Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 42e année, n° 9-10, 1973, pp. 397-401

CONSTRUCTION D'UNE SURFACE DONT LE SYSTÈME CANONIQUE APPARTIENT A UNE INVOLUTION

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société.

On connaît plusieurs exemples de surfaces algébriques dont le systéme canonique est composé au moyen d'une involution. Dans cette note, nous construisons un exemple très simple d'une surface possédant la même propriété.

Nous aurons à utiliser certaines propriétés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous renvoyons pour ces propriétés à notre ouvrage sur ces questions (*).

1. Dénotons par $f_{h.k}$ une forme algébrique de degré h en x_1, x_2 dont les coefficients sont des formes algébriques de degré k en x_3, x_4. Considérons la surface F d'équation

$$f_{2p.0} + f_{p.p} + f_{0.2p} = 0,$$

où p est un nombre premier supérieur à deux. Elle est d'ordre $2p$ et transformée en elle-même par l'homographie biaxiale H d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Sur la surface F, l'homographie H engendre une involution cyclique I possédant $4p$ points unis, points de recontre de la surface F avec les axes $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = x_4 = 0$ de l'homographie.

Si P est un point uni appartenant par exemple à la droite $x_1 = x_2 = 0$, le plan tangent à F en ce point passe par la droite $x_3 = x_4 = 0$. Dans ce plan, H détermine une homologie de centre P et par conséquent ce point est uni de première espèce pour l'involution I.

L'involution I possède $4p$ points unis de première espèce.

2. Pour obtenir une surface Φ image de l'involution I, rapportons projectivement les surfaces d'ordre p, transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes de l'homographie H aux hyperplans d'un espace S_{2p+1} à $2p + 1$ dimensions, c'est-à-dire les surfaces d'équation

$$f_{p.0} + f_{0.p} = 0.$$

Manuscrit reçu le 20-9-73.
(*) *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

Dans ce but, posons

$$Y_0 = x_1^p,\ Y_1 = x_1^{p-1}x_2,\ \ldots,\ Y_p = x_2^p$$
$$Z_0 = x_3^p,\ Z_1 = x_3^{p-1}x_4,\ \ldots,\ Z_p = x_4^p,$$

ces quantités étant prises pour coordonnées des points de S_{2p+1}.

L'élimination des x nous donne les équations de deux courbes rationnelles normales d'ordre p, K_1, K_2, d'équations respectives

$$\left\| \begin{matrix} Y_0 & Y_1 & \ldots & Y_{p-1} \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_p \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (K_1)$$

$$\left\| \begin{matrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{p-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_p \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (K_2)$$

Ces courbes appartiennent à des espaces à p dimensions de S_{2p+1} qui ne se rencontrent pas.

Dans l'espace des x, H engendre une involution d'ordre p et aux groupes de cette involution correspondent dans S_{2p+1} les points d'une variété W, lieu des droites s'appuyant sur les courbes K_1, K_2. Aux droites s'appuyant sur les axes de l'homographie H correspondent les droites s'appuyant sur les courbes K_1, K_2. La variété W est d'ordre p^2 et passe p fois par les courbes K_1, K_2.

Observons que la forme $f_{2p.0}$ se transforme en une forme du second degré en Y et que la forme $f_{p.p}$ se transforme en une forme bilinéaire en Y et Z. Dénotons par $\varphi_{h.k}$ une forme algébrique d'ordre h en Y dont les coefficients sont des formes algébriques d'ordre k en Z. A l'équation de la surface F correspond une équation

$$\varphi_{2.0} + \varphi_{1.1} + \varphi_{0.2} = 0$$

d'une hyperquadrique Q de S_{2p+1} et la surface Φ est l'intersection de la variété W et de cette hyperquadrique. C'est une surface d'ordre $2p^2$.

Les points de rencontre de l'hyperquadrique Q avec les courbes K_1, K_3 sont les points de diramation de la correspondance $(1, p)$ entre les surfaces Φ et F. Ce sont des points multiples d'ordre p pour la surface Φ et si P' est un de ces points appartenant à la courbe K_1 par exemple, le cône tangent à Φ en ce point est le cône projetant la courbe K_2, c'est-à-dire un cône tangent rationnel, conformément à la théorie.

3. Les courbes canoniques de la surface F sont découpées par les surfaces d'ordre $2p - 4$ et la surface F étant d'autre part régulière, ses genres sont

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(2p-1)(2p-2)(2p-3).$$

Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de Φ, nous avons établi la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + 4p(p-1)(p-5).$$

La surface Φ étant régulière comme la surface F, on en déduit

$$p'_a = p'_g = (p-1)^2.$$

4. Un plan passant par la droite $x_1 = x_2 = 0$ coupe F suivant une courbe d'ordre $2p$ possédant $2p$ points unis situés sur la droite $x_1 = x_2 = 0$. Il lui correspond sur la surface Φ une courbe γ_1 qui, d'après la formule de Zeuthen, a le

genre $p-1$. Cette courbe γ_1 est découpée sur Φ par le cône projetant K_1 d'un point de K_2. Elle engendre donc un faisceau de degré zéro.

Observons que si le plan considéré coupe la droite $x_3 = x_4 = 0$ en un point uni P, la courbe section possède un point multiple d'ordre p en P et par conséquent la courbe section contient $3p$ points unis. La courbe correspondante sur Φ est rationnelle. Le faisceau $|\gamma_1|$ contient donc $2p$ courbes rationnelles.

De même, à une courbe section de F par un plan passant par la droite $x_3 = x_4$ correspond sur Φ une courbe γ_2 de genre $p-1$, engendrant un faisceau qui contient $2p$ courbes rationnelles. Une courbe γ_2 est la section de Φ par un cône projetant la courbe K_2 d'un point de K_1.

Un point de diramation de la surface Φ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré virtuel $-p$. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$ les courbes équivalentes aux $2p$ points de diramation de Φ situés sur K_1 et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p}$ celles qui sont équivalentes aux $2p$ points de diramation de Φ situés sur K_2.

Parmi les surfaces d'ordre $2p-4$ transformées en elles-mêmes par H se trouvent les surfaces

$$f_{2p-4.0},\ f_{0.2p-4} = 0$$

et les surfaces ψ passant $p-2$ fois par les points unis de l'involution I, c'est-à-dire par les axes de l'homographie H, qui découpent sur F les transformées des courbes canoniques de Φ. Les deux premières se réduisent à $2p-4$ plans passant par $x_1 = x_2 = 0$ ou par $x_3 = x_4 = 0$.

A la section de F par une surface d'ordre $2p-4$ quelconque correspond sur Φ une courbe γ qui appartient totalement à un système linéaire $|\gamma|$.

Faisons tendre d'une manière continue la surface d'ordre $2p-4$ vers une surface du premier système. La courbe γ se réduit à une courbe γ_1 comptée $2p$ fois, augmentée des courbes de diramation homologues des points situés sur K_1. On a donc

$$\gamma \equiv 2p\gamma_1 + 2\Sigma\alpha.$$

On trouve de même

$$\gamma \equiv 2p\gamma_2 + 2\Sigma\beta.$$

Faisons tendre continuement la surface d'ordre $2p-4$ vers une surface ψ et appelons γ_0 les courbes canoniques de la surface Φ. La courbe γ tend vers une courbe γ_0 comptée p fois, augmentée d'un certain nombre de fois les courbes de diramation et on a

$$\gamma \equiv p\gamma_0 + \lambda\Sigma\alpha + \mu\Sigma\beta.$$

Une courbe α ou une courbe β ne rencontre pas une courbe γ, il en résulte que l'on a $\lambda = \mu = p-2$. Par conséquent, on a finalement

$$|\, 2p\gamma_1 + 2\Sigma\alpha \,| = |\, p\gamma_0 + (p-2)(\Sigma\alpha + \Sigma\beta) \,| = |\, 2p\gamma_2 + 2\Sigma\beta \,|.$$

En considérant les courbes qui correspondent sur Φ aux sections planes de ,
on arriverait de même à la relation fonctionnelle

$$|\, p\gamma_1 + \Sigma\alpha \,| = |\, p\gamma_2 + \Sigma\beta \,|.$$

5. La quadrique

$$f_{1.1} = \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_3 + \lambda_3 x_1 x_4 + \lambda_4 x_2 x_4 = 0$$

passe par les axes de l'homographie H et par conséquent la surface

$$(\lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_2 + \lambda_3 x_1 x_4 + \lambda_4 x_2 x_4)^{p-2} = 0$$

passe $p - 2$ fois par ces axes. C'est donc une surface ψ.

On en conclut que si l'on effectue sur l'équation d'une surface ψ l'homographie H, elle se reproduit multipliée par ε^{p-2}. L'équation des surfaces ψ est donc de la forme

$$f_{p-2.p-2} = 0$$

et contient $p'_g = (p-1)^2$ termes.

Si l'on élève les deux membres de l'équation précédente à la puissance p, on obtient une équation

$$\varphi_{p-2.p-2} = 0,$$

équation d'une hypersurface Ψ qui coupe Φ suivant une courbe γ_0 comptée p fois. Les courbes canoniques γ_0 de la surface Φ sont donc les courbes suivant lesquelles les surfaces Ψ ont avec Φ un contact d'ordre $p - 1$.

Deux surfaces ψ ont en commun en dehors des axes de l'homographie H une courbe d'ordre $2(p-2)^2$. Par un point de cette courbe passe une droite s'appuyant sur les axes de l'homographie. H Cette droite rencontre donc les surfaces ψ en $2(p-2) + 1$ points et appartient à ces surfaces. On en conclut que deux surfaces ψ ont en commun $2(p-2)^2$ droites s'appuyant sur les axes de l'homographie H. Ces droites rencontrent la surface F en $4(p-2)^2$ groupes de l'involution I et par suite le genre linéaire de la surface Φ est $p^{(1)} = 4(p-2)^2 + 1$.

6. Soient g une droite s'appuyant sur les axes de l'homographie H et g' la droite de la variété W qui lui correspond. La droite g rencontre F en deux groupes de l'involution I et par conséquent la droite g' rencontre Φ en deux points en dehors des courbes K_1, K_2. Comme la droite g' appartient à la variété W, ces deux points sont les points de rencontre de g' avec l'hyperquadrique Q.

Ces couples de points forment une involution J, car par un point de la surface Φ passe une seule droite de la variété W.

Soient A' un point de g' et A le groupe de l'involution I qui lui correspond sur la droite g. Les surfaces ψ passant par un point de A contiennent ce groupe et la droite g. Par conséquent, ces surfaces ψ contiennent également le second groupe de I appartenant à F sur g. On en conclut que les courbes canoniques γ_0 de Φ qui passent par un point de la surface Φ passent également par le second point du groupe de J auquel appartient A'. En d'autres termes, le système canonique $|\gamma_0|$ de Φ est composé au moyen de l'involution J.

Les droites de la variété W *rencontrent l'hyperquadrique* Q *est des couples de points formant une involution* J *au moyen de laquelle est composé le système canonique* $|\gamma_0|$ *de* Φ.

Si Y est un point de K_1 et Z un point de K_2, un point de la droite YZ a pour coordonnées $Y + \lambda Z$ et les points de rencontre de cette droite avec Q sont donnés par

$$\varphi_{2.0}(Y) + \lambda\varphi_{1.1}(Y, Z) + \lambda^2\varphi_{0.2}(Z) = 0.$$

La courbe unie de l'involution J est donc donnée par l'intersection de Φ avec l'hypersurface

$$\varphi_{1.1}^2 - 4\varphi_{2.0}\varphi_{0.2} = 0.$$

7. Nous avons vu que l'équation

$$(\lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_1 x_4 + \lambda_3 x_2 x_3 + \lambda_4 x_2 x_4)^{p-1} = 0$$

appartenait à une surface ψ. Si on suppose que les coefficients de cette équation développée sont des nombres quelconques, on obtient l'équation $f_{p-2.p-2} = 0$, en remarquant que dans cette équation, il y a $\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)$ termes qui se présentent deux fois. On a en effet par exemple

$$x_1 x_3 (x_2 x_4)^{p-3} = x_1 x_4^{p-3} . x_3 x_2^{p-3}.$$

Posons

$$X_{13} = x_1 x_3, \quad X_{14} = x_1 x_4, \quad X_{23} = x_2 x_3, \quad X_{24} = x_2 x_4.$$

On a

$$X_{13} X_{24} - X_{14} X_{23} = 0 \tag{1}$$

et aux points de cette quadrique correspondent les $4p(p-2)^2$ points communs à deux courbes de F homologues de deux courbes γ_0 de Φ. Ces groupes forment une involution et il leur correspond sur la surface Φ des groupes de $2(p-2)^2$ points appartenant aux systèmes caractéristiques du système $|\gamma_0|$. On voit donc que le système canonique $|\gamma_0|$ de Φ appartient à deux involutions : l'involution J d'ordre deux et une involution J' d'ordre $(p-2)^2$.

Le système canonique $|\gamma_0|$ *de la surface* Φ *appartient à deux involutions : l'une* J *du second ordre et l'autre* J' *d'ordre* $(p-2)^2$, *l'involution* J *faisant correspondre à un groupe de* J' *un groupe de* J'. *La surface* Φ *est birationnellement équivalente à une quadrique multiple d'ordre* $2(p-2)^2$, *les courbes* γ_0 *correspondant aux sections de cette quadrique par des surfaces d'ordre* $p-2$.

Liège, le 5 septembre 1973.