Variétés algébriques non rationnelles dépourvues de variété canonique

Par

LUCIEN GODEAUX

On sait qu'il existe des surfaces algébriques non rationnelles privées de système canonique mais possédant des courbes bicanoniques, la plupart d'ailleurs représentant des involutions appartenant à des surfaces algébriques[1]). Notre but, dans cette note, est de construire des variétés algébriques privées de variété canonique mais possédant des variétés bicanoniques. Nous obtenons ces variétés comme images d'involutions appartenant à une variété algébrique possédant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Le procédé de démonstration utilisé dans le cas des surfaces ne peut plus l'être ici car nous n'avons pas de relation entre les genres géométriques d'une variété et de l'image d'une involution appartenant à cette variété. Nous nous baserons sur le théorème suivant[2]): Soit V une variété algébrique à n dimensions complètement régulière (c'est-à-dire dépourvue d'intégrales analogues aux intégrales de Picard de première espèce d'une surface algébrique) contenant une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, et Ω une image de cette involution. Le système canonique de V contient p systèmes appartenant à l'involution. Le système canonique de Ω a pour homologue sur V celui de ces systèmes qui a la dimension minimum si n est pair, la dimension maximum si n est impair.

Partant d'une variété à n dimensions d'un espace S_{2n+1} à $2n+1$ dimensions intersection de $n+1$ hyperquadriques, nous supposons que cette variété contient une involution du second ordre ayant une courbe de points unis. L'image de cette involution est dépourvue de variété canonique si n est pair[3]).

Pour les propriétés des involutions utilisées ici, nous renverrons à notre volume consacré à cet objet[4]).

1. Soit V_n la variété algébrique à n dimensions, d'ordre 2^{n+1}, intersection dans un espace S_{2n+1} à $2n+1$ dimensions, de $n+1$ hyperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$.

---

1) Voir [2]. Le problème de la détermination de ces surfaces est né des recherches de CASTELNUOVO sur les conditions de rationnalité des surfaces. On trouvera la bibliographie de cette question dans notre opuscule [1].

2) Voir [4].

3) Nous avons étudié ce problème dans les cas où l'involution I est dépourvue de points unis ou en possède un nombre fini dans une note [5]. Dans le cas actuel, la démonstration a dû être modifiée.

4) Voir [3].

Le système canonique de V_n est découpé par les hypersurfaces d'ordre $2(n+1) - (2n+2) = 0$ et par conséquent si V_n a une variété canonique, celle-ci est d'ordre 0.

Désignons par F les sections hyperplanes de V. Le système canonique d'une variété F, appartenant à un espace à $2n$ dimensions, est découpé par les hypersurfaces d'ordre $2(n+1) - (2n+1) = 1$, c'est-à-dire par les hyperplans de cet espace. On en conclut que le système $|F|$ est son propre adjoint. Par conséquent la variété V_n possède une variété canonique d'ordre zéro et par suite des variétés pluricanoniques d'ordre zéro également.

La variété V_n possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

2. Considérons une homographie biaxiale harmonique H de S_{2n+1} possédant deux axes σ_{n-2} à $n-2$ dimensions et σ_{n+2} à $n+2$ dimensions. Prenons pour hyperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ des hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes $\sigma_{n-2}, \sigma_{n+2}$. Dans ces conditions, H détermine sur V_n une involution I, d'ordre deux, possédant une courbe d'ordre 2^{n+1} lieu de points unis, intersection de σ_{n+2} avec les $n+1$ hyperquadriques Q.

Nous construirons un modèle projectif Ω_n de l'image de l'involution I de la manière suivante:

Les hyperquadriques de S_{2n+1} transformées en elles-mêmes par H et ne contenant pas les axes $\sigma_{n-2}, \sigma_{n+2}$ forment un système linéaire de dimension $n^2 + 3n + 5$. Rapportons projectivement ces hyperquadriques aux hyperplans d'un espace linéaire S à $n^2 + 3n + 5$ dimensions. Observons qu'aux points de σ_{n-2} correspondent les points d'une variété de Veronese Ψ_{n-2} d'ordre 2^{n-2}, appartenant à un espace linéaire Σ à $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ dimensions et qu'aux points de σ_{n+2} correspondent ceux d'une variété de Veronese Ψ_{n+2} d'ordre 2^{n+2}, située dans un espace Σ' à $\frac{1}{2}(n+2)(n+4)$ dimensions. Les espaces Σ, Σ' ne se rencontrent pas et déterminent complètement S.

Aux droites de S_{2n+1} s'appuyant sur $\sigma_{n-2}, \sigma_{n+2}$ correspondent les droites s'appuyant sur les variétés Ψ_{n-2}, Ψ_{n+2}. Le lieu de ces droites est une variété W_{2n+1} à $2n+1$ dimensions, d'ordre 2^{2n}, passant 2^{n+2} fois par Ψ_{n-2} et 2^{n-2} fois par Ψ_{n+2}. Un couple de points homologues dans l'homographie H se trouve sur une droite s'appuyant sur $\sigma_{n-2}, \sigma_{n+2}$, donc à ce couple correspond un point de W_{2n+1}. Cette variété représente donc l'involution engendrée par H dans S_{2n+1}.

Aux hyperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ correspondent $n+1$ hyperplans de S ayant en commun un espace S' à $n^2 + 2n + 4$ dimensions coupant W_{2n+1} suivant la variété Ω_n, d'ordre 2^{2n}, à n dimensions, image de l'involution I.

3. On peut former facilement les équations de la variété W_{2n+1}. Désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}$ les coordonnées des points de σ_{n-2} et par $z_0, z_1, \ldots, z_{n+2}$ celles des points de σ_{n+2}. Les coordonnées des points de l'espace S sont $Y_{ik} = y_i y_k$ et $Z_{ik} = z_i z_k$. Les équations des variétés Ψ_{n-2}, Ψ_{n+2} s'obtiennent en écrivant que les déterminants

$$|Y_{ik}| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n-2), \tag{1}$$

$$|Z_{ik}| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n+2) \tag{2}$$

sont de caractéristique un.

Comme W_{2n+1} est l'intersection des cônes projetant Ψ_{n-2} de Σ' et du cône projetant Ψ_{n+2} de Σ, les équations (1) et (2) sont celles de cette variété.

Les hyperquadriques de S_{2n+1} transformées en elles-mêmes par H et passant par les axes σ_{n-2}, σ_{n+2} de cette homographie ont pour équation

$$\sum \lambda_{ik}\, y_i z_k = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2;\, k = 0, 1, \ldots, n+2) \tag{3}$$

et forment un système linéaire à $n^2 + 2n - 4$ dimensions. En élevant l'équation précédente au carré, on a

$$\sum \lambda_{ik}\, \lambda_{jh}\, Y_{ik} Z_{jh} = 0, \tag{4}$$

équation qui représente les hyperquadriques passant par Σ et Σ'.

4. Revenons à la variété Ω_n et désignons par Φ ses sections hyperplanes. Aux variétés Φ correspondent sur V_n des variétés du système $|2F|$ découpées par les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et ne contenant pas les axes σ_{n-2} et σ_{n+2}. Elles forment un système de dimension $n^2 + 2n + 4$, nous les désignerons par $|(2F)_0|$.

Le système $|2F|$ contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I, le second, que nous désignerons par $|(2F)_1|$, est découpé par les hyperquadriques (3) et a la dimension $n^2 + 2n - 4$.

Aux points unis de l'involution I correspondent sur Ω_n les points d'une courbe de diramation D, d'ordre 2^{n+1}, tracée sur la variété Ψ_{n+2} section de cette variété par Ω_n.

Soient P un point uni de I et P' le point de diramation qui lui correspond sur Ω_n. L'espace tangent à V_n en P contient l'espace σ_{n-2} et par conséquent le cône tangent à Ω_n en P' projette de ce point la variété Ψ_{n-2}. Le point P' et la courbe D sont donc multiples d'ordre 2^{n-2} pour Ω_n.

Désignons par Φ_1 les variétés qui correspondent sur Ω_n aux variétés $(2F)_1$.

A la section de V_n par une hyperquadrique correspond sur Ω_n une variété appartenant au système $|2\Phi|$. Il suffit pour le voir de faire tendre d'une manière continue l'hyperquadrique vers une hyperquadrique coupant V_n suivant une variété $(2F)_0$. Si au contraire on fait tendre d'une manière continue l'hyperquadrique vers une hyperquadrique (3), la variété correspondant sur Ω_n tend vers une variété $2\Phi_1$. La variété Φ_1 passe par la courbe D et dans la théorie des transformations birationnelles, la courbe D est équivalent à une variété rationnelle à $n-1$ dimensions que nous désignerons par Δ. On a

$$2\Phi \equiv 2\Phi_1 + \Delta$$

et on voit que le long d'une variété Φ_1, il y a une hyperquadrique touchant la variété Ω_n en tout point d'intersection.

Les variétés $(2F)_1$ passent par les points unis de l'involution I. L'espace tangent en P à l'une de ces variétés coupe l'espace σ_{n-2} suivant un espace σ_{n-3} à $n-3$ dimensions. Par conséquent le cône tangent en P' à la variété Φ_1 homologue projette de ce point la variété de Veronese tracée sur Ψ_{n-2} et correspondant à cet espace σ_{n-3}. La courbe de diramation est donc multiple d'ordre 2^{n-3} pour les variétés Φ_1.

La variété Ω_n, d'ordre 2^{2n}, possède une courbe de diramation D d'ordre 2^{n+1}, multiple d'ordre 2^{n-2} pour la variété. Il existe un système linéaire, de dimenion $n^2 + 2n - 4$, d'hyperquadriques circonscrites à la variété Ω_n le long des variétés Φ_1 d'ordre 2^{2n}, pour lesquelles la courbe de diramation est multiple d'ordre 2^{n-3}.

5. Soient Q_{n+1}, Q_{n+2} deux hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes $\sigma_{n-2}, \sigma_{n+2}$ de H, indépendantes des hyperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$.

L'hyperquadrique Q_{n+1} coupe V_n suivant une variété V_{n-1} à $n-1$ dimensions sur laquelle H détermine une involution ayant un nombre fini de points unis. L'hyperquadrique Q_{n+2} coupe V_{n-1} suivant une variété V_{n-2} à $n-2$ dimensions sur laquelle H détermine une involution dépourvue de points unis.

Les variétés canoniques de V_{n-2} sont découpées par les hypersurfaces du quatrième ordre ne contenant pas la variété.

Un calcul simple montre que que les hypersurfaces du quatrième ordre de S_{2n+1} forment un système linéaire de dimension

$$\tfrac{1}{6}(4n^4 + 28n^3 + 71n^2 + 77n + 30),$$

celles qui sont transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par σ_{n-2}, σ_{n+2} forment un système linéaire de dimension

$$\tfrac{1}{6}(2n^4 + 14n^3 + 37n^2 + 67n + 90),$$

enfin celles qui passent par $\sigma_{n-2}, \sigma_{n+2}$ forment un système linéaire de dimension

$$\tfrac{1}{3}(n^4 + 7n^3 + 17n^2 + 5n - 30).$$

Si l'on défalque celles de ces hypersurfaces qui contiennent les hyperquadriques Q, on voit que les trois systèmes précédents contiennent des hyperquadriques linéairement indépendantes respectivement en nombre

$$\tfrac{1}{3}(2n^4 + 8n^3 + 4n^2 - 8n - 3), \quad \tfrac{1}{3}n(n^3 + 4n^2 + 2n - 4),$$
$$\tfrac{1}{3}(n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n - 3).$$

Le premier nombre donne le genre géométrique de la variété V_{n-2}. Dans ce système canonique, il y a deux systèmes appartenant à l'involution I de V_{n-2}; ils ont les dimensions

$$x = \tfrac{1}{3}n(n^3 + 4n^2 + 2n - 4), \qquad x - 1.$$

Nous avons démontré que si $n-2$ est pair, c'est le second système qui est le transformé du système canonique de la variété image de l'involution I appartenant à la variété V_{n-2}. Si $n-2$ est impair, c'est le premier système qui possède cette propriété.

Nous désignerons par $|(4F)_0|$ le système de dimension x et par $|(4F)_1|$ celui de dimension $x-1$ découpé par les systèmes d'hyperquadriques précédents sur V_{n-2}.

6. Supposons n *impair* et remarquons qu'aux variétés $(4F)_0$ correspondent sur Ω_n les variétés 2Φ.

A la variété V_{n-2} correspond l'intersection Ω_{n-2} de Ω_n avec l'espace commun à deux hyperplans de S', c'est-à-dire l'intersection de deux sections hyperplanes Φ. Sur cette variété Ω_{n-2} le système canonique est découpé par le système $|2\Phi|$. Sur une variété Φ, le système $|2\Phi|$ est donc l'adjoint aux variétés Ω_{n-2} de la variété Φ considérée. Il existe une adjointe contenant Ω_{n-2} complétée par une variété Φ.

Le système des sections hyperplanes de Ω_n est donc son propre adjoint.

Si n est impair, la variété Ω_n possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Le système $|\Phi_1|$ est également son propre adjoint.

7. Supposons maintenant *n pair*. Observons que le système $|(4F)_1|$ est la somme des systèmes $|(2F)_0|$ et $|(2F)_1|$, par conséquent si l'on considère sur une variété Φ les variétés Ω_{n-2}, l'adjoint au système de ces variétés est découpé sur Φ par les variétés $\Phi + \Phi_1$. Il en résulte qu'une des adjointes contient Ω_{n-2} et est complétée par une variété Φ_1. On a donc

$$\Phi' \equiv \Phi .$$

Comme les systèmes $|\Phi|$ et $|\Phi_1|$ sont distincts, *si n est pair, la variété Ω_n est dépourvue de variété canonique.*

Le système canonique d'une variété Φ_1 est donc découpé par ses sections hyperplanes, par conséquent les hyperquadriques découpent le système bicanonique.

Considérons une variété Φ_1 et la variété $(2F)_1$ correspondante sur V_n. Le système canonique de $(2F)_1$ contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, découpé par les variétés $(2F)_0$, a la dimension $n^2 + 2n + 4$, l'autre, découpé par les variétés $(2F)_1$, a la dimension $n^2 + 2n - 5$. L'un de ces systèmes est le transformé du système canonique de la variété Φ_1. Ce ne peut être le second, car alors $|\Phi_1'|$ coïnciderait avec $|\Phi_1|$ et Ω_n aurait une variété canonique d'ordre zéro, ce que l'on a vu être impossible. On en conclut que le système adjoint à $|\Phi_1|$ est le système $|\Phi|$. On a donc

$$|\Phi'| = |\Phi_1|, \qquad |\Phi_1'| = |\Phi|, \qquad |\Phi''| = |\Phi|,$$

et *la variété Ω_n possède une variété bicanonique d'ordre zéro.*

En résumé, *La section par un espace linéaire* à $n^2 + 2n + 4$ *dimensions de la variété W_{2n+1} lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese d'ordres 2^{n-2} et 2^{n+2} dont les espaces ambiants à $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ et à $\frac{1}{2}(n+2)(n+5)$ dimensions ne se rencontrent pas, est une variété à n dimensions qui:*

si n est impair, possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro,

si n est pair, est dépourvue de variété canonique et possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

Dans ce dernier cas, les variétés $(2i+1)$-canoniques n'existent pas mais les variétés $(2i)$-canoniques sont d'ordre zéro.

8. Ces points établis on peut obtenir un autre modèle projectif Ω_n' de la variété Ω_n en projetant la variété V_n de σ_{n-2} sur σ_{n+2}.

Si n est impair, la variété Ω_n' est d'ordre 2^n et le système de ses sections hyperplanes est son propre adjoint.

Supposons par exemple $n = 3$. Les équations de V_3 peuvent s'écrire

$$y_0^2 = \varphi_0, \quad y_0 y_1 = \varphi_1, \quad y_1^2 = \varphi_2, \quad \varphi = 0,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi$ étant des formes quadratiques en $x_0, x_1, \ldots, x_5$. Les équations de Ω_3' dans σ_5 sont

$$\varphi_1^2 - \varphi_0 \varphi_2 = 0, \quad \varphi = 0,$$

variété dont les sections hyperplanes sont leurs propres adjointes.

Si n est pair, les sections hyperplanes de la variété Ω_n' ne sont pas leurs propres adjointes, mais elles sont les adjointes des sections de la variété Ω_n' par les variétés qui correspondent aux sections de V_n par les hyperplans passant par σ_{n+2}.

Soit par exemple $n = 4$. Les équations de V_4 peuvent s'écrire

$$y_1 y_2 = \varphi_0, \quad y_2 y_0 = \varphi_1, \quad y_0 y_1 = \varphi_2, \quad y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = \varphi_3, \quad \varphi = 0,$$

les φ étant des formes du second degré en $x_0, x_1, \ldots, x_6$.

Les équations de Ω_4' dans σ_6 sont

$$\varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_2^2 \varphi_0^2 + \varphi_0^2 \varphi_1^2 = \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3, \quad \varphi = 0.$$

Les sections hyperplanes de Ω_4' sont les adjointes aux variétés découpées par les variétés

$$\lambda_0 \varphi_1 \varphi_2 + \lambda_1 \varphi_2 \varphi_0 + \lambda_2 \varphi_0 \varphi_1 = 0.$$

Bibliographie

[1] L. Godeaux, Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. Paris 1935.

[2] L. Godeaux, Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles. J. Math. pures appl., IX Sér. **39**, 221–230 (1960).

[3] L. Godeaux, Théories des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications. Rome 1963.

[4] L. Godeaux, Involutions cycliques privées de points unis appartenant à une variété algébrique complètement régulière. Bull. Acad. roy. Belg. **1968**, 653–661.

[5] L. Godeaux, Variétés algébriques dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique. Bull. Acad. roy. Belg. **1968**, 913–926.

Eingegangen am 14. 8. 1968

Anschrift des Autors:

Lucien Godeaux
37, quai Orban
Liége, Belgique