$.

5. Supposons maintenant que la surface F ait pour équations

$$y_1^2 = \varphi_0, \quad y_2^2 - y_0 y_1 = \varphi_1, \quad y_0 y_2 = \varphi_2, \quad y_0^2 = \varphi_3 .$$

Cette surface est transformée en elle-même par H et l'involution d'ordre deux engendrée par cette homographie est privée de points unis et a pour image la surface d'équation

$$\varphi_0 \varphi_3^3 = (\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3)^2. \tag{2}$$

Cette surface passe deux fois par la biquadratique Γ_1 $(\varphi_2 = \varphi_3 = 0)$ et trois fois par les huit points A $(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$.

La surface $\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0$ coupe la surface (2) suivant la biquadratique Γ_1 et suivant deux biquadratiques infiniment voisines successives de Γ_1, que nous désignerons par Γ_1', Γ_1''. Notons que la biquadratique Γ_1' est infiniment voisine de Γ_1 sur la quadrique $\varphi_2 = 0$.

Les adjointes à la surface (2) sont des surfaces du quatrième ordre qui doivent passer par les courbes Γ_1, Γ_1', Γ_1''. Elles ont pour équation

$$\lambda (\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3) + \lambda_1 \varphi_2 \varphi_3 + \lambda_2 \varphi_3^2 = 0 ;$$

elles passent doublement par les huit points A.

On en conclut, comme plus haut, que la surface (2) a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$, et que son diviseur de Severi est $\sigma = 2$.

6. Passons maintenant aux variétés à trois dimensions. Considérons, dans un espace S_7 à sept dimensions, un plan (y) et un espace (x) à quatre dimensions ne se rencontrant pas. L'homographie H est maintenant

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{x_4'}{x_4} = \frac{y_0'}{-y_0} = \frac{y_1'}{-y_1} = \frac{y_2'}{-y_2} .$$

La variété V à trois dimensions, d'équations

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0\,,\ y_1\,y_2 = \varphi_1\,,\ y_2\,y_0 = \varphi_2\,,\ y_0\,y_1 = \varphi_3\,,$$

où les φ sont des formes quadratiques en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, est transformée en elle-même par H et cette homographie engendre sur la surface une involution du second ordre, I, possédant seize points unis, intersections de la variété V avec l'espace (x).

Observons que les sections hyperplanes F de V sont des surfaces dont le système canonique est le système des sections hyperplanes. On en conclut que le système $|F|$ est son propre adjoint et que la variété V possède donc une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro.

L'involution I a pour image la variété du huitième ordre

$$\varphi_0\,\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3 = \varphi_2^2\,\varphi_3^2 + \varphi_3^2\,\varphi_1^2 + \varphi_1^2\,\varphi_2^2\,,$$

qui est dépourvue de surface canonique et possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

7. Examinons les cas particuliers ci-dessous.

Supposons en premier lieu que la variété V ait pour équations

$$y_1^2 + y_2^2 = \varphi_0\,,\ y_0\,y_2 = \varphi_1\,,\ y_1\,y_2 = \varphi_2\,,\ y_0^2 = \varphi_3\,.$$

Elle est transformée en elle-même par H et l'involution déterminée a pour image la variété du huitième ordre de S_4 d'équation

$$\varphi_0\,\varphi_1^2\,\varphi_3 = \varphi_1^4 + \varphi_2^2\,\varphi_3^2\,. \tag{3}$$

Le système canonique éventuel de cette variété est découpé par les hypersurfaces cubiques adjointes. Observons que la variété (3) possède: a) deux surfaces doubles du quatrième ordre Φ_2 $(\varphi_3 = \varphi_1 = 0)$ et $\Phi_3(\varphi_1 = \varphi_2 = 0)$; b) une surface double du quatrième ordre infiniment voisine de Φ_2 sur $\varphi_3 = 0$ (nous la désignerons par Φ_2'); c) une courbe triple du huitième ordre Γ $(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$; d) seize points quadruples $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

Une hypersurface cubique adjointe doit passer par les surfaces Φ_2, Φ_2' qui sont du quatrième ordre. On en conclut que la surface $\varphi_3 = 0$ est une composante fixe du système adjoint. Mais alors, la surface Φ_3 devrait appartenir à un hyperplan, ce qui est impossible. La variété (3) est donc dépourvue de surface canonique.

Une biadjointe à la surface (3) est une hypersurface du sixième ordre qui doit passer deux fois par les surfaces Φ_2, Φ_2', Φ_3. Cette hypersurface coupe $\varphi_3 = 0$ suivant Φ_2 et Φ_2' d'ordre quatre, donc $\varphi_3 = 0$ fait partie des hypersurfaces biadjointes. Le complément est une surface du quatrième ordre qui doit passer deux fois par Φ_2 et une fois par Φ_2, Φ_2'. On en conclut que la variété (3) possède une unique variété biadjointe $\varphi_1^2\varphi_3 = 0$. On vérifie aisément que la corbe bicanonique, qui est unique, est d'ordre zéro.

Observons que la variété $\varphi_1^2\varphi_3 = 0$ passe trois fois par la courbe Γ et par les points quadruples de la variété (3).

Les 16 points quadruples de la variété (3) proviennent des 16 points unis de l'involution I sur V. Ce sont les points de diramation pour la correspondance [1], [2] existant entre les variétés (3) et V.

La variété (3) a les caractères $P_g = 0$, $P_2 = 1$.

8. Supposons enfin que la variété V ait pour équations

$$y_1^2 = \varphi_0\,,\ y_2^2 - y_0 y_1 = \varphi_1\,,\ y_0 y_2 = \varphi_2\,,\ y_0^2 = \varphi_3\,.$$

L'involution engendrée par H sur cette variété a pour image dans S_4 la variété d'équation

$$\varphi_1\varphi_3^3 = (\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3)^2. \tag{4}$$

La variété (4) possède: a) une surface double du quatrième ordre $\Phi\,(\varphi_2 = \varphi_3 = 0)$ à laquelle sont infiniment voisines successives deux surfaces du quatrième ordre Φ', Φ'' situées sur l'hypersurface $\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0$ (observons que Φ' est infiniment voisine de Φ sur l'hyperquadrique $\varphi_2 = 0$) ; b) une courbe triple $\Gamma(\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0)$; c) seize points quadruples $\varphi_0 = = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$.

L'hypersurface cubique adjointe doit passer par les surfaces Φ, Φ', Φ'', c'est-à-dire osculer l'hypersurface $\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0$ le long de la surface Φ', et toucher l'hyperquadrique $\varphi_2 = 0$ le long de Φ. Il en résulte que $\varphi_2 = 0$ fait partie de l'hypersurface adjointe. Celle-ci est complétée par un hyperplan qui doit contenir Φ, ce qui est impossible. La variété (4) est donc dépourvue de surface canonique.

L'hypersurface (4) possède une biadjointe $\varphi_2^2\varphi_3 = 0$ et par conséquent une seule surface bicanonique que l'on vérifie être d'ordre zéro.

L'hypersurface (4) a donc les caractères $P_g = 0$, $P_2 = 1$.

Reçue le 24 I 1968

Académie Royale des Sciences,
Liège, Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. Godeaux L., *Sur une surface algébrique du huitième ordre.* The Tôhoku Math. J., 1933, pp. 122–126.
2. — *Une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un.* C. R. Ac. Sci., Paris, 1965.
3. — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genre géométrique zéro et de bigenre un.* Rend. del Circolo Matem. di Palermo, 1965, pp. 237–246.

4. Godeaux L., *Géométrie algébrique*. T. I, Liége et Paris, 1948.
5. — *Sur deux surfaces limités d'une surface de Steiner*. Periodico di Matematiche, (sous presse).
6. — *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications*. Rome, Cremonese, 1963.

SUPRAFEŢE ŞI VARIETĂŢI ALGEBRICE TRANSFORMATE RAŢIONALE ALE SUPRAFEŢEI LUI STEINER

(Rezumat)

Se studiază transformatele raţionale ale suprafeţei lui Steiner.