SUR LES POINTS UNIS SYMETRIQUES

DES

INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT A UNE SURFACE ALGEBRIQUE

PAR LUCIEN GODEAUX
(Université, Liège, Belgique)

Plusieurs de nos travaux antérieurs [1] ont porté sur l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous nous proposons, dans cette note, de compléter nos résultats en ce qui concerne les points unis que nous avons appelés symétriques et dont nous rappelons la définition plus loin.

1. Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, simples pour la surface. Cette involution est engendrée par une transformation birationnelle T de la surface en soi.

Soient A un point uni de I_p, α le plan tangent à la surface en ce point. Dans le faisceau (A, α) des tangentes à la surface en A, T détermine une homographie qui peut être l'identité ou être cyclique d'ordre p ; dans le premier cas, A est un point uni parfait, dans le second un point uni non parfait. Dans ce second cas, l'homographie déterminée par T dans le faisceau (A, α) possède deux tangentes unies ; en d'autres termes, dans le domaine du premier ordre du point

[1] Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935). Voir également nos mémoires *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique,* 1938), *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (Annales scient. de l'Ecole normale supérieure,* 1938, pp. 193-222).

A sur la surface F, l'involution I_p possède deux points unis. Ces points peuvent à leur tour être unis parfaits ou non parfaits, et ainsi de suite.

Construisons, sur la surface F, un système linéaire de courbes C, dépourvu de points-base, transformé en lui-même par T et contenant p systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, ..., |C_p|$ composés au moyen de l'involution I_p. Nous avons montré que cette construction peut être faite et de telle manière que l'un de ces p systèmes, par exemple $|C_p|$, soit dépourvu de points-base et ait d'autre part une dimension r_1 aussi grande qu'on le veut. Soit r la dimension du système linéaire $|C|$; rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions ; à la surface F correspond dans S_r une surface que nous désignerons toujours par F et à laquelle nous nous référerons toujours dans la suite. On peut d'ailleurs supposer, en remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, que la surface F est simple.

Sur la surface F de S_r, la transformation T est déterminée par une homographie de période p de S_r, homographie que nous désignerons encore par T. Soient $S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(p)}$ les p axes ponctuels de cette homographie ; le système $|C_i|$, composé au moyen de l'involution I_p, est découpé sur F par les hyperplans passant par ces axes sauf par $S^{(i)}$. Le système $|C_p|$ étant dépourvu de points-base, seul l'espace $S^{(p)}$ rencontre la surface F, nécessairement en un nombre fini de points qui sont les points unis de I_p. Les systèmes $|C_1|, |C_2|, ..., |C_{p-1}|$ ont ces points unis comme points-base et n'ont d'ailleurs pas d'autres points-base.

L'espace $S^{(p)}$ a la dimension r_1. En projetant la surface F sur l'espace $S^{(p)}$ à partir de l'espace minimum contenant $S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(p-1)}$, on obtient une surface Φ image de l'involution I_p. Nous désignerons par $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_p$ les courbes de Φ respectivement projections des courbes $C_1, C_2, ..., C_p$. Les systèmes linéaires $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, ..., |\Gamma_p|$ sont complets et le dernier de ces systèmes est formé par les sections hyperplanes de Φ.

Nous désignerons par n le degré du sistème $|\Gamma_p|$, par π son genre. Le système $|C|$ a alors le degré pn et le genre $p(\pi - 1) + 1$.

2. Soit A un point uni non parfait de l'involution I_p ; ce point appartient donc à l'espace $S^{(p)}$ et on peut toujours s'arranger de telle sorte qu'aucune tangente à la surface F en A n'appartienne à cet espace. Le plan α, tangent à F en A, s'appuie alors en un point sur deux

des espaces $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(p-1)}$, par exemple en A' sur l'espace $S^{(1)}$ et en A'' sur l'espace $S^{(p-1)}$. Dans le plan α, T détermine une homographie de période p ayant trois points unis A, A', A''.

Le point A est d'autre part un point multiple isolé de la surface Φ. Nous supposerons dans ce qui va suivre que le point A est ce que nous avons appelé un point uni symétrique de l'involution I_p; ce point est alors un point double biplanaire de la surface Φ auquel sont infiniment voisins successifs $q-1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, q étant défini par $p = 2q + 1$.

On sait qu'au point de vue des transformations birationnelles, le point A est équivalent, sur la surface Φ, à un ensemble de $2q = p-1$ courbes rationnelles de degré -2,

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q, \delta_q, \ldots, \delta_2, \delta_1,$$

chacune de ces courbes rencontrant en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontrant pas les autres.

Rappelons maintenant les propriétés que nous avons établies antérieurement au sujet des points unis symétriques [2].

Les courbes C_p passant par A, courbes que nous désignerons par C_p', ont un point double en A, les tangentes étant les droites $t_1 = AA'$ et $t_2 = AA''$. Il leur correspond, sur Φ, les courbes

$$\Gamma_p' \equiv \Gamma_p - (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_q + \delta_q + \ldots + \delta_1).$$

Les courbes C_p', assujetties à toucher en A une droite distincte des droites t_1, t_2, courbes que nous désignerons par C_p'', ont un point quadruple en A, deux des tangentes étant confondues avec t_1, les deux autres avec t_2. Sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine de deux branches de même nature. A ces courbes correspondent sur Φ les courbes

$$\Gamma_p'' \equiv \Gamma_p - (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \delta_1) - (\gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \delta_2).$$

En imposant aux courbes C_p'' le contact en A avec une droite distincte de t_1, t_2, on obtient de même des courbes C_p''' ayant un point sextuple en A, trois tangentes étant confondues avec t_1, les trois autres avec t_2. A ces courbes correspondent sur Φ les courbes

[2] *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, 2e note (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1931, pp. 1131-1150.

$$\Gamma_p''' \equiv \Gamma_p - (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \delta_1) - (\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \delta_2) - (\gamma_3 + \dots + \delta_3),$$

et ainsi de suite. On parviendra finalement à des courbes $C_p^{(q+1)}$ ayant en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Les courbes $C_p^{(i)}$ $(1 \leq i \leq q)$ ont en A un point multiple d'ordre $2i$, i tangentes coïncidant avec t_1, les i autres avec t_2. Sur une de ces courbes, le point A est l'origine de deux branches de même nature. A ces courbes correspondent sur Φ les courbes

$$\Gamma_p^{(i)} \equiv \Gamma_1 - (\gamma_1 + \dots + \delta_1) - (\gamma_2 + \dots + \delta_2) -$$
$$- (\gamma_3 + \dots + \delta_3) - \dots - (\gamma_i + \dots + \delta_i).$$

En particulier, aux courbes $C_p^{(q)}$ correspondent sur Φ les courbes

$$\Gamma_p^{(q)} \equiv \Gamma_1 - (\gamma_1 + \dots + \delta_1) - \dots - (\gamma_q + \delta_q).$$

Aux courbes $C_p^{(q+1)}$ correspondent sur Φ des courbes appartenant au système précédent, mais ayant un point-base simple : le point commun aux courbes γ_q et δ_q.

Les hyperplans de S_r passant par les espaces $S^{(2)}, S^{(3)}, \dots, S^{(p)}$ découpent sur F les courbes C_1, ayant un point simple en A et y touchant la droite t_2. Les courbes Γ_1 correspondantes rencontrent en un point la courbe δ_1 mais ne rencontrent pas les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \delta_2$. Entre les courbes Γ_1 et Γ_p, on a la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_1 + \gamma_1 + 2\gamma_2 + \dots + q\gamma_q +$$
$$+ (q+1)\delta_q + \dots + (2q-1)\delta_2 + 2q\delta_1 + \Delta_1,$$

où Δ_1 provient des autres points de diramation de la surface Φ, points par lesquels passent nécessairement les courbes Γ_1.

De même, les hyperplans passant par les espaces $S^{(1)}, \dots, S^{(p-2)}, S^{(p)}$ découpent sur F les courbes C_{p-1} ayant un point simple en A et y touchant la droite t_1. Les courbes Γ_{p-1} rencontrent en un point la courbe γ_1, mais ne rencontrent pas les autres courbes du domaine de A sur Φ. On a

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_{p-1} + 2q\gamma_1 + (2q-1)\gamma_2 + \dots + 2\delta_2 + \delta_1 + \Delta_{p-1},$$

Δ_{p-1} étant un terme provenant des autres points de diramation de la surface Φ.

Nous allons déterminer le comportement en A des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{p-2}$.

3. Les courbes du système

$$|D| = |2C|,$$

qui est transformé en lui-même par T, se comportent au point A comme les courbes du système $|C|$. Le système $|D|$ contient p systèmes linéaires partiels

$$|D_1| = |C_1 + C_p|, |D_2| = |C_2 + C_p|, \ldots,$$
$$|D_{p-1}| = |C_{p-1} + C_p|, |D_p| = |2C_p|,$$

composés au moyen de l'involution I_p et dont les courbes se comportent au point A comme les courbes des systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$, $|C_p|$ respectivement.

Les courbes $C_1 + C_{p-1}$ doivent appartenir à un des systèmes précédents; elles appartiennent précisément au système $|D_p|$ et constituent le système $|D_p'|$ des courbes du système précédent assujetties à passer par A. D'après les relations fonctionnelles établies précédenment, on a d'ailleurs

$$2p\Gamma_p \equiv p(\Gamma_1 + \Gamma_{p-1}) + p(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_q + \delta_q + \ldots + \delta_1) +$$
$$+ \Delta_1 + \Delta_{p-1}.$$

Considérons les courbes $|2C_1|$; elles ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec t_2; elles appartiennent nécessairement à l'un des systèmes $|D_2|, |D_3|, \ldots, |D_{p-2}|$. Par conséquent, il y a un des systèmes $|C_2|, C_3|, \ldots, |C_{p-2}|$ dont les courbes ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec t_2; supposons que ce soit $|C_2|$.

De même, il existe un des système $|C_3|, |C_4|, \ldots, |C_{p-2}|$ dont les courbes ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec t_1; supposons que ce soit $|C_{p-2}|$. Les courbes $C_2 + C_{p-2}$ ont en A un point quadruple, deux tangentes étant confondues avec t_1, les deux autres avec t_2; ces courbes appartiennent au système $|D_p|$ et sont précisément, en adoptant pour les courbes D les mêmes notations que pour les courbes C, des courbes D_p''. Celles-ci se comportent en A comme les courbes C_p''. Il en résulte que les courbes $\Gamma_2 + \Gamma_{p-2}$ de la surface Φ se comportent en A comme les courbes Γ_p''. Or, celles-ci rencontrent en un point chacune des courbes γ_2, δ_2, mais ne rencontrent pas les autres courbes du voisinage de A sur la surface Φ. Il faut donc que les courbes Γ_2 rencontrent en un point une des courbes γ_2, δ_2, par exemple δ_2, les courbes Γ_{p-2} rencontrant en un point la courbe γ_2. Il est aisé de former les relations fonctionnelles auxquelles doivent satisfaire les courbes Γ_2, Γ_{p-2} sur la surface Φ, en se souvenant que ces courbes, comptées p fois, appartiennent, à des composantes des points de diramation prés, au système $|p\Gamma_p|$. On trouve précisément

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_2 + 2[\gamma_1 + 2\gamma_2 + \dots + q\gamma_q + (q+1)\delta_q + \dots + (2q-1)\delta_2] + \\ + (2q-1)\delta_1 + \Delta_2$$

et

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_{p-2} + (2q-1)\gamma_1 + \\ + 2[(2q-1)\gamma_2 + (2q-2)\gamma_3 + \dots + 2\delta_2 + \delta_1] + \Delta_{p-2},$$

Δ_2 et Δ_{p-2} provenant de la présence des autres points de diramation de la surface Φ.

On vérifie d'ailleurs que les courbes $\Gamma_2 + \Gamma_{p-2}$ ont en A le même comportement que les courbes Γ_2''.

4. Les courbes $C_1 + C_2$ ont un point triple en A, les trois tangentes coïncident avec t_2. Ces courbes ne peuvent donc appartenir à l'un des systèmes $|D_1|$, $|D_2|$, $|D_{p-2}|$, $|D_{p-1}|$. Supposons, pour fixer les idées, qu'elles appartiennent au système $|D_3|$. De même, nous pouvons supposer que les courbes $C_{p-2} + C_{p-1}$, qui ont un point triple en A — les trois tangentes coïncident avec t_1 — appartiennent au système $|D_{p-3}|$. Les courbes C_3 ont le même comportement en A que les courbes D_3 et les courbes C_{p-3}, le même que les courbes D_{p-3}, par conséquent $C_3 + C_{p-3}$ appartiennent au système D_p''' et ont le même comportement en A que les courbes C_p'''. Or, à ces courbes correspondent sur Φ les courbes Γ_p''', rencontrant en un point les courbes γ_3, et δ_3, mais ne rencontrent pas les autres courbes de l'entourage du point A sur Φ. On est donc conduit à la conclusion suivante : les courbes Γ_3 rencontrent en un point la courbe γ_3 ou la courbe δ_3, par exemple la seconde, et les courbes Γ_{p-3} rencontrent en un point la courbe γ_3. Il en résulte les relations fonctionnelles

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_3 + 3[\gamma_1 + 2\gamma_2 + \dots + q\gamma_q + (q+1)\delta_q + \dots + \\ + (2q-3)\delta_4 + (2q-2)\delta_3] + (2q-2)(2\delta_2 + \delta_1) + \Delta_3,$$

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_{p-3} + (2q-2)(\gamma_1 + 2\gamma_2) + \\ + 3[(2q-2)\gamma_3 + \dots + (q+1)\gamma_q + q\delta_q + \dots + \delta_1] + \Delta_{p-3},$$

Δ_3 et Δ_{p-3} provenant des autres points de diramation de Φ.

La considération des courbes $2C_2$ et $2C_{p-2}$ conduira ensuite aux courbes C_4 et C_{p-4}, ayant des points quadruples en A, les tangentes étant confondues avec t_2 pour les courbes C_4, avec t_1 pour les courbes C_{p-4}. On considérera ensuite les courbes $C_2 + C_3$, $C_{p-2} + C_{p-3}$, qui conduiront aux courbes C_5 et C_{p-5}, ayant des points quintuples en A, et ainsi de suite.

5. D'une manière générale, les courbes C_k $(k \leq q)$ auront en A la multiplicité k, les k tangentes étant confondues avec t_2 et les courbes C_{p-k} auront aussi la multiplicité k en A, les k tangentes étant confondues avec t_1. Les courbes Γ_k rencontrent en un point la courbe δ_k et les courbes Γ_{p-k} en un point la courbe γ_k, mais ne rencontrent pas les autres courbes du domaine de A sur Φ.

Les courbes Γ_k sont liées aux courbes Γ_p par une relation fonctionnelle

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_k + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \ldots + \lambda_q\gamma_q + \mu_q\delta_q + \ldots + \mu_1\delta_1 + \Delta_k,$$

les λ et les μ étant des entiers, Δ_k provenant des autres points de diramation de Φ.

En exprimant que les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \delta_{k+1}$ ne rencontrent pas les courbes Γ_k, on a

$$-2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{q-1} - 2\lambda_q + \mu_q = 0,$$
$$\lambda_q - 2\mu_q + \mu_{q-1} = 0, \quad \ldots, \quad \mu_{k+2} - 2\mu_{k+1} + \mu_k = 0.$$

On en déduit

$$\lambda_2 = 2\lambda_1, \lambda_3 = 3\lambda_1, \ldots, \lambda_q = q\lambda_1\ \mu_q = (q+1)\lambda_1, \ldots, \mu_k = (2q-k+1)\lambda_1.$$

En exprimant de même que les courbes $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}$ ne rencontrent pas les courbes Γ_k, on a

$$-2\mu_1 + \mu_2 = 0, \mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 = 0, \ldots, \mu_{k-2} - 2\mu_{k-1} + \mu_k = 0,$$

d'où

$$\mu_2 = 2\mu_1, \ \mu_3 = 3\mu_1, \ldots, \mu_k = k\mu_1.$$

Enfin, en exprimant que la courbe δ_k rencontre les courbes Γ_k en un point, on a

$$\mu_{k-1} - 2\mu_k + \mu_{k+1} + p = 0.$$

On déduit de ce qui précède les relations

$$(2q-k+2)\lambda_1-(k-1)\mu_1=p, \qquad (2q-k+1)\lambda_1=k\mu_1,$$

d'où $\lambda_1=k$, $\mu_1=2q-k+1$. On a donc

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_k + k[\gamma_1+2\gamma_2+\ldots+(2q-k+1)\delta_h]+$$
$$+(2q-k+1)[\delta_1+2\delta_2+\ldots+(k-1)\delta_{k-1}]+\Delta_k.$$

De même, on trouvera

$$p\Gamma_p \equiv p\Gamma_{p-k}+(2q-k+1)[\gamma_1+2\gamma_2+\ldots+(k-1)\gamma_{k-1}]$$
$$+k[\delta_1+2\delta_2+\ldots+(2q-k+1)\gamma_k]+\Delta_{p-k},$$

Δ_{p-k} provenant des autres points de diramation de Φ.

6. Nous allons faire une application des résultats précédents aux involutions du septième ordre et de genres un ($p_a=P_4=1$) appartenant à une surface de genres un ($p_a=P_4=1$). Les surfaces F et Φ sont donc actuellement supposées de genres un et on sait que sur une telle surface, tout système linéaire complet de genre π a la dimension π et le degré $n=2\pi-2$; il est de plus son propre adjoint. Dans le cas actuel, l'involution I_7 d'ordre sept appartenant à la surface F, involution dont nous avons prouvé l'existence en construisant un exemple [3], possède trois points unis. Ces points unis sont nécessairement des points unis symétriques, car la surface Φ, de genres un, ne peut posséder de points de multiplicité supérieure à deux (ni de tacnodes).

Nous allons tout d'abord déterminer le genre des systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_6|$, le système $|\Gamma_7|$ ètant de genre π. Observons tout d'abord que les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ rencontrent une courbe Γ_7 suivant des groupes de $n=2\pi-2$ points qui ne peuvent être des groupes canoniques de cette courbe, puisque $|\Gamma_7|$ est son propre adjoint. Les dimensions et par suite les genres $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6$ des systèmes envisagés sont donc au plus égaux à $\pi-2$.

D'autre part, les axes $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(7)}$ de l'homographie T ont les dimensions $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi$ et on a actuellement $r=7\pi-6$. On a donc, d'après la théorie des homographies,

$$\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_6+\pi+7=7\pi-6+1,$$

d'où

[3] *Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1935, pp. 345-353).

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_6 = 6(\pi - 2).$$

Par conséquent,

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_6 = \pi - 2.$$

Envisageons par exemple le système $|\Gamma_1|$; sa dimension et son genre étant égaux à $\pi - 2$, il est de degré $2\pi - 6$ et par suite le système $|C_1|$ est de degré effectif $14\pi - 42$. D'autre part, le degré virtuel de $|C_1|$ est égal à celui de $|C|$, c'est-à-dire à $14\pi - 14$. Les points unis A_1, A_2, A_3 de I_7, qui sont les points-base de $|C_1|$, doivent donc absorber 28 points d'intersection de deux courbes C_1.

Des résultats que nous avons obtenus antérieurement [1] et de la construction des systèmes $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_6|$ donnée dans ce travail, il résulte que :

1) Si les courbes C_1 ont un point simple en un point uni, elles ont en commun cinq points fixes infiniment voisins successifs de ce point uni.

2) Si les courbes C_1 ont un point double en un point uni, elles ont en commun trois points fixes infiniment voisins successifs dont le premier est double et les deux suivants simples.

3) Si les courbes C_1 ont un point triple en un point uni, elles ont encore trois points simples fixes infiniment voisins successifs.

Le point uni absorbera donc, suivant les cas, 6, 10 ou 12 points d'intersection de deux courbes C_1. Il en résulte que les courbes C_1 ont nécessairement des comportements différents aux trois points unis de I_7. Par exemple, ces courbes passeront simplement par A_1 doublement par A_2 et triplement par A_3.

Si nous désignons par $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \gamma_3^i, \delta_3^i, \delta_2^i, \delta_1^i$ les composantes rationnelles du point de diramation A_i de la surface Φ, nous aurons la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned}7\Gamma_7 \equiv 7\Gamma_1 &+ \gamma_1' + 2\gamma_2' + 3\gamma_3' + 4\delta_3' + 5\delta_2' + 6\delta_1' + \\ &+ 2[\gamma_1'' + 2\gamma_2'' + 3\gamma_3'' + 4\delta_3'' + 5\delta_2''] + 5\delta_1'' + \\ &+ 3[\gamma_1''' + 2\gamma_2''' + 3\gamma_3''' + 4\delta_3'''] + 4[2\delta_2''' + \delta_1'''].\end{aligned}$$

Il ne serait pas difficile, mais un peu long, de déterminer les relations fonctionnelles auxquelles doivent satisfaire les courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_6$; nous ne nous y arrêterons pas.

[1] *Recherches..., loc. cit.* [2].

Liège (Université), le 11 novembre 1939.