RECHERCHES SUR LES SURFACES NON RATIONNELLES DE GENRES GÉOMÉTRIQUE ET ARITHMÉTIQUE NULS;

Par Lucien **GODEAUX**,

(Liège).

Depuis que Castelnuovo a, en 1896, donné les conditions de rationalité d'une surface algébrique ($p_a = P_2 = 0$), la question de déterminer les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls reste posée. Il s'agit de déterminer les surfaces régulières, dépourvues de courbe canonique, mais possédant des courbes bicanoniques. Plusieurs exemples ont été construits par diverses méthodes (1), mais les résultats généraux manquent. Tout au plus avons-nous pu démontrer, en utilisant une formule de Picard, que le genre linéaire de ces surfaces était au plus égal à 10 (2).

Nous avons repris récemment la question et cherché à déterminer les surfaces de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un système bicanonique irréductible. Nous avons réussi à établir une propriété générale de ces surfaces dans le cas où le genre linéaire est au plus égal à 5 (3). Dans ce travail, nous considérons le cas où le genre linéaire est quelconque (compris entre 3 et 10). Nous établissons le théorème suivant :

Si une surface algébrique F *de genres* $p_a = p_g = 0$ *possède un système bicanonique irréductible de dimension* $P_2 - 1 \geqq 2$, *il*

(1) On en trouvera la bibliographie dans notre exposé : *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Act. scient.*, n° 123, Hermann, Paris, 1934).

(2) *Les surfaces...* (*loc. cit.*).

(3) *Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles* (*J. Math. pures et appl.*, t. 39, 1960, p. 221-230).

existe sur la surface une courbe isolée Γ *de genre* P_2 *telle que les systèmes bicanonique, tricanonique, tétracanonique, etc. soient*

$$|2\Gamma|, \quad |\Gamma+\Gamma'|, \quad |2\Gamma'|, \quad \ldots$$

sans que Γ *soit une courbe canonique.*

Le procédé utilisé consiste à montrer qu'il existe au moins une courbe octocanonique qui est à la fois formée de deux courbes tétracanoniques et d'une courbe pentacanonique jointe à une courbe tricanonique.

Nous démontrons ensuite le théorème suivant :

La surface F *est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface régulière possédant une seule courbe canonique de genre* $2P_2-1$.

Il reste à montrer qu'il existe effectivement des surfaces répondant aux conditions précédentes. Nous avons pu construire un exemple où l'on a $P_2=3$ ([4]).

Il est curieux de constater que le théorème établi ici n'est plus applicable aux surfaces pour lesquelles $P_2=1$ ou 2, comme nous l'avons montré ailleurs ([5]).

1. Soit F une surface algèbrique régulière dépourvue de courbe canonique, mais possédant un système bicanonique irréductible.

([4]) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1949, p. 688-693). Les résultats du Mémoire actuel ont été communiqués à l'Académie royale de Belgique en avril 1959, février et octobre 1960, novembre 1961.

([5]) *Voir* nos Notes : *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe bicanonique effective* (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1958, p. 809-819); *Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (*Ibid.*, 1958, p. 739-749 et 942-944). Nous avons montré que ces dernières surfaces étaient images d'involutions du cinquième ordre privées de points unis. Ajoutons que M. Burniat a construit récemment des surfaces de genres $p_a=p_g=0$ par d'autres procédés, dans un travail : *Surfaces algébriques régulières de genre géométrique* $p_g=0, 1, 2, 3$ *et de genre linéaire* $p^{(1)}=3, 4, \ldots, 8p_g+7$ (*Troisième Colloque de Géométrie algébrique du C. B. R. M.*, tenu à Bruxelles en 1959; Librairie Universitaire, Louvain, et Gauthier-Villars, Paris, 1960).

Cette surface a les genres $p_a = p_g = 0$ et nous supposerons que le système bicanonique a au moins la dimension 2. On sait que le genre linéaire de la surface F est $p^{(1)} = P_2$; pour la simplicité des formules à écrire, nous le représenterons par π. Rappelons qu'on a $P_2 = \pi \leqq 10$.

Nous désignerons par

$$|C_2|, \quad |C_3|, \quad |C_4|, \quad \ldots, \quad |C_i|, \quad \ldots$$

les systèmes bicanonique, tricanonique, tétracanonique, ..., i-canonique, ... de F.

Les degrés de ces systèmes sont respectivement

$$4(\pi-1), \quad 9(\pi-1), \quad 16(\pi-1), \quad \ldots, \quad i^2(\pi-1), \quad \ldots;$$

leurs genres,

$$3\pi-2, \quad 6\pi-5, \quad 10\pi-9, \quad \ldots, \quad \frac{1}{3}i(i+1)(\pi-1)+1, \quad \ldots,$$

et leurs dimensions,

$$P_2-1=\pi-1, \qquad P_3-1=3\pi-2, \qquad P_4-1=6\pi-6, \quad \ldots,$$
$$P_i-1=\frac{1}{2}i(i-1)(\pi-1), \qquad \ldots.$$

2. Prenons comme modèle projectif de la surface F la surface F_4 de l'espace S_r, où $r = 6\pi - 6$, dont les sections hyperplanes sont les courbes tétracanoniques C_4. Cette surface est irréductible puisque, par hypothèse, le système bicanonique $|C_2|$ est irréductible, et qu'il en est de même du système $|C_4| = |2C_2|$.

La surface F_4 est d'ordre $16(\pi-1)$ et ses sections hyperplanes ont le genre $10\pi - 9$.

Les hyperquadriques V^2_{r-1} de S_r linéairement indépendantes sont au nombre de $(3\pi-2)(6\pi-5)$. Celles qui ne contiennent pas F_4 découpent sur cette surface des courbes octocanoniques C_8. Le système $|C_8|$ ayant la dimension $28(\pi-1)$, on en conclut qu'il y a au moins $(\pi-1)(18\pi-37)$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant F_4.

Supposons qu'il y en ait $(\pi-1)(18\pi-37)+\delta$ contenant F_4. Il y a alors dans $|C_8|$, $\infty^{\delta-1}$ courbes qui ne sont pas découpées sur la surface par des hyperquadriques. Nous les désignerons par $\overline{C}_8$.

Sur F_4, une courbe tricanonique C_3 est d'ordre $12(\pi-1)$ et ses sections hyperplanes forment sa série canonique. Le genre de cette courbe est $6\pi-5$.

Les hyperquadriques linéairement indépendantes passant par une courbe C_3 sont au nombre de $18\pi^2-35\pi+25$. Il y a donc $10\pi-\varphi-\delta$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant une courbe C_3 sans contenir la surface F_4.

Une hyperquadrique passant par C_3 mais non par F_4, découpe sur cette surface une courbe pentacanonique C_5. Le nombre des courbes C_5 linéairement indépendantes étant $10(\pi-1)$, il existe, sur la surface F_4, $\infty^{\delta-1}$ courbes C_5 qui ne sont pas découpées par une hyperquadrique passant par C_3 mais non par F_4. Nous les désignerons par $\overline{C}_5$.

Une courbe $C_3+\overline{C}_5$ ne peut se trouver sur une hyperquadrique (ne passant pas par F_4), c'est donc une courbe $\overline{C}_8$.

Cette conclusion nous conduit à une absurdité, car quelle que soit la courbe C_3 dont on part, on retrouve le même système $|\overline{C}_5|$ et comme la dimension de $|C_3|$ est $P_3-1=3(\pi-1)$, on trouverait plus de $\infty^{\delta-1}$ courbes $\overline{C}_8$, ce qui est absurde.

Le système $|C_8|$ complet est donc découpé sur F_4 par les hyperquadriques de S_r (ne contenant pas la surface). Le système $|C_5|$ complet est découpé sur la surface par les hyperquadriques contenant une courbe C_3.

3. Nous allons maintenant établir qu'il existe au moins une courbe octocanonique qui soit formée, d'une part, de deux courbes tétracanoniques et, d'autre part, d'une courbe tricanonique et d'une courbe pentacanonique non dégénérée en une courbe bicanonique et une courbe tricanonique.

Observons tout d'abord que, parmi les courbes pentacanoniques C_5, il existe des courbes formées d'une courbe bicanonique et d'une courbe tricanonique. Ces courbes dégénérées forment un système de dimension $4(\pi-1)$ et comme la dimension de $|C_5|$ est $10(\pi-1)$, il existe un système de dimension $6(\pi-1)$

de courbes C_5 non dégénérées en des courbes C_2 et C_3. Nous désignerons ces courbes par C_5^+.

Dans le système $|C_8|$, il existe des courbes formées de deux courbes tétracanoniques C_4, elles forment un système Σ_1 de dimension $12(\pi-1)$.

Le même système $|C_8|$ contient des courbes formées d'une courbe C_3 et d'une courbe C_5^+, elles forment un système Σ_2 de dimension $9(\pi-1)-1$.

Enfin, parmi les courbes C_8, il en est qui sont formées de deux courbes tricanoniques C_3 et d'une courbe bicanonique C_2; elles forment un système de dimension $7(\pi-1)$ et, par conséquent, les courbes C_8 n'appartenant pas à ce système et que nous désignerons par C_8^+ forment un système de dimension $21(\pi-1)-1$.

Les courbes des systèmes Σ_1, Σ_2 appartiennent au système des courbes C_8^+. Comme on a

$$16(\pi-1)+9(\pi-1)-1=21(\pi-1)-1,$$

les systèmes Σ_1, Σ_2 ont au moins une courbe commune.

Il existe donc une courbe octocanonique C_8^+ formée, d'une part, par deux courbes tétracanoniques C_4 et d'autre part, d'une courbe C_3 et d'une courbe C_5^+.

4. Pour qu'une courbe C_8 coïncide, d'une part, avec une courbe C_4+C_4 et, d'autre part, avec une courbe $C_3+C_5^+$, il faut que C_3 dégénère en deux courbes Γ_1, Γ_2 et la courbe C_5^+ en deux courbes X_1, X_2, de telle sorte que les courbes Γ_1+X_1, Γ_2+X_2 soient des courbes C_4. On a donc

$$C_3\equiv\Gamma_1+\Gamma_2,\qquad C_5^+\equiv C_5\equiv X_1+X_2,\qquad C_4\equiv\Gamma_1+X_1\equiv\Gamma_2+X_2.$$

Le système $|C_4|$ étant l'adjoint à $|C_3|$, on a

$$C_4\equiv\Gamma_1+\Gamma'_2\equiv\Gamma_1+X_1\equiv\Gamma'_1+\Gamma_2\equiv\Gamma_2+X_2,$$

d'où $X_1=\Gamma'_2$, $X_2=\Gamma'_1$ et

$$|C_3|=|\Gamma_1+\Gamma_2|,\qquad |C_4|=|\Gamma_1+\Gamma'_2|=\Gamma_2+\Gamma'_1|,\qquad |C_5|=|\Gamma'_1+\Gamma'_2|.$$

5. Observons que les systèmes linéaires $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ ne sont pas nécessairement distincts. S'ils coïncident, $|\Gamma'_1|$ et $|\Gamma'_2|$ coïncident

également et l'on a, en représentant pour simplifier $\Gamma_1 = \Gamma_2$ par Γ,

$$|C_3| = |2\Gamma|, \qquad |C_4| = |\Gamma + \Gamma'|, \qquad |C_5| = |2\Gamma'|.$$

Nous allons démontrer que ce cas ne peut se présenter.

Remarquons tout d'abord que la courbe Γ ne peut appartenir à une courbe bicanonique C_2. Si, en effet, on avait $C_2 \equiv \Gamma + X$, on aurait

$$C_3 \equiv \Gamma + X' \equiv 2\Gamma, \qquad X' \equiv \Gamma$$

et

$$C_3 \equiv 2X', \qquad C_4 \equiv 2X + 2X', \qquad C_5 \equiv X + 3X'.$$

On aurait ensuite

$$|C_8| = |2C_4| = |C_3 + C_5| = |4X + 4X'| = |X + 5X'|,$$

d'où

$$|X' - X| = |2X|$$

et la surface contiendrait un système canonique, contrairement à l'hypothèse.

Cela étant, comme $C_{12} \equiv 4C_3 \equiv 3C_4$, on a

$$5\Gamma \equiv 3\Gamma'.$$

Désignons par n_1 le degré et par π_1 le genre des courbes Γ. Comme $C_3 \equiv 2\Gamma$, on a

$$2\pi_1 - 2 + n_1 = 6(\pi - 1), \qquad 4n_1 = 9(\pi - 1),$$

d'où

$$\pi = 8\varepsilon + 1, \qquad n_1 = 18\varepsilon, \qquad \pi_1 = 15\varepsilon,$$

ε étant un entier positif.

Nous avons établi que le genre linéaire de la surface F était un plus égal à 10, donc on a $\varepsilon = 1$.

Prenons pour modèle projectif de la surface F la surface F_2 dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques C_2. Elle appartient à un espace S_8 à huit dimensions, est d'ordre 32 et ses sections hyperplanes sont de genre 25.

Les hyperquadriques de S_8 découpent sur F_2 des courbes tétracanoniques C_4. Il y a 45 de ces hyperquadriques linéairement indépendantes et l'on a $P_4 = 49$; par suite, il y a au moins ∞^3 courbes tétracanoniques de F_2 qui ne sont pas découpées par des hyperquadriques. Nous les désignerons par $\overline{C}_4$.

Une courbe Γ est d'ordre 24. Les hyperquadriques découpent sur cette courbe une série linéaire d'ordre 48, non spéciale et, par conséquent, il y a ∞^{11} hyperquadriques contenant une courbe Γ.

Supposons que la surface F_2 appartienne à k hyperquadriques linéairement indépendantes. Le système $|\overline{C}_4|$ a la dimension $k+3$, et les hyperquadriques passant par une courbe Γ mais non par F_2 sont en nombre ∞^{11-k}. Elles découpent sur F_2, en dehors de Γ, les courbes Γ' adjointes à $|\Gamma|$. Le système $|\Gamma'|$ a la dimension 15, puisque F_2 est régulière. Il y a donc ∞^{3+k} courbes Γ' qui n'appartiennent pas à des hyperquadriques, désignons-les par $\overline{\Gamma}'$. Une courbe $\Gamma + \overline{\Gamma}'$ est certainement une courbe $\overline{C}_4$, quelle que soit Γ. Or, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension de $|\Gamma|$ est au moins égale à 3 et le système $|\overline{C}_4|$ devrait donc avoir la dimension $6+k$, ce qui est impossible.

Remarque. — Le raisonnement qui vient d'être fait n'est plus applicable si $\varepsilon > 1$. Dans ce cas, on parvient seulement à démontrer que les hyperquadriques découpent sur F_2 le système tétracanonique complet.

6. Les systèmes linéaires $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ sont donc nécessairement distincts. Nous désignerons par n_1, π_1, r_1 les degré, genre et dimension de $|\Gamma_1|$ et par n_2, π_2, r_2 les caractères analogues de $|\Gamma_2|$. Nous supposerons $\pi_1 \leqq \pi_2$ et enfin nous désignerons par n' le nombre de points communs à une courbe Γ_1 et à une courbe Γ_2.

Une courbe $C_4 \equiv \Gamma'_1 + \Gamma_2$ est rencontrée par une courbe Γ_1 en $2\pi_1 - 2 + n'$ points, donc une courbe C_2 rencontre une courbe Γ_1 en $\pi_1 - 1 + \frac{n'}{2}$ points. Le nombre n' est donc pair et nous poserons $n' = 2n$.

Représentons par [X, Y] le nombre de points communs à deux courbes X, Y. Nous avons

$$[C_2, \Gamma_1] = \pi_1 - 1 + n, \qquad [C_2, \Gamma_2] = \pi_2 - 1 + n.$$

On a, d'autre part,

$$C_6 \equiv 3C_2 \equiv 2C_3 \equiv 2(\Gamma_1 + \Gamma_2),$$

d'où

$$3[C_2, \Gamma_1] = 2n_1 + 4n, \qquad 3[C_2, \Gamma_2] = 2n_2 + 4n$$

et, par suite,

$$(1) \qquad 2n_1 + n = 3(\pi_1 - 1), \qquad 2n_2 + n = 3(\pi_2 - 1).$$

Enfin, en exprimant le degré et le genre de $|C_3|$, on a

$$(2) \qquad n_1 + n_2 + 4n = 9(\pi - 1),$$

$$(3) \qquad \pi_1 - 1 + \pi_2 - 1 + 2n = 6(\pi - 1).$$

7. Les courbes C_3 découpent sur une courbe Γ_1 une série linéaire complète puisque $C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2$. Cette série est d'ordre $n_1 + 2n$. Soit x sa dimension. Les courbes C_3 passant par $x+1$ points d'une courbe Γ_1 contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes Γ_2. La dimension de $|C_3|$ étant $3(\pi - 1)$ et celle de $|\Gamma_2|$, r_2, on a

$$3(\pi - 1) = x + 1 + r_2.$$

Si la dimension de la série linéaire d'ordre $n_2 + 2n$ découpée par les courbes C_3 sur une courbe Γ_2 est x', on a de même

$$3(\pi - 1) = x' + 1 + r_1.$$

Supposons que les séries envisagées soient spéciales et soient respectivement i_1, i_2 leurs indices de spécialité. On a donc

$$x = n_1 + 2n - \pi_1 + i_1, \qquad x' = n_2 + 2n - \pi_2 + i_2$$

et, par suite,

$$r_2 = 3(\pi - 1) - n_1 + \pi_1 - 1 - 2n - i_1,$$
$$r_1 = 3(\pi - 1) - n_2 + \pi_2 - 1 - 2n - i_2.$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$r_1 \geqq n_1 - (\pi_1 - 1), \qquad r_2 \geqq n_2 - (\pi_2 - 1)$$

et

$$r_1 + r_2 \geqq n_1 + n_2 - (\pi_1 - 1) - (\pi_2 - 1).$$

On a donc, en tenant compte des relations (2) et (3),

$$r_1 + r_2 \geqq 3(\pi - 1) - 2n.$$

D'autre part, en tenant compte des valeurs trouvées pour r_1, r_2, on a

$$r_1 + r_2 = 3(\pi - 1) - 2n - i_1 - i_2.$$

Donc, $i_1 + i_2 \leqq 0$ et $i_1 = i_2 = 0$ et dans les relations précédentes, l'égalité a lieu.

Les courbes tricanoniques découpent sur les courbes Γ_1, Γ_2 des séries linéaires non spéciales et complètes.

Les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ sont réguliers et l'on a

$$r_1 = n_1 - (\pi_1 - 1), \qquad r_2 = n_2 - (\pi_2 - 1).$$

8. Le genre d'une courbe C_2 étant $3\pi - 2$, les courbes tricanoniques $C_3 \equiv C'_2$ découpent sur une courbe C_2 irréductible, la série canonique complète, d'ordre $6(\pi - 1)$ et de dimension $3(\pi - 1)$. De plus, par un groupe de cette série ne peut passer qu'une courbe C_3 puisque F est dépourvue de courbe canonique.

Considérons la série linéaire $|G_1|$ découpée sur une courbe C_2 irréductible par les courbes Γ_1. Elle a l'ordre $\pi_1 - 1 + n$ et est spéciale.

Les courbes C_3 découpent sur une courbe Γ_1 une série de dimension $n_1 + 2n - \pi_1$. En utilisant la première des formules (1), on trouve

$$n + \pi_1 - 1 - (n_1 + 2n - \pi_1) = n_1 - (\pi_1 - 1) + 1 = r_1 + 1.$$

On a $r_1 \geqq 0$ et, par suite, les courbes C_3 passant par $n + \pi_1 - 2$ points de la courbe Γ_1 ne rencontrent plus cette courbe qu'en des points fixes. Par conséquent, les courbes C_3 passant par un groupe G_1 contiennent la courbe Γ_1 qui détermine ce groupe. Il s'ensuit que les courbes C_3 passant par un groupe G_1 rencontrent encore la courbe C_2 considérée suivant les groupes G_2 découpés par les courbes Γ_2. Les séries spéciales $|G_1|$, $|G_2|$ sont complètes.

La série $|G_1|$ a le degré de spécialité $r_2 + 1$, donc on a

$$r_1 = n + \pi_1 - 1 - 3(\pi - 1 + r_2 \tag{4}$$

et, de même,

$$r_2 = n + \pi_2 - 1 - 3(\pi - 1) + r_1. \tag{4'}$$

Ces deux relations ne sont pas indépendantes, car par addition, on retrouve la relation (3).

Les courbes Γ_1, Γ_2 découpent sur une courbe C_2 irréductible, des séries complètes, d'indices de spécialité $r_2 + 1$, $r_1 + 1$.

9. Observons que F n'étant ni rationnelle, ni de bigenre 1, on a

$$n_1 < 2(\pi_1 - 1), \qquad n_2 < 2(\pi_2 - 1).$$

Par contre, r_1 et r_2 étant positifs ou nuls, on a

$$n_1 \geqq \pi_1 - 1, \qquad n_2 \geqq \pi_2 - 1.$$

Des relations (1) on déduit

$$\pi_1 - 1 - n = 2r_1, \qquad \pi_2 - 1 - n = 2r_2, \tag{5}$$

d'où

$$n \leqq \pi_1 - 1, \qquad n \leqq \pi_2 - 1.$$

On a ensuite

$$n_1 - (\pi_1 - 1) < \pi_1 - 1, \qquad n_2 - (\pi_2 - 1) < \pi_2 - 1, \tag{6}$$

d'où

$$r_1 < \pi_1 - 1, \qquad r_2 < \pi_2 - 1.$$

Nous avons supposé $\pi_1 \leqq \pi_2$. Des relations (1) on tire

$$2(n_2 - n_1) = 3(\pi_2 - \pi_1), \qquad \text{d'où} \qquad n_1 \leqq n_2.$$

Des relations (5), on déduit

$$2(r_1 - r_2) = \pi_1 - \pi_2, \qquad \text{d'où} \qquad r_1 \leqq r_2.$$

Des relations (4) et (4′), on tire ensuite

$$r_2 - r_1 = 3(\pi - 1) - (n + \pi_1 - 1),$$
$$r_2 - r_1 = n + \pi_2 - 1 - 3(\pi - 1),$$

d'où

$$n + \pi_1 - 1 \leqq 3(\pi_1 - 1) \leqq n + \pi_2 - 1.$$

10. Nous avons vu que les courbes C_3 découpent, sur une courbe Γ_1, une série complète d'ordre $2n + n_1$ et de dimension

$$2n + n_1 - \pi_1 = 2n + r_1 - 1.$$

Les courbes C_3 passant par un groupe de cette série découpent sur la courbe Γ_1 une série complète d'ordre $2n$ et de dimension

$$3(\pi - 1) - (2n + r_1 - 1) = r_2.$$

Les courbes Γ_2 *découpent sur une courbe* Γ_1 *une série linéaire complète d'ordre* $2n$ *et de dimension* r_2.

Considérons maintenant la série découpée par les courbes Γ'_2 sur une courbe C_2. Cette série est complète puisque $C_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma'_2$.

L'ordre de cette série est, en tenant compte de la relation (3),

$$2(\pi - 1) + n + \pi_2 - 1.$$

Les courbes C_4 découpent sur une courbe Γ_2 une série complète d'ordre $2n + 2(\pi_2 - 1)$ certainement non spéciale et dont la dimension est, par conséquent, $2n + \pi_2 - 2$. La dimension du système des courbes C_4 contenant une courbe Γ_2 est, en tenant compte de la relation (3),

$$6(\pi - 1) - 2n - (\pi_2 - 1) = \pi_1 - 1.$$

Une courbe Γ'_1 ne peut contenir une courbe Γ_1 puisque $p_g = 0$, il en résulte que *les courbes* Γ'_1 *découpent sur une courbe* C_2 *une série linéaire complète d'ordre* $2(\pi - 1) + n + \pi_1 - 1$ *et de dimension* $\pi_1 - 1$.

11. Considérons une courbe C_2 irréductible, soit $\overline{C}_2$.

La série caractéristique $|(C_2, \overline{C}_2)|$ de la courbe $\overline{C}_2$ est certainement non spéciale puisque $p_g = 0$. Elle est d'ordre $4(\pi - 1)$, complète, de dimension $\pi - 2$.

Considérons, sur la courbe $\overline{C}_2$, une série d'ordre $4(\pi - 1)$ distincte de la série caractéristique et soit i son indice de spécialité. Les séries de cette nature sont en nombre $\infty^{3(\pi-1)}$ et, par conséquent, les groupes de $4(\pi - 1)$ points de ces séries dépendent de

$3(\pi-1)+\pi-2+i$ paramètres. Mais les groupes de $4(\pi-1)$ points dépendent de $4(\pi-1)$ paramètres, donc on a $i=1$.

Cela étant, considérons sur $\overline{C}_2$ une série $g^{\pi-1}_{4(\pi-1)}$ spéciale. Les groupes de la série canonique de $\overline{C}_2$ contenant un groupe de cette série sont complétés par un groupe de $2(\pi-1)$ points unique, puisque l'indice de spécialité est 1. Par conséquent, les séries d'ordre $2(\pi-1)$ points de $\overline{C}_2$ ont la dimension 0 et l'indice de spécialité égal à π.

12. Fixons l'attention sur les groupes (C_2, Γ_1) de $n+\pi-1$ points. Sur une courbe Γ_1, ces groupes forment une série linéaire qui peut être spéciale, puisque $n+\pi_1-1\leqq 2(\pi_1-1)$. Soit j son indice de spécialité. Un groupe (C_2, Γ_1) appartient donc à ∞^{j-1} groupes canoniques de Γ_1, c'est-à-dire que par un tel groupe passent ∞^{j-1} courbes Γ'.

Considérons les groupes (C_2, Γ_1) sur une courbe C_2. Les courbes Γ'_1 passant par un de ces groupes sont en nombre ∞^{j-1} et coupent encore $\overline{C}_2$ suivant des groupes de $2(\pi-1)$ points formant une série linéaire. Or, on vient de voir qu'une telle série a la dimension 0, donc on a $j=1$.

Par un groupe (C_2, Γ_1) passe donc une seule courbe Γ'_1 et les courbes C_2 découpent sur une courbe Γ_1 une série d'ordre $n+\pi_1-1$ et de dimension n. La série découpée par les courbes C_2 sur une courbe Γ_1 est complète et par un groupe de cette série passe une seule courbe C_2. Par un groupe (C_2, Γ_1) passe une seule courbe Γ'_1. Les systèmes $|C_2|$ et $|\Gamma'_1|$ ayant les dimensions respectives $\pi-1$ et π_1-1, on a $\pi\geqq\pi_1$.

On peut donc écrire

$$(7) \qquad n\leqq\pi_1-1\leqq\pi-1, \qquad n\leqq\pi-1, \qquad n+\pi_1-1\leqq 2(\pi-1).$$

La première partie de l'inégalité (6) est vérifiée.

De la première des relations (4) on déduit

$$(8) \qquad r_2\geqq r_1+\pi_1-1$$

et de la seconde

$$(9) \qquad n+\pi_2-1\geqq 4(\pi-1).$$

De $n \leqq \pi - 1$, on déduit que la série découpée par les courbes Γ'_1 sur une courbe C_2 est spéciale, car autrement on aurait $n = \pi$.

Un groupe de cette série est d'ordre

$$2(\pi - 1) + n + \pi_1 - 1 \leqq 4(\pi - 1),$$

donc sur une courbe $\overline{C}_2$, il appartient au moins à un groupe G de $4(\pi - 1)$ points. Si ce groupe G appartenait à la série caractéristique de $\overline{C}_2$, il passerait au moins ∞^1 courbes C_2 par ce groupe $(\Gamma'_1, \overline{C}_2)$ et l'une d'elles contiendrait la courbe Γ'_1 comme partie. Mais alors, on aurait

$$C_2 \equiv \Gamma'_1 + H, \qquad C_3 \equiv \Gamma''_1 + H \equiv C_2 + \Gamma_1 + H$$

et la courbe $\Gamma_1 + H$ serait une courbe canonique de la surface, ce qui est impossible.

Les groupes G sont donc spéciaux sur une courbe C_2 et la série découpée sur une courbe C_2 par les courbes Γ'_1 est spéciale.

13. Nous considérerons maintenant la série $|(\Gamma'_2, \overline{C}_2)|$ découpée par les courbes Γ'_2 sur une courbe $\overline{C}_2$ de $|C_2|$. L'ordre de cette série est, en utilisant la relation (3), égal à

$$2(\pi - 1) + n + \pi_2 - 1$$

et donc au moins égal à $6(\pi - 1)$ en vertu de l'inégalité (9).

Cette série est complète. Si elle n'est pas spéciale, sa dimension est, d'une part, égale à $\pi_2 - 1$ et, d'autre part, égale à $n + \pi_2 - 1 - (\pi - 1) - 1$, ce qui entraîne $n = \pi$. Or, on a $n \leqq \pi - 1$, donc la série $|(\Gamma'_2, \overline{C}_2)|$ est spéciale. Mais alors, son ordre étant au moins égal à $6(\pi - 1)$, elle coïncide nécessairement avec la série canonique de $\overline{C}_2$. Son indice de spécialité est donc égal à l'unité et l'on a

$$n + \pi_2 - 1 = 4(\pi - 1).$$

La dimension de la série est, d'une part, $\pi_2 - 1$ et, d'autre part, $3(\pi - 1)$, donc

$$\pi_2 - 1 = 3(\pi - 1), \qquad n = \pi - 1.$$

Nous avons obtenu

$$n \leqq \pi_1 - 1 \leqq \pi - 1, \qquad \text{donc} \quad \pi_1 = \pi.$$

Les courbes Γ_2 découpent sur une courbe Γ_1 de genre $\pi_1 = \pi$, une série linéaire complète d'ordre $2n = 2(\pi - 1)$ qui est, soit la série canonique, soit une série paracanonique. Dans ce dernier cas, sa dimension serait $r = \pi - 2$, ce qui entraîne par l'inégalité (9), $r_1 = -1$, ce qui est absurde. La série découpée par les courbes Γ_2 sur une courbe Γ_1 est donc la série canonique et l'on a $r_2 = \pi - 1$, $r_1 = 0$. La courbe Γ_1 est donc isolée.

De $r_2 = \pi - 1$ et des résultats précédents, on déduit

$$n_1 = \pi - 1, \qquad n_2 = 4(\pi - 1).$$

En résumé, on a

$$n_1 = \pi - 1, \qquad \pi_1 = \pi, \qquad r_1 = 0, \qquad n = \pi - 1,$$
$$n_2 = 4(\pi - 1), \qquad \pi_2 = 3(\pi - 1) + 1, \qquad r_2 = \pi - 1.$$

Nous avons vu que les courbes C_2 découpent sur la courbe Γ_1 une série d'ordre $n + \pi_1 - 1 = 2(\pi - 1)$, de dimension $\pi - 1$, qui ne peut être que la série canonique. Ainsi donc, sur la courbe isolée Γ_1, les courbes C_2 et Γ_2 découpent la série canonique complète.

14. Remarquons que le système $|C_2|$ ne peut coïncider ni avec $|\Gamma'_1|$ ni avec $|\Gamma_2|$.

Si $|C_2|$ coïncidait avec $|\Gamma'_1|$, on aurait

$$C_3 \equiv \Gamma''_1 \equiv C_2 + \Gamma_1$$

et Γ_1 serait une courbe canonique de la surface, ce qui est impossible.

Si $|C_2|$ coïncidait avec $|\Gamma_2|$, on aurait

$$C_3 \equiv \Gamma'_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2. \qquad \Gamma'_2 - \Gamma_2 \equiv \Gamma_1$$

et Γ_1 serait encore une courbe canonique de la surface.

Considérons un groupe canonique G de Γ_1. Par G passent une courbe Γ'_1, une courbe Γ_2 et une courbe C_2. Les courbes Γ'_1, Γ_2 découpent sur une courbe C_2 des séries d'ordre $4(\pi - 1)$ et de dimension $\pi - 1$, donc les courbes Γ'_1, Γ_2 passant par G découpent sur la courbe C_2 des groupes équivalents. Lorsque G varie sur Γ_1, les courbes Γ'_1, Γ_2, C_2 varient et, quelle que soit C_2, les séries $|(\Gamma'_1, C_2)|$, $|(\Gamma_2, C_2)|$ coïncident.

Deux courbes Γ'_1, Γ_2 découpant sur les courbes du système $|C_2|$ des groupes équivalents, sont équivalentes et l'on a donc

$$\Gamma_2 \equiv \Gamma'_1, \qquad C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma'_1, \qquad C_4 \equiv 2\Gamma'_1.$$

Pour déterminer le système bicanonique de F, de

$$\Gamma''_1 \equiv C_2 + \Gamma_1,$$

on déduit

$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma'_1, \qquad C_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma''_1 \equiv 2\Gamma_1 + C_2 \equiv 2C_2.$$

Le système bicanonique est donc

$$|C_2| = |2\Gamma_1|.$$

Il existe donc sur la surface F une courbe Γ_1 isolée, de genre π et de degré virtuel $\pi - 1$, dont le double est une courbe bicanonique sans qu'elle-même soit une courbe canonique. Ainsi se trouve établi le premier théorème énoncé au début.

15. Le système $|\Gamma_2|$ ou $|\Gamma'_1|$ a le genre $3(\pi - 1) + 1$, le degré $4(\pi - 1)$ et la dimension $\pi - 1$. Rapportons projectivement les courbes Γ'_1 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions. Il correspond à F une surface F′ d'ordre $4(\pi - 1)$. Aux courbes C_2 correspondent sur F′ des courbes que nous désignerons toujours par C_2, d'ordre $4(\pi - 1)$. A la courbe Γ_1 correspond sur F′ une courbe Γ d'ordre $2(\pi - 1)$, qui est une courbe projectivement canonique de $S_{\pi-1}$.

Les hyperquadriques $V^2_{\pi-2}$ de $S_{\pi-1}$ découpent sur F′ des courbes du système tétracanonique $|C_4| = |2C_2|$. Par conséquent, le long de chaque courbe C_2, il y a une hyperquadrique touchant F′ en chaque point.

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_{\pi-1}$ les coordonnées projectives homogènes de $S_{\pi-1}$ et

$$\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_r = 0 \qquad (r \geqq \pi - 3)$$

les équations de F',

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{\pi-1}) = 0$$

celle d'une hyperquadriques touchant F' le long d'une courbe C_2.

Nous allons voir que dans un espace S_π, la surface Φ d'équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_r = 0, \quad x_\pi^2 = f$$

est irréductible.

Considérons dans l'hyperplan $x_{\pi-1} = 0$ le cône H d'équations

$$\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_{\pi-2}, 0) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_r = 0$$

et le faisceau d'hyperquadriques

$$x_\pi^2 + 4f(x_0, x_1, \ldots, x_{\pi-2}, 0) = 0.$$

Désignons par K les courbes découpées sur le cône H par les hyperquadriques de ce faisceau. Pour $\lambda = 0$, la courbe K se réduit à la section $\overline{K}$ du cône par $x_\pi = 0$ comptée deux fois. Pour $\lambda = \infty$, la courbe K se réduit à une courbe K_2 comptée également deux fois.

La courbe $\overline{K}_2$ est une courbe Γ' et la courbe K_2 une courbe C_2. Si la courbe K se décomposait en deux courbes unisécantes des génératrices rectilignes du cône H, les courbes $\overline{K}_2$ et K_2 devraient découper sur une de ces courbes des groupes équivalents, ce qui est impossible puisqu'une courbe C_2 et une courbe Γ'_1 ne peuvent appartenir à un même faisceau. Il en résulte que la courbe K est irréductible et qu'il en est de même de la surface Φ.

La surface F est donc l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à la surface Φ.

16. Il convient d'établir certaines propriétés de la surface Φ. Tout d'abord, entre les genres arthmétiques p_a de F et p'_a de Φ, nous avons la relation

$$p'_a + 1 = 2(p_a + 1), \qquad \text{d'où} \qquad p'_a = 1.$$

Soient K_1, K_2, $\overline{\overline{K}}_2$ les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes Γ_1, C_2, Γ'_1. La courbe K_1 a le genre $2(\pi - 1) + 1$.

Les courbes C_2 déterminent sur la courbe Γ_1 une série d'ordre $2(\pi-1)$ et de dimension $\pi-2$, puisque $|C_2|$ contient la courbe $2\Gamma_1$. Il en résulte que les courbes K_2 déterminent sur la courbe K_1 une série $g^{\pi-2}_{4(\pi-1)}$ et que le système $|K_2|$ contient la courbe $2K_1$.

Le système $|K_2|$ a le degré $8(\pi-1)$ et le genre $6(\pi-1)+1$, donc d'après le théorème de Riemann-Roch, sa dimension est au moins égale à $2\pi-1$. Comme ce système contient la courbe $2K_1$, les courbes K_2 découpent sur la courbe K_1 une série d'ordre $4(\pi-1)$ dont la dimension est au moins égale à $2(\pi-1)$. Cette série ne peut être que la série canonique de K_1 et sa dimension est exactement $2(\pi-1)$.

On a donc $K_1 \equiv K_2 - K_1$ et K_1 est courbe canonique de Φ.

Le système adjoint $|K_2|$ à K_1 découpe sur cette courbe la série canonique complète, donc, d'après le théorème de Picard, la surface Φ est régulière et K_1 est l'unique courbe canonique de Φ.

Les courbes Γ'_1 étant adjointes à Γ_1, les courbes $\overline{K}_2$ sont adjointes à K_1 et appartiennent à $|K_2|$. Ce dernier système est le système bicanonique de Φ.

La surface Φ a les genres

$$p_a = p_g = 1, \qquad p^{(1)} = 2(\pi-1)+1, \qquad P_2 = 2\pi$$

et son diviseur de Severi est égal à deux.

(Manuscrit reçu le 11 mars 1963.)