

**Mathematics.** — *Une propriété des variétés de VERONESE.* Par LUCIEN GODEAUX.  
(Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE.)

(Communicated at the meeting of September 27, 1941.)

Appelons variété de VERONESE à  $n$  dimensions la variété obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace linéaire à  $n$  dimensions aux hyperplans d'un espace linéaire à  $\frac{1}{2}n(n+3)$  dimensions. Pour  $n=2$ , on obtient la surface de VERONESE. On peut obtenir les propriétés d'une variété de VERONESE en généralisant la méthode suivie dans le cas d'une surface<sup>1)</sup>. Dans cette note, nous nous proposons d'obtenir quelques propriétés de cette variété par une autre voie. Nous utilisons la variété de SEGRE représentant les couples de points de deux espaces linéaires à  $n$  dimensions<sup>2)</sup>; cette variété contient une involution du second ordre représentée par la variété des cordes de la variété de VERONESE à  $n$  dimensions. C'est sur cette remarque qu'est basée la méthode suivie.

1. Soient  $S_n$  un espace linéaire à  $n$  dimensions,  $y, z$  deux de ses points,  $y_0, y_1, \dots, y_n$  et  $z_0, z_1, \dots, z_n$  leurs coordonnées projectives homogènes. Désignons par  $V_{2n}$  la variété de SEGRE représentant les couples ordonnés  $y, z$  et par  $\Omega_{2n}$  la variété représentant les couples non ordonnés  $y, z$ .

Nous prendrons comme modèle projectif de la variété  $V_{2n}$  la variété d'ordre  $(2n)! : (n!)^2 = \binom{2n}{n}$  appartenant à l'espace linéaire  $S_r$  à  $r = n(n+2)$  dimensions, obtenue en posant

$${}^{\rho} X_{ik} = y_i z_k, \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

et en interprétant les  $X_{ik}$  comme les coordonnées projectives d'un point  $X$  de cet espace.

Pour modèle projectif de la variété  $\Omega_{2n}$ , nous prendrons la variété appartenant à l'espace  $S_{\rho}$  à  $\rho = \frac{1}{2}n(n+3)$  dimensions, obtenue en posant

$${}^{\rho} Y_{ik} = y_i z_k + y_k z_i$$

et en prenant les  $Y_{ik}$  comme coordonnées projectives d'un point  $Y$  de cet espace.

Les équations de la variété  $V_{2n}$  s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{ik} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un; celles de la variété  $\Omega_{2n}$  en écrivant que le déterminant *symétrique*

$$\begin{vmatrix} Y_{ik} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique deux.

Considérons, dans l'espace  $S_r$ , l'homographie  $H$  d'équations

$${}^{\rho} X'_{ik} = X_{ki}.$$

Cette homographie est harmonique et ses axes ponctuels sont

a) Un espace linéaire  $\sigma$  à  $\rho$  dimensions, représenté par les équations

$$X_{ik} = X_{ki}.$$

<sup>1)</sup> Voir par exemple: E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907).

<sup>2)</sup> C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891, pp. 192—204).

Cet espace coupe  $V_{2n}$  suivant une variété  $U$  dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant *symétrique*  $|X_{ik}|$  est de caractéristique un. Cette variété est obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de  $\sigma$  les hyperquadriques d'un espace linéaire à  $n$  dimensions. Pour cette raison, nous l'appellerons la variété de VERONESE à  $n$  dimensions. L'ordre de la variété  $U$  est égal à  $2n$ .

b) Un espace linéaire  $\sigma'$  à  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  dimensions, d'équations

$$X_{ik} + X_{ki} = 0.$$

Cet axe ne rencontre pas la variété  $V_{2n}$ .

La variété  $V_{2n}$  est transformée en elle-même par l'homographie  $H$  et celle-ci engendre donc, sur cette variété, une involution  $I_2$ , d'ordre deux, dont les points unis forment la variété de VERONESE  $U$ .

2. Les hyperplans  $\xi$  passant par l'axe  $\sigma'$  de  $H$  sont unis pour cette homographie et découpent, sur  $V_{2n}$ , un système linéaire  $|F|$ , de variétés à  $2n-1$  dimensions, de dimension  $\varrho$ , appartenant à l'involution  $I_2$ . Pour obtenir une variété image de cette involution, rapportons projectivement les variétés  $F$  aux hyperplans de l'espace  $S_\varrho$ , à  $\varrho$  dimensions. L'équation des hyperplans  $\xi$  étant

$$\sum \lambda_{ik} (X_{ik} + X_{ki}) = 0,$$

il suffit de poser

$$\varrho Y_{ik} = X_{ik} + X_{ki} = y_i z_k + y_k z_i.$$

On obtient donc ainsi les équations de la variété  $\Omega_{2n}$ . On voit en effet immédiatement que si, dans un déterminant tiré de  $|Y_{ik}|$  en effaçant  $n-2$  lignes et  $n-2$  colonnes, on remplace  $Y_{ik}$  par  $X_{ik} + X_{ki}$ , ce déterminant se ramène à une somme de déterminants identiquement nuls en raison des équations de  $V_{2n}$ .

D'ailleurs, on passe des équations de  $V_{2n}$  à celles de  $\Omega_{2n}$  en considérant l'identité  $\varrho y_i = z_i$ , qui fait correspondre au couple ordonné  $yz$ , le couple ordonné  $zy$ . L'identité donne d'ailleurs les équations de l'homographie  $H$  et inversement, on déduit des équations de cette homographie  $\varrho y_i = z_i$ .

Les variétés  $\Phi$ , qui correspondent sur  $\Omega_{2n}$  aux variétés  $F$ , sont les sections hyperplanes de  $\Omega_{2n}$ ; elles forment un système de degré  $\frac{1}{2} \binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ .

A la variété  $U$  de  $V_{2n}$ , caractérisée par  $X_{ik} = X_{ki}$ , correspond sur  $\Omega_{2n}$  la variété de diramation  $D$ , dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant  $|Y_{ik}|$  est de caractéristique un. La variété  $D$  est donc une variété de VERONESE à  $n$  dimensions; elle est double pour la variété  $\Omega_{2n}$ .

3. Envisageons maintenant les hyperplans  $\xi'$  de  $S_r$  passant par l'axe  $\sigma$  de l'homographie  $H$ ; ils ont pour équation

$$\sum \lambda_{ik} (X_{ik} - X_{ki}) = 0, \quad (i < k)$$

et découpent sur  $V_{2n}$  des variétés  $F'$  à  $2n-1$  dimensions, formant un système linéaire de dimension  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ , appartenant à l'involution  $I_2$ . Désignons par  $\Phi'$  les variétés qui correspondent sur  $\Omega_{2n}$  aux variétés  $F'$ .

Pour obtenir l'équation des variétés  $\Phi'$ , élevons les deux membres de l'équation précédente au carré; nous obtenons

$$\sum \lambda_{ik} \lambda_{jh} (X_{ik} X_{jh} + X_{ki} X_{hj} - X_{ik} X_{hj} - X_{ki} X_{jh}) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\sum \lambda_{ik} \lambda_{jh} \begin{vmatrix} Y_{jk} & Y_{ji} \\ Y_{hk} & Y_{hi} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une hyperquadrique de  $S_{2n}$ , passant par la variété de VERONESE  $D$ . Lorsque les coefficients  $\lambda$  varient, cette hyperquadrique engendre un système continu  $\Sigma$ , de dimension  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  et d'indice  $2\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ . Ces hyperquadriques découpent sur  $\Omega_{2n}$  les variétés  $\Phi'$ .

Soit  $\bar{F}$  une section hyperplane quelconque de  $V_{2n}$ . A cette variété correspond sur  $\Omega_{2n}$  une variété  $\bar{\Phi}$  qui correspond également à la section hyperplane que  $H$  fait correspondre à  $\bar{F}$ . Lorsque  $\bar{F}$  varie sur  $V_{2n}$ ,  $\bar{\Phi}$  engendre un système continu rationnel, dont les éléments sont par conséquent contenus totalement dans un système linéaire  $|\bar{\Phi}|$ . Aux variétés de ce système correspondent sur  $V_{2n}$  des variétés appartenant au système  $|2\bar{F}|$ .

Faisons varier  $\bar{F}$  d'une manière continue dans le système  $|\bar{F}|$  des sections hyperplanes de  $V_{2n}$  en la faisant tendre vers une variété  $F$  découpée par un hyperplan passant par l'axe  $\sigma'$  de  $H$ . La variété  $\bar{\Phi}$  varie d'une manière continue dans  $|\bar{\Phi}|$  et tend vers une section hyperplane  $\Phi$  de  $\Omega_{2n}$ , comptée deux fois. On a donc

$$|\bar{\Phi}| = |2\Phi|.$$

Faisons maintenant varier  $\bar{F}$  d'une manière continue en la faisant tendre vers une variété  $F'$  découpée par un hyperplan passant par l'axe  $\sigma$  de  $H$ . La variété correspondante  $\bar{\Phi}$  tend vers une variété  $\Phi'$  augmentée de la variété à  $2n-1$  dimensions formée par les points infiniment voisins de  $D$ , situés sur  $\Omega_{2n}$ . On a donc

$$|\bar{\Phi}| = |2\Phi' + D| = |2\Phi|.$$

Il en résulte que les variétés  $\bar{\Phi}$  sont découpées sur  $\Omega_{2n}$  par les hyperquadriques de  $S_{2n}$  et que le long de chaque variété  $\Phi'$ , il y a une hyperquadrique de  $\Sigma$  touchant  $\Omega_{2n}$  en chaque point d'intersection. Les variétés  $\Phi'$  sont par suite d'ordre  $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ .

La variété  $\Omega_{2n}$  est l'enveloppe du système  $\Sigma$ , ayant pour base la variété de VERONESE  $D$ .

4. A chaque point  $Y$  de  $S_{2n}$ , faisons correspondre dans  $S_n$  l'hyperquadrique enveloppe d'équation

$$\sum \lambda_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Cette correspondance est projective.

Aux points de  $\Omega_{2n}$  correspondent les hyperquadriques  $n-1$  fois spécialisées, c'est-à-dire dégénérées en deux gerbes d'hyperplans. Aux points de  $D$  correspondent les hyperquadriques  $n$  fois spécialisées, c'est-à-dire dégénérées en deux gerbes d'hyperplans superposées.

Considérons deux points  $Y', Y''$  de la variété  $D$  et soient  $y', y''$  les centres des gerbes d'hyperplans correspondantes dans  $S_n$ . Aux points de la droite  $Y'Y''$  correspondent dans  $S_n$  les hyperquadriques

$$(\sum y'_i \xi_i)^2 + \lambda (\sum y''_i \xi_i)^2 = 0.$$

Toutes les hyperquadriques de ce système sont  $n-1$  fois spécialisées; chacune d'elles dégénère en deux gerbes d'hyperplans dont les sommets forment un couple d'une involution appartenant à la droite  $y'y''$ . Les points doubles de cette involution correspondent aux deux points d'appui  $Y', Y''$  de la droite  $Y'Y''$  sur la variété  $D$ .

En particulier, lorsque le point  $Y''$  tend vers  $Y'$  sur  $D$ , c'est-à-dire lorsqu'il s'agit d'une droite tangente en  $Y'$  à la variété  $D$ , aux points de cette droite correspondent dans  $S_n$  les couples de points d'une involution parabolique sur une droite, c'est-à-dire les couples de points d'une droite dont l'un,  $y'$ , est fixe.

Les cordes de la variété  $D$  sont, d'après ceci, situées dans la variété  $\Omega_{2n}$ .

5. La variété  $V_{2n}$  contient deux séries  $\infty^n$  d'espaces à  $n$  dimensions. Un espace  $\eta$  de la première série est le lieu des points de la variété qui représentent les couples de points de  $S_n$  dont le premier,  $y$ , est fixe. Un espace  $\zeta$  de la seconde série représente les couples de points dont le second,  $z$ , est fixe. Deux espaces de la même série ne se rencontrent pas; un espace  $\eta$  et un espace  $\zeta$  ont en commun un point.

À un espace  $\eta$ , l'homographie  $H$  fait correspondre un espace  $\zeta$  et réciproquement. Le point commun à ces deux espaces se trouve sur la variété unie  $U$ .

Les équations de l'espace  $\eta$  associé au point  $y$  sont

$$\frac{X_{0i}}{y_0} = \frac{X_{1i}}{y_1} = \dots = \frac{X_{ki}}{y_k} = \dots = \frac{X_{ni}}{y_n}$$

et celles de l'espace  $\zeta$  associé au point  $z$ ,

$$\frac{X_{i0}}{z_0} = \frac{X_{i1}}{z_1} = \dots = \frac{X_{ik}}{z_k} = \dots = \frac{X_{in}}{z_n}.$$

Si ces deux espaces sont conjugués par rapport à  $H$ , on a  $y = z$  et à ces deux espaces, correspond, sur la variété  $\Omega_{2n}$ , l'espace à  $n$  dimensions d'équations

$$y_i^2 Y_{kk} - 2y_i y_k Y_{ki} + y_k^2 Y_{ii} = 0.$$

On reconnaît immédiatement que les droites passant par le point  $Y$  et appartenant à cet espace, sont tangentes à  $D$  au point  $Y$ . Il en résulte que

Àux espaces à  $n$  dimensions  $\eta, \zeta$  de  $V_{2n}$  conjugués dans l'homographie  $H$ , correspondent dans  $\Omega_{2n}$  les espaces à  $n$  dimensions tangents à la variété de VERONESE  $D$ .

6. Considérons la variété de SEGRE  $V'$  à  $2(n-1)$  dimensions, représentant sur  $V_{2n}$  les couples de point  $y, z$  de deux hyperplans

$$\begin{aligned} \mu_0 y_0 + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_n y_n &= 0, \\ \nu_0 z_0 + \nu_1 z_1 + \dots + \nu_n z_n &= 0 \end{aligned}$$

de  $S_n$ . Cette variété  $V'$  est découpée sur  $V_{2n}$  par l'espace linéaire à  $(n-1)(n+1)$  dimensions

$$\begin{aligned} \mu_0 X_{0i} + \mu_1 X_{1i} + \dots + \mu_n X_{ni} &= 0, \\ \nu_0 X_{i0} + \nu_1 X_{i1} + \dots + \nu_n X_{in} &= 0. \end{aligned}$$

Pour que la variété  $V'$  soit transformée en elle-même par l'homographie  $H$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\mu_0}{\nu_0} = \frac{\mu_1}{\nu_1} = \dots = \frac{\mu_n}{\nu_n}.$$

À cette variété correspond alors sur  $\Omega_{2n}$  une variété  $\Omega'$ , située dans l'espace à  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  dimensions

$$\mu_0 Y_{0i} + \mu_1 Y_{1i} + \dots + \mu_n Y_{ni} = 0.$$

Considérons la section de la variété de VERONESE  $D$  par cet espace. Il lui correspond dans  $S_n$  l'hyperplan

$$\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n = 0.$$

Par conséquent, la section considérée est une variété de VERONESE  $D'$  à  $n-1$  dimensions. Cette variété détermine complètement l'espace linéaire à  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$  dimensions. Les cordes de  $D'$  étant des cordes de  $D$ , appartiennent à  $\Omega_{2n}$ . L'espace linéaire déterminé par  $D'$  coupe donc  $\Omega_{2n}$  suivant une variété de même construction à  $2(n-1)$  dimensions.

Liège, le 28 juin 1941.