www.academieroyale.be

C de la Vallée Poussin

www.academieroyale.be

NOTICE SUR LE

Baron Charles-Jean DE LA VALLÉE POUSSIN

MEMBRE DE L'ACADÉMIE

Né à Louvain le 14 août 1866,
décédé à Boitsfort le 2 mars 1962

Lorsqu'il fut question de désigner l'un d'entre nous chargé d'écrire la notice sur le Baron Charles-Jean de La Vallée Poussin, le choix de la Classe des Sciences se porta sur notre Confrère Fernand Simonart, l'élève de prédilection du regretté disparu. Malheureusement, l'état de santé de notre Confrère ne lui a pas permis de remplir cette mission et il nous a demandé de le suppléer. Nous avons accepté bien que la tâche nous parût assez lourde. Notre Confrère nous a d'ailleurs communiqué un dossier auquel nous ferons de larges emprunts (1).

---

(1) Ces lignes étaient écrites lorsque nous parvint la nouvelle de la mort de notre cher Confrère Fernand Simonart, le 3 juin, à Louvain.

www.academieroyale.be

Le Baron *Charles-Jean*-Gustave-Nicolas de La Vallée Poussin naquit à Louvain le 14 août 1866. Sa famille était d'origine française. Son grand-père, Étienne-Pierre-Remy de La Vallée Poussin, officier français, fut appelé en 1832 par Léopold Ier pour organiser l'Armée belge. Son père, Charles-Louis-Joseph-Xavier, conserva la nationalité française. Il fut professeur de Géologie à l'Université de Louvain et Associé de l'Académie (1). Il mourut à Bruxelles le 15 mars 1903. Le mathématicien opta pour la Belgique de même que son cousin germain Louis-Étienne-Marie-Joseph, orientaliste distingué, qui fut professeur à l'Université de Gand et membre de l'Académie (1869-1938) (2).

Comme on le voit, Charles-Jean de La Vallée Poussin appartenait à une famille d'intellectuels. Dans le discours qu'il prononça lors de la Manifestation organisée en son honneur le 13 mai 1928 (3), il dit : « Alors, songeant à mon lointain passé, trois noms remontent de mon cœur à ma mémoire et trois hommes m'apparaissent qui ont été le culte de mes jeunes années : mon père,

---

(1) *Notice sur Charles de La Vallée Poussin*, par Constantin Malaise (Annuaire de l'Académie, 1904).

(2) *Notice sur Louis de La Vallée Poussin*, par Etienne Lamotte (Annuaire de l'Académie, 1965).

(3) *Manifestation en l'honneur de Monsieur Charles-J. de La Vallée Poussin* (Louvain, 13 mai 1928).

www.academieroyale.be

Léon de Monge et Philippe Gilbert ; tous les trois étaient des esprits supérieurs, tous les trois professeurs à l'Université de Louvain, et tous les trois mes parents très proches ». Et plus loin : « Mais j'ai reçu d'eux les plus admirables exemples de discipline morale et de discipline intellectuelle et ce sont les modèles qui se sont imprimés pour toujours dans mon âme d'adolescent ». Lorsque l'on connaît la vie et l'œuvre de ces trois savants qui appartinrent tous trois à l'Académie, on comprend ce que devait être la destinée de l'adolescent.

Ch.-J. de La Vallée Poussin prit en 1890, à l'Université de Louvain, le diplôme d'Ingénieur des Arts et Manufactures, du Génie civil et des Mines, mais l'élégance de l'enseignement de Philippe Gilbert lui fit saisir la beauté de la Mathématique et l'orienta vers le Doctorat en Sciences physiques et mathématiques. Dès octobre 1891, il fut chargé de suppléer son Maître dans son enseignement de l'Analyse mathématique. A la mort de Gilbert, survenue l'année suivante, il fut définitivement chargé de cet enseignement. Professeur extraordinaire en 1893, ordinaire en 1897, il a eu dans ses attributions la totalité des cours d'Analyse mathématique et le cours de Mécanique analytique. Bien qu'atteint par la limite d'âge en 1936, il continua cependant à enseigner l'Analyse mathématique en licence.

www.academieroyale.be

Malgré d'assez lourdes charges d'enseignement, de La Vallée Poussin commença immédiatement ses belles recherches sur les points les plus élevés de l'Analyse mathématique et de la Théorie des nombres. Dès 1905, le Prix décennal des Mathématiques pures pour la période 1894-1903 lui fut décerné. Il devait obtenir une seconde fois ce prix en 1924 pour la période 1914-1923.

Le 15 décembre 1898, il fut élu Correspondant de l'Académie, il en devint Membre le 6 juin 1908 et fut Président de la Classe des Sciences en 1923.

Une première édition autographiée du Cours d'Analyse infinitésimale de notre Confrère parut en 1898 (tome I) et en 1899 (tome II). La première édition imprimée du tome I parut en 1903 et celle du tome II en 1906. Il est inutile d'insister sur l'accueil que reçut ce cours à l'étranger, où il fut considéré comme le meilleur exposé sur les fonctions de variables réelles. De nos jours encore, les nombreuses éditions qui se succèdent en prouvent la valeur. Ajoutons que notre Confrère a confié le soin des éditions actuelles à M. Simonart.

La vie de Ch. de La Vallée Poussin se serait sans doute écoulée calme dans l'atmosphère sereine de l'Université de Louvain si notre pays n'avait pas été envahi en 1914. Sa famille et lui-même échappèrent heureusement au sac de Louvain par l'armée allemande en août et peu après, il put quitter le pays envahi. Il se rendit

www.academieroyale.be

aux États-Unis où il fut invité par l'Université Harvard, de Cambridge (Mass.) à faire un cours sur l'intégrale de Lebesgue. Il vint ensuite à Paris où il fit, au Collège de France, un cours sur les intégrales de Lebesgue, les fonctions d'ensemble et les classes de Baire. Il fit ensuite, à la Sorbonne, en 1918, un cours sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Mais là ne se borna pas son activité. Beaucoup de professeurs de la Sorbonne étaient mobilisés, il suppléa plusieurs d'entre eux et fit notamment un cours de Géométrie infinitésimale.

De son séjour à Paris naquit ou plutôt s'affirma la profonde amitié qui le liait à Henri Lebesgue et à Paul Montel. L'étude des mêmes questions les avait rapprochés, mais ceux qui les ont connus comprennent les sentiments qui devaient les unir.

Au cours d'un congé en 1917, nous le rencontrâmes à la sortie d'une séance de l'Académie des Sciences, dont il était Correspondant. Il nous invita à lui faire visite. Tous deux nous souffrions d'être séparés des nôtres, mais il ne parla pas de la guerre. Il s'était fait une règle de ne jamais en parler car autrement, disait-il, « je ne pourrais contenir mon indignation ».

Vint la fin de la guerre et la rentrée au pays. La vie scientifique reprit son cours. L'Union internationale des Mathématiciens fut créée et de La Vallée Poussin en fut élu Président ; il

www.academieroyale.be

devait en rester Président d'Honneur. L'habitude fut prise d'échanger des professeurs entre les Universités de pays différents. Déjà en 1917-18, de La Vallée Poussin avait été invité par l'Université de Genève. En 1920, il le fut par celle de Strasbourg, en 1921 par celle de Madrid, en 1923 par la Sorbonne et en 1924-25, par les Universités de Chicago, Berkeley, au Wisconsin, au Minnesota, à Brown, à Yale, à Princeton, à Columbia, à Philadelphie, au Rice Institute aux États-Unis. Il nous souvient qu'en 1947, lors du Jubilé scientifique de M. Paul Montel, notre Confrère fut invité à faire une leçon sur le Potentiel logarithmique. Il avait alors plus de quatre-vingts ans, mais la plupart des auditeurs ne pouvaient le soupçonner, tant était grand le brio du conférencier. Nous avons d'ailleurs souvent entendu de La Vallée Poussin dans des réunions internationales, où il parlait au nom des étrangers. Chaque fois, on avait un réel plaisir à entendre ses discours qu'égayait parfois quelque grain de sel.

Les honneurs n'avaient pas manqué à notre Confrère. Il était Docteur Honoris Causa des Universités de Paris, de Toronto, de Strasbourg et d'Oslo. Il était Associé de l'Institut de France, appartenait aux Académies Pontificale des Nuovi Lincei, Nazionale dei Lincei, de Madrid, de Naples, de Boston, à l'Institut de Coïmbre et à la Société royale des Sciences d'Harlem, d'Utrecht, du

www.academieroyale.be

Bas-Rhin, au Cercle mathématique de Palerme, aux Sociétés mathématiques de France et d'Espagne.

En 1928, une manifestation fut organisée pour fêter le 35e anniversaire de sa promotion au grade de professeur. G. Verriest retraça la carrière mathématique du jubilaire, auquel son buste, dû au ciseau du sculpteur Lagae, fut remis. Des discours furent prononcés, notamment par H. Lebesgue et A. Demoulin. Le Roi s'associa par un télégramme à la manifestation et quelques jours plus tard, il conféra le titre de Baron à l'illustre mathématicien.

En 1943, une nouvelle manifestation fêtait les cinquante ans d'enseignement de notre Confrère. Ce fut cette fois M. Simonart qui retraça les résultats obtenus depuis 1928. Bien que le pays fût de nouveau envahi, les assistants furent nombreux.

Enfin, en 1949, l'Académie fêta le cinquantième anniversaire de son élection. En 1953, son buste, œuvre de M. L. Grandmoulin, membre de la Classe des Beaux-Arts vint orner une des salles de l'Académie.

Pendant de longues années, il avait été Secrétaire Général de la Société Scientifique de Bruxelles, dans les Annales de laquelle il avait publié de nombreux et importants travaux.

Les années ne semblaient pas avoir de prise sur de La Vallée Poussin. Il était très assidu aux séances de l'Académie, toujours alerte et de bonne

www.academieroyale.be

humeur, venant, malgré son grand âge, sans être accompagné. Parfois, il nous disait : « Le temps des recherches est passé, je relis ce que j'ai fait autrefois et cela m'amuse ». Ce n'est que quelques mois avant sa mort qu'il cessa de venir à nos séances. Il avait été victime d'un accident : par temps de verglas, il avait fait une chute et s'était fracturé l'épaule. Il s'est éteint doucement le 2 mars 1962, ayant conservé jusqu'à la fin une parfaite lucidité d'esprit. Lors de la séance de l'Académie du 3 mars, notre Confrère M. Simonart, en quelques paroles émues, nous rappela sa fin. La veille de sa mort, il avait encore reçu dans l'après-midi deux de ses amis qu'il avait parfaitement reconnus et auxquels il avait parlé du mal qui l'oppressait. Le soir, il reçut la visite de Mgr Van Wayenberg, alors Recteur Magnifique de l'Université de Louvain. Et puis, il s'était endormi. Nous étions tous profondément émus.

De La Vallée Poussin était Grand Cordon de l'Ordre de Léopold II et Commandeur de la Légion d'Honneur.

Avant de passer à l'étude des travaux de notre regretté Confrère, et pour bien fixer sa personnalité, il nous a paru utile de reproduire, avec l'autorisation de leur auteur, les paroles prononcées à l'Académie des Sciences de Paris, par M. Paul

www.academieroyale.be

Montel, pour annoncer la mort de son vieil Ami, le 26 mars 1962 (1).

NOTICE NÉCROLOGIQUE
SUR Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN,
par M. Paul MONTEL

Charles de La Vallée Poussin n'est plus. Un des grands créateurs de la Science contemporaine vient de disparaître et le monde mathématique tout entier est en deuil.

Il était né à Louvain le 14 août 1866 au sein d'une famille universitaire. Son père a longtemps enseigné la géologie à l'Université. Il a fondé l'Institut de Géologie et laissé le souvenir de sa bienveillance et de sa bonté. Son oncle maternel, Léon de Monge, et d'autres parents, dont l'un Philippe Gilbert, exerça sur lui une forte influence, y occupaient diverses chaires importantes. Dès son enfance, une atmosphère universitaire l'enveloppa et il se trouva placé au confluent d'activités variées. Léon de Monge développa ses goûts littéraires et Philippe Gilbert ses aptitudes scientifiques. Société simple, studieuse, assez

(1) *Notice nécrologique sur Ch.-J. de La Vallée Poussin* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1er sem., 1962, t. 254, pp. 2473-2476).

www.academieroyale.be

fermée. Les origines paternelle et maternelle étaient françaises et lui-même a toujours été très attaché à notre pays.

Pensionnaire au Collège des Jésuites de Mons auprès d'un de ses oncles qui était entré dans cet Ordre à la suite d'une visite au Curé d'Ars, la vie d'interne lui déplut beaucoup et l'enseignement de la philosophie le déçut par son excès de verbalisme. Celui des mathématiques l'attira et, après avoir obtenu son diplôme d'ingénieur, poussé par Philippe Gilbert, il se tourna résolument vers la recherche mathématique.

Cette mathématique, il l'a aimée toute sa vie, avec tendresse, avec passion. Il peut paraître surprenant qu'une science, composée exclusivement d'éléments abstraits soumis aux règles d'une logique implacable, puisse exercer une action si forte sur la sensibilité, par la joie esthétique qui naît de l'harmonie des méthodes ou des résultats, par l'affection profonde qu'elle met au cœur du savant qui, comme de La Vallée Poussin, lui consacre sa vie entière avec le plus absolu désintéressement des applications ou de la gloire qu'il peut en retirer.

Il a commencé à travailler à l'heure où toutes les valeurs mathématiques étaient passées au crible de la logique et de la rigueur ; où, dans la démonstration d'une propriété, on s'ingéniait à distinguer les hypothèses indispensables à sa

www.academieroyale.be

vérité de celles dont le seul but est de rendre le raisonnement plus aisé. Son imagination s'est exercée sur les théories nouvelles qu'il a perfectionnées, dont il a découvert l'essence et reconnu les vertus.

Ses dons d'invention, la pénétration aiguë de sa pensée se révélèrent bientôt mais les qualités d'esprit du savant ne s'épanouissent pleinement que dans un milieu favorable et, de ce côté aussi, la fortune lui sourit. Au cours d'un voyage en Norvège, en 1900, il rencontra dans une famille belge la jeune fille qui devait devenir une épouse incomparable. Très différente de lui, spontanée, communicative, créatrice d'un univers gracieux atténuant l'austérité de la méditation, elle faisait régner le silence et la paix autour de son travail, imposant le respect absolu de l'autorité paternelle. « C'est elle, a-t-il écrit, qui, collaboratrice sans le savoir, a constamment écarté de ma route les ronces et les épines, et rendu ma tâche plus facile et plus douce, elle qui a gardé toujours vivante la flamme du foyer où j'ai réchauffé mon cœur ». Ce qu'il a omis de dire, c'est la joie qu'elle lui donnait par son talent de pianiste, car il était sensible à l'art, musique ou peinture. Ce goût était héréditaire et le nom de Poussin vient de son arrière-grand-père Lavallée, peintre de la première moitié du XVIII^{e} siècle qui, apparenté à Nicolas Poussin, résolut d'associer leurs noms.

www.academieroyale.be

Entré dès 1891, âgé de 25 ans, à l'Université de Louvain comme suppléant de Philippe Gilbert, il était alors ingénieur des Arts et Manufactures, du Génie civil et des Mines en même temps que docteur ès sciences physiques et mathématiques. Bientôt il succédait à son maître. Sa réputation allait grandissant lorsqu'une découverte éclatante lui apporta une célébrité qui ne devait par la suite cesser de se confirmer et de s'élargir.

D'abord intéressé par la notion de discontinuité, il l'avait étudiée dans les équations différentielles, dans les intégrales multiples, dans les intégrales aux limites infinies et publié une série de Mémoires qui obtinrent de sérieuses récompenses.

Mais il est bientôt attiré par le problème de la répartition des nombres premiers. On savait depuis Euclide qu'il en existe une infinité, mais leur mode de distribution parmi tous les entiers n'était pas connu. Combien existe-t-il de nombres premiers inférieurs à x ? Legendre a pensé que ce nombre est voisin du quotient de x par son logarithme. Pour l'établir, Riemann a introduit une fonction célèbre égale, pour chaque valeur de la variable, à la somme des inverses de tous les entiers élevés à une puissance dont l'exposant est cette valeur de la variable, mais n'obtint pas la démonstration. Tchebichef échoua à son tour et Sylvester écrivait en 1881 : « Pour pouvoir nous prononcer avec certitude sur la possibilité

www.academieroyale.be

de démontrer cette formule, nous devons attendre sans doute que le monde ait vu naître un homme qui dépasse Tchebichef en perspicacité et en pénétration autant que Tchebichef lui-même surpasse par ces qualités le reste du genre humain.
« Cet homme était né et, dans son Mémoire de 1896, de La Vallée Poussin, utilisant un travail de M. Hadamard, démontra l'assertion de Legendre, puis, en 1898, précisant le degré de l'approximation, substitua au rapport du nombre à son logarithme, le logarithme intégral, c'est-à-dire l'intégrale de l'inverse du logarithme qui donne une valeur plus voisine. Il étudia aussi les progressions arithmétiques.

C'est l'époque où, sous l'impulsion de l'École française, la théorie des ensembles avec les notions élargies de mesure et d'intégrale, celle des fonctions les plus générales de variables réelles, se développent partout. De La Vallée Poussin va s'y attacher pendant dix ans, incorporant les résultats dans ce tome II de son *Traité d'Analyse* que les Allemands ne manquèrent pas de brûler en août 1914, avant sa parution.

Les découvertes se succèdent, sur les fonctions d'ensemble, sur les fonctions à variation bornée, sur l'approximation des fonctions par des polynomes où, faisant justice avec Borel et Runge d'erreurs accréditées, il apporte des solutions définitives, étend l'approximation aux dérivées,

www.academieroyale.be

en mesure la rapidité. Il passe ensuite à l'étude des équations différentielles dont les solutions sont représentées par des courbes passant par des points donnés ; à la représentation conforme des domaines multiplement connexes sur des régions limitées par des ovales généralisant ceux de Cassini ; au problème de Dirichlet où, substituant la masse au potentiel, il revêt la méthode du balayage de Poincaré de toute sa puissance.

Je ne puis donner une idée même sommaire de la richesse et de la variété de ses travaux dans ce domaine de l'Analyse qu'il n'a abandonné qu'exceptionnellement pour la théorie du contact en Géométrie ou l'étude du courant dans un conducteur électrique. Je ne puis qu'en évaluer le nombre : plus de 150 Notes, Mémoires, Traités, Conférences. Sa réputation est universelle ; toutes les Universités de l'ancien et du nouveau monde sont avides de ses leçons ; les Académies, les Sociétés savantes désirent le compter parmi leurs membres. Correspondant de l'Académie royale de Belgique dès 1898, il est nommé membre titulaire en 1909 ; Correspondant de notre Académie des Sciences en 1916, il est nommé Membre associé en 1945. Il est Président d'honneur de l'Union mathématique internationale. Il est décoré par un grand nombre d'Ordres nationaux ; en particulier, il est Commandeur de la Légion d'honneur.

www.academieroyale.be

Une touchante coutume de l'Université de Louvain est celle de célébrer plusieurs fois le jubilé de ses maîtres. C'est pourquoi de La Vallée Poussin fut fêté une première fois en 1928, après 35 ans d'enseignement et de découvertes, dans de belles cérémonies à Louvain où ses confrères de tous pays et ses élèves lui apportèrent le tribut d'une affectueuse admiration ; puis, une seconde fois en 1943, dans une cérémonie dont l'état de bouleversement du monde à ce moment avait réduit l'ampleur. M. Verriest au premier jubilé et M. Simonart au second ont brossé de magnifiques tableaux de ses créations.

Au cours de sa longue carrière, de La Vallée Poussin a rempli tous ses devoirs avec une inaltérable ponctualité. Ayant atteint l'âge de la retraite, son intégrité intellectuelle et physique lui permit de poursuivre son travail. Mais il y a un an, une fracture à l'épaule qui ne put jamais être complètement réduite, le fit beaucoup souffrir et attrista un homme qui avait toujours eu besoin d'évasion dans les bois ou sur les monts si longtemps parcourus. Le mal progressa, la respiration devint difficile et le 2 mars dernier, de grand matin, la vie se retira de lui.

Son œuvre a illustré la grande Université de Louvain qu'il a profondément aimée. Comme l'a exprimé M. Simonart, « pour l'avoir honorée et servie sans défaillance, l'*Alma Mater* vous

www.academieroyale.be

rangera parmi les plus grands de ses fils ». Il a honoré aussi sa patrie, il a honoré aussi l'esprit humain.

Ce maître éminent de la mathématique, de l'expression limpide d'une pensée profonde et harmonieuse, ce grand inventeur et manieur d'idées avait gardé une parfaite simplicité, ennemie de toute attitude avantageuse, de tout propos distant. La mobilité de ses traits, la finesse pensive d'un visage où flotte une ironie légère ont été reproduits avec bonheur dans le buste de Lagae qui lui fut offert lors de son premier jubilé. Il n'était que droiture, fidélité et bonté, et si je me permets de rappeler l'amitié qui nous unit pendant plus d'un demi-siècle, c'est parce que ce souvenir offre à mes yeux l'image de sa vie morale.

Au nom de nos Confrères de l'Académie des Sciences, au nom des mathématiciens français, j'offre à la famille de notre illustre Membre associé l'hommage de notre profonde sympathie.

* * *

Les travaux de Ch.-J. de La Vallée Poussin ont fait l'objet de plusieurs rapports et exposés. C'est tout d'abord le rapport de Paul Mansion justifiant l'attribution du Prix décennal pour la

www.academieroyale.be

période 1894-1903 (1). C'est ensuite un exposé, très technique, de M. Simonart, qui est au fond la justification de l'octroi du Prix décennal pour la période 1914-1923 (2).

Il est de tradition à l'Université de Louvain de fêter le 35e anniversaire de l'attribution de la toge à un professeur. C'est ce qui explique la manifestation du 13 mai 1928. Ce fut l'occasion, pour Gustave Verriest, de retracer l'œuvre de son Maître jusqu'à cette époque (3). Enfin, lorsque l'on fêta les cinquante années d'enseignement de notre Confrère le 23 mai 1943, ce fut M. Simonart qui évoqua ses travaux depuis 1928 (4).

La mission de l'auteur de cette notice est, suivant la tradition, de retracer l'œuvre du

---

(1) PAUL MANSION, *Rapport du Jury chargé de décerner le prix décennal de Mathématiques pures (Période de 1894-1903)*. Moniteur Belge du 7-8 août 1905. Supplément à Mathesis, 1905.

(2) F. SIMONART, *Étude sur les travaux mathématiques de M. Ch.-J. de La Vallée Poussin* (Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 1926, pp. 99-122).

(3) *Manifestation en l'honneur de Monsieur Charles-J. de La Vallée Poussin*, le 13 mai 1928. Discours de M. G. VERRIEST, pp. 15-46.

(4) F. SIMONART, *Jubilé professoral de M. le Baron de La Vallée Poussin* (Revue des Questions Scientifiques, 1946, pp. 455-475).

www.academieroyale.be

Confrère auquel elle est consacrée. Ce qu'il pourrait écrire ne serait qu'une paraphrase des rapports dont il vient d'être question. Dans ces conditions, il lui a paru préférable de reproduire deux d'entre eux : Celui de Gustave Verriest portant sur la période 1891-1928 et celui de M. Simonart, portant sur la période 1928-1943.

Extrait du discours de G. Verriest.

Mon cher Maître,

Au mois d'octobre 1891, Mgr Abbeloos, recteur de l'Université, présentait au corps académique un jeune chargé de cours âgé de vingt-cinq ans à peine.

« M. Charles de la Vallée Poussin, disait-il, en possession du grade de docteur en sciences physiques et mathématiques avec la plus grande distinction et, de plus, ingénieur des Arts et Manufactures, du Génie civil et des Mines, fait son entrée dans l'enseignement académique comme chargé du cours d'analyse mathématique à titre de suppléant de M. Gilbert. Quoique jeune encore, il nous inspire toute confiance ; il a puisé au sein de sa famille la passion du travail et l'esprit de recherche scientifique. Il lui suffira de suivre fidèlement cette voie qui lui est tracée pour répondre à ce que nous attendons de lui. »

www.academieroyale.be

Avant de vous dire, mon cher Maître, combien le jeune professeur qui faisait son entrée dans le corps académique a dépassé les espérances qu'on fondait sur lui, je ne puis me défendre de m'arrêter un instant à deux grandes figures évoquées par ces paroles.

C'est d'abord la noble figure de votre père, le géologue éminent qui illustra pendant près de quarante ans la chaire de minéralogie et de géologie de notre Université. Tout en lui respirait la noblesse de caractère et l'esprit scientifique entièrement désintéressé ; l'atmosphère familiale qu'il créa autour de lui ne pouvant inspirer à ses enfants que l'amour passionné de la vérité et de la vertu.

C'est aussi la figure de votre illustre maître, Louis-Philippe Gilbert, le profond érudit, le savant distingué dont l'enseignement clair et précis n'a pu manquer d'imprimer à votre esprit ce caractère de luminosité et de rigueur que l'on retrouve dans tous vos travaux.

Gilbert n'eut pas, comme votre père, la joie d'être le témoin des premiers succès importants de votre carrière scientifique, car, dès l'année suivante, la mort devait mettre un terme à son inlassable activité. Cependant les aptitudes remarquables qu'il avait découvertes en son élève de prédilection ne devaient pas tarder à prendre leur plein épanouissement.

www.academieroyale.be

Le travail par lequel débuta votre activité scientifique unit immédiatement votre nom à ceux des grands mathématiciens modernes.

La notion d'intégrale définie, assise par Cauchy sur des bases solides, ne s'appliquait adéquatement qu'aux fonctions continues. Les successeurs de Cauchy avaient, sans doute, étendu cette notion au cas de fonctions présentant une certaine discontinuité, mais Riemann, en abordant la question d'un autre point de vue, était parvenu à élargir la notion d'intégrabilité de telle façon qu'elle s'appliquât à des fonctions dont les points de discontinuité pouvaient former un ensemble dense pourvu qu'il fût de mesure nulle.

D'un autre côté, Cauchy avait résolu la question d'intégrabilité des équations différentielles mais, encore une fois, dans le cas seulement où les fonctions entrant dans ces équations satisfont à certaines conditions de continuité.

Ce qui avait été fait par Riemann pour les intégrales définies, ne serait-il pas possible de le faire pour les équations différentielles ? Telle est la question que vous vous posez à la fin de vos études universitaires et que vous abordez sans vous laisser intimider par les noms des grands mathématiciens dont il faudra compléter les travaux.

Dans un mémoire qui fut couronné en 1892, au concours pour l'obtention des bourses de

www.academieroyale.be

voyage du Gouvernement, vous définissez l'intégrabilité d'une équation différentielle du premier ordre dans le cas où la dérivée est discontinue ; vous vous inspirez, à cet effet, des notions introduites par Darboux, dans l'étude de l'intégrale de Riemann. Vous définissez l'intégrale d'une telle équation et vous en étudiez les propriétés. Ces résultats sont ensuite étendus à un système d'équations différentielles simultanées d'ordre quelconque. La méthode que vous suivez dans votre étude est entièrement originale et vous conduit au but malgré les nombreuses difficultés rencontrées en route.

La direction que ce premier travail marque dans votre activité scientifique se retrouve tout le long de votre brillante carrière et, au milieu des nombreuses et importantes questions que vous avez étudiées dans la suite, on vous voit revenir constamment avec prédilection vers l'analyse si ardue de la discontinuité.

Les premières notions d'arithmétique ne nous permettent d'atteindre que le discontinu et ce n'est que par un prodigieux effort que les mathématiciens sont parvenus à accorder le droit de cité dans l'édifice mathématique à la notion précise du continu dont nos sens nous donnent l'intuition. Mais, une fois introduit dans la citadelle, le continu y règne en maître et ce n'est que par des voies détournées et au prix d'efforts

www.academieroyale.be

très laborieux que le discontinu peut être soumis à l'analyse mathématique.

La difficulté du sujet ne fera cependant pas reculer celui qui, avec un esprit d'invention très affiné, est en pleine possession de toutes les ressources de l'analyse.

La Société scientifique de Bruxelles avait mis au concours la question suivante : « Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe d'intégration dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibniz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini ».

A l'assemblée générale du 27 avril 1892, la médaille d'or destinée au lauréat vous fut remise pour votre mémoire : *Sur les intégrales à limites infinies pour lesquelles la fonction sous le signe d'intégration est discontinue.*

A vrai dire, vous ne répondiez qu'à la première partie de la question posée, la seconde partie du mémoire ayant été retirée pour recevoir quelques perfectionnements, mais les résultats acquis dans la première partie étaient tellement importants que le Conseil de la Société scientifique n'hésita pas à vous accorder le prix. La question de la différentiation sous le signe intégral se confond avec celle du changement de l'ordre des intégrations dans les intégrales doubles. Vous étudiez

www.academieroyale.be

cette dernière question, vous formulez, en faisant appel à la notion de convergence uniforme, une règle assignant des conditions suffisantes pour que cette interversion soit légitime lorsque l'une des limites supérieures, ou bien toutes les deux, sont infinies.

Jordan, professeur de calcul infinitésimal à l'École Polytechnique, chargé de faire rapport sur votre mémoire, s'exprimait en ces termes : « On sait qu'une intégrale double peut se calculer lorsqu'elle est déterminée par deux intégrales successives. Ce résultat subsiste-t-il nécessairement lorsque les limites sont infinies ? L'affirmative est admise plus ou moins explicitement dans un grand nombre de démonstrations et notamment dans notre cours d'analyse. L'auteur du mémoire montre, par un exemple décisif, la fausseté de cette supposition... Ce résultat inattendu nous paraît le point le plus intéressant du mémoire... Divers points de la théorie des intégrales multiples devront donc être révisés, en particulier, tout ce qui concerne les changements de variable. »

Jordan fut d'ailleurs le premier à tirer parti des résultats de votre travail. Il signale lui-même, dans la préface de la seconde édition de son cours, que l'erreur que vous avez signalée l'a obligé à remanier profondément la théorie des intégrales définies.

www.academieroyale.be

La seconde partie de votre mémoire, que vous aviez retirée pour la perfectionner, parut vers la fin de la même année dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. Dans cette partie, c'est la convergence des intégrales simples et doubles, lorsque la fonction sous le signe d'intégration devient infinie, qui est étudiée avec la plus grande précision. Cette étude est faite à l'aide d'une fonction auxiliaire que l'on retrouvera plus d'une fois dans vos œuvres à l'occasion de questions analogues, fonction bornée, qui est égale à la fonction sous le signe d'intégration, sauf lorsque celle-ci dépasse un nombre donné qu'on fait d'ailleurs tendre vers l'infini.

Les résultats obtenus dans ce mémoire étaient remarquables, mais ils se limitaient au cas où une certaine condition de convergence uniforme est réalisée.

Cette restriction, si minime qu'elle fût, vous la supprimerez quelques années plus tard, dans une étude magistrale parue en 1899, dans le même journal.

On ne peut lire les quelques pages de ce court mémoire sans se sentir envahi d'un sentiment d'admiration comme celui qu'on éprouve devant les grands chefs-d'œuvre de l'art. Sans doute, durant cet intervalle de sept années, aviez-vous abordé et conduit à bon terme, au milieu de difficultés inouïes, un autre travail, long et laborieux,

www.academieroyale.be

d'une nature toute différente et dont la lecture fait éprouver à chaque page une nouvelle surprise, tant il y est déployé d'habileté et de finesse ; mais la résolution complète et inattendue, sous une forme entièrement nouvelle, d'une question qui semblait épuisée est, plus encore qu'un long travail édifié patiemment, une manifestation du véritable esprit mathématique.

Dans ce nouveau mémoire, vous considérez une fonction auxiliaire égale, en chaque point, à la valeur minima de la fonction à intégrer et vous démontrez que deux intégrations par défaut successives effectuées sur cette fonction auxiliaire donnent un résultat compris entre les limites d'indétermination de l'intégrale double étudiée. Il résulte de là que, si celle-ci est déterminée, son calcul se ramène à celui de deux intégrales simples effectuées dans un ordre quelconque. La fonction auxiliaire peut d'ailleurs être remplacée par la fonction elle-même dans les cas que vous indiquez.

Vos recherches touchant les questions relatives à l'intégration vont se poursuivre maintenant sans relâche ; mais je m'en voudrais si, pour une simple raison de continuité dans l'analyse de vos travaux, je remettais à plus tard l'examen des recherches importantes qui ont porté votre renommée dans tous les centres intellectuels du globe dès la fin du siècle dernier.

www.academieroyale.be

Encouragé par vos succès dans l'étude si délicate de la discontinuité, vous vous sentez de force à aborder un problème qui résiste depuis un siècle aux efforts des meilleurs géomètres : « Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à un nombre donné ? »

L'intérêt qui s'attache à une telle question peut paraître minime à une personne peu habituée aux spéculations mathématiques. Cependant, si l'on songe que tout l'édifice mathématique, exception faite pour la géométrie, repose presque exclusivement sur la notion du nombre entier et qu'à partir de là, avec l'aide de la seule logique, on peut s'élever jusqu'aux plus hauts sommets de l'analyse, on comprendra que l'étude du nombre ne pourra jamais être poussée assez loin. D'autre part, tous les nombres entiers peuvent être construits au moyen des nombres premiers qui apparaissent ainsi comme les éléments générateurs de l'échelle des nombres. La distribution de ceux-ci, dans cette échelle, doit donc présenter pour le mathématicien un intérêt tout spécial.

Soit que l'on pense avec Fourier « que le but principal des mathématiques est l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels », soit que l'on estime avec Jacobi « que le but unique de la science est l'honneur de l'esprit humain et que, sous ce titre, une question de nombre vaut autant qu'une question du système du

www.academieroyale.be

monde », on sera d'accord pour reconnaître qu'une vue plus profonde dans les questions fondamentales peut découvrir brusquement des aspects nouveaux à la science. D'ailleurs, la difficulté prodigieuse qui s'attache à la résolution de ces problèmes en apparence si simples est un puissant stimulant pour perfectionner l'outil mathématique. La théorie des nombres en fournit des exemples frappants.

Depuis Euclide on savait que lorsqu'on s'élève dans la suite des nombres on rencontre indéfiniment des nombres premiers, mais la loi suivant laquelle ces nombres premiers sont distribués est inconnue.

A défaut d'une formule donnant exactement le nombre de nombres premiers inférieurs à une limite x donnée, on s'est contenté de chercher une formule asymptotique, c'est-à-dire une formule approchée mais qui est d'autant plus exacte que la limite x est plus grande.

Depuis un siècle, plusieurs mathématiciens célèbres s'étaient attelés à cette tâche. Legendre avait deviné, au début du siècle dernier, que le quotient de x par son logarithme népérien répondait asymptotiquement au problème, mais ni lui-même, ni Dirichlet, ni Tchebicheff ne parvinrent, malgré de prodigieux efforts, à démontrer ce célèbre théorème, quoique les limites d'incertitude fussent resserrées de plus en plus.

www.academieroyale.be

Riemann, étudiant une question connexe, tira un parti nouveau d'une fonction qui devait donner la clé du problème, la célèbre fonction $\zeta(s)$, somme des inverses des puissances n-ièmes de tous les nombres entiers, mais il fut arrêté lui-même, dans la résolution de ce problème connexe, par l'impossibilité de démontrer certaines propriétés de la fonction ζ dont il avait l'intuition.

Dans l'entretemps, les chercheurs, utilisant les méthodes géniales de Tchebicheff, serraient la solution dans des limites de plus en plus étroites, mais le résultat précis semblait inaccessible. Aussi Sylvester terminait-il en 1881 un mémoire sur cette question par ces mots : « Pour pouvoir nous prononcer avec certitude sur la possibilité de démontrer cette formule, nous devrons attendre sans doute que le monde ait vu naître un homme qui dépasse Tchebicheff en perspicacité et en pénétration autant que Tchebicheff lui-même surpasse par ces qualités le reste du genre humain ».

L'homme attendu par Sylvester était né et c'était, comme le pressentait Sylvester, en suivant une voie différente de celle de Tchebicheff, que la victoire finale devait être remportée.

En 1892, Hadamard publia, sur la fonction ζ de Riemann, une étude importante qui lui valut le grand prix des sciences mathématiques, décerné par l'Institut de France. Il démontrait, dans ce

www.academieroyale.be

mémoire, plusieurs points qui avaient résisté à l'analyse du grand géomètre allemand.

Vous appuyant sur ces travaux et pénétrant encore plus profondément dans la nature des propriétés de la fonction ζ, vous parveniez enfin à arracher aux nombres premiers le secret qu'ils avaient refusé de livrer à plusieurs générations de mathématiciens. Dans un volumineux mémoire, présenté en 1896 à la Société scientifique de Bruxelles, vous démontriez d'une façon rigoureuse ce théorème pressenti par Stieltjes : « La somme des logarithmes népériens des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x quand x tend vers l'infini ». Vous déduisiez de là le célèbre théorème deviné par Legendre : « Le nombre des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à $\frac{x}{\log x}$ », et vous mettiez par là un terme à une suite ininterrompue de recherches qui s'étendaient sur près d'un siècle.

Mais ce résultat ne vous satisfaisait pas encore. On savait que si la fonction de Legendre répondait au problème, il devait en être de même d'une autre fonction, le logarithme intégral de x, dont la fonction de Legendre est la partie principale. Dès lors, vous vous posez cette question dont la réponse précisera singulièrement votre découverte : « Des deux expressions, le logarithme

www.academieroyale.be

intégral ou celle de Legendre, quelle est celle qui répond le mieux au problème posé ? »

Dans un mémoire présenté en 1898 à l'Académie Royale des Sciences de Belgique, vous résolvez par une analyse extrêmement compliquée une question qui n'avait jamais été envisagée auparavant : la question de l'ordre de grandeur de la différence entre le logarithme intégral de x et le nombre de nombres premiers inférieurs à x. Vous donnez une limite supérieure de cet ordre de grandeur et vous déduisez de là que le nombre de nombres premiers inférieurs à x est représenté asymptotiquement par le logarithme intégral de x d'une façon plus exacte que par toute autre expression possible sous forme finie de ce logarithme intégral.

Chargé par l'Académie d'analyser votre mémoire, Mansion s'exprimait comme suit : « La difficulté de la question qui y est abordée et enfin résolue, la connaissance et le maniement facile de toutes les ressources de l'analyse dont l'auteur fait preuve d'un bout à l'autre, l'esprit d'invention qu'il y déploie, non seulement dans la marche générale de son travail, mais aussi à chaque page, pour surmonter les obstacles sans cesse renaissants qui se dressent devant lui, tout concourt à en faire l'un des mémoires d'analyse les plus remarquables qui aient jamais été publiés en Belgique. »

www.academieroyale.be

Il serait injuste de ne pas signaler qu'un autre mathématicien qui s'est, comme vous, créé un grand nom dans la science, parvenait à établir, dans un mémoire paru quelques mois après le vôtre, le théorème de Stieltjes. Mais, ce mémoire eût-il paru plus tôt, votre nom n'en serait pas moins resté inséparable de cette importante théorie, car, non content de résoudre le problème principal, vous avez fouillé la question dans tous ses détails avec la plus grande minutie et vous avez obtenu, chemin faisant, bien des résultats accessoires dont il m'est impossible de faire mention ici.

Aussi le jury chargé par le Gouvernement de décerner le prix décennal de mathématiques pures pour la période de 1894 à 1903, vous proclama lauréat à l'unanimité, non seulement pour les travaux que j'ai signalés, mais aussi pour vos importantes recherches sur la composition des formes binaires quadratiques et sur le théorème de Dirichlet relatif aux nombres premiers contenus dans une progression arithmétique.

Mais revenons à vos recherches dans le domaine de l'intégration. Le siècle dernier avait vu, sous l'influence de Cauchy et de Riemann, préciser et élargir la notion d'intégrale ; à peine le siècle présent était-il né, qu'une nouvelle extension, si vaste qu'on conçoit difficilement qu'elle puisse

www.academieroyale.be

être dépassée un jour, était révélée au monde savant par un illustre géomètre que nous sommes fiers de voir venu aujourd'hui parmi nous apporter à notre jubilaire l'hommage des mathématiciens étrangers.

M. Lebesgue partait d'une idée simple mais entièrement nouvelle, en s'appuyant sur la notion de mesure d'un ensemble introduite par Borel. Riemann, pour former son intégrale, divisait l'intervalle d'intégration, porté sur l'axe des x, en intervalles partiels qu'il multipliait chacun par l'ordonnée de la fonction en un point quelconque de cet intervalle, puis il faisait la somme des produits obtenus et passait à la limite. M. Lebesgue, au contraire, divise l'oscillation de la fonction, portée suivant l'axe des y, en intervalles partiels ; les points de l'axe des x dont l'ordonnée a son sommet dans l'un de ces intervalles, forment un ensemble ; on multiplie la mesure de chacun de ces ensembles par une ordonnée quelconque qui lui correspond et l'on fait la somme de ces produits. La limite de cette somme, lorsque les intervalles partiels tendent vers zéro, est l'intégrale de Lebesgue.

Du point de vue de M. Lebesgue, on peut intégrer des fonctions qui sont discontinues en chacun de leurs points, on peut intégrer toutes les fonctions finies discontinues rentrant dans la classification de Baire, c'est-à-dire toutes les

www.academieroyale.be

fonctions qui s'introduisent naturellement dans l'analyse moderne.

Vos propres travaux sur l'intégration vous firent immédiatement saisir l'immense portée de cette théorie.

La première édition de votre *Cours d'Analyse* venait de sortir de presse. Impatient de communiquer à vos élèves votre enthousiasme pour les conceptions nouvelles, vous préparez une nouvelle édition entièrement remaniée.

La définition de l'intégrale de Lebesgue implique, en effet, une connaissance assez approfondie de la théorie des ensembles. Dans la première édition, cette théorie déconcertante, qui paraît un défi à l'imagination et au bon sens, n'avait trouvé qu'une place restreinte ; actuellement elle devient la base indispensable du calcul intégral, exemple frappant d'une théorie semblant devoir rester un pur jeu d'esprit semé de paradoxes et devenant tout à coup le point d'appui solide d'une vaste branche de l'analyse. Cette théorie des ensembles occupe dans la nouvelle édition une place considérable et les recherches dans ce domaine et dans le domaine connexe des fonctions d'une variable réelle vous occuperont durant une dizaine d'années.

L'introduction de l'intégrale de Lebesgue dans votre cours ne pouvait se borner à une simple transcription des principaux résultats obtenus

www.academieroyale.be

par le savant géomètre français. M. Lebesgue, en effet, avait basé ses travaux sur la notion du transfini. Les nombres transfinis sont les nombres ordinaux plus grands que l'infini. Or, dans nos méthodes actuelles d'enseignement, nous nous bornons à conduire nos élèves jusqu'au seuil de l'infini, sans leur montrer les vastes domaines qui s'étendent au-delà. Force vous fut donc de modifier considérablement les théories de l'auteur pour les faire entrer dans le cadre de nos programmes. Ce travail d'adaptation était d'ailleurs complété par quantité de résultats originaux. La seconde édition de votre cours contribua, dans une large mesure, à rendre ces théories classiques.

Vos recherches ultérieures dans ce domaine furent en partie insérées dans le tome II de la troisième édition de votre cours, mais cet ouvrage fut brûlé par les Allemands, au mois d'août 1914, avant sa sortie de presse.

L'invitation que vous adressa au début de l'année 1915 l'Université Harvard fut pour vous l'occasion de faire connaître vos profonds travaux sur l'intégrale de Lebesgue et sur les fonctions d'ensemble. A la fin de la même année, le Collège de France voulut, à son tour, avoir la faveur de vous entendre exposer vos recherches sur ces mêmes sujets ainsi que sur la théorie des fonctions de Baire. Vos leçons professées dans ces deux

www.academieroyale.be

grandes institutions savantes firent l'objet de deux publications qui resteront longtemps, sans doute, le meilleur guide de celui qui voudra s'initier à l'étude de ces questions difficiles entre toutes.

Il est, me semble-t-il, impossible de donner un aperçu de ces travaux sans employer le langage mathématique et une terminologie très spéciale, tant les questions étudiées sont éloignées des notions courantes ; aussi ne pourrai-je donner qu'une idée très vague et très incomplète de votre contribution à ces théories.

Un ensemble est une collection d'objets. Les ensembles de points et, plus particulièrement, les ensembles infinis de points formant des systèmes continus ou non, sur un intervalle de droite ou dans un rectangle, font l'objet d'une théorie très développée.

L'examen de la structure de ces ensembles, c'est-à-dire de la distribution des points qui les composent, a été poussé bien au-delà des limites de notre intuition. La fonction que vous appelez caractéristique, qui est égale à l'unité en tout point de l'ensemble considéré et à zéro partout ailleurs, vous permet de simplifier bien des théorèmes et d'en établir de nouveaux. Un autre outil, qui était connu, est le réseau ; c'est, notamment dans le cas d'un ensemble superficiel, une suite illimitée de grillages, à mailles de plus

www.academieroyale.be

en plus serrées, qui recouvrent l'ensemble. Vous perfectionnez cet outil en lui adjoignant un second réseau dont les nœuds sont situés aux centres des mailles des premiers grillages. Ces deux réseaux sont appelés conjugués. Ces réseaux conjugués introduisent une grande simplification dans la théorie, ils permettent notamment d'éviter le théorème géométrique de Vitali, sur lequel on basait la dérivation des fonctions d'ensemble absolument continues.

La théorie des ensembles a permis d'introduire une notion très nouvelle. Autrefois, lorsque l'on étudiait la variation d'une fonction de x, dans un certain intervalle, on supposait que x passait d'une valeur à une autre en passant par tous les nombres intermédiaires. Actuellement la conception est plus générale, on suppose que x varie en passant, non plus par tous les nombres intermédiaires, mais seulement par ceux qui appartiennent à un certain ensemble. On dit, dans ce cas, que x varie sur cet ensemble. On peut aussi différentier et intégrer une fonction sur un ensemble donné.

La valeur de l'intégrale définie d'une fonction donnée dépendra évidemment de l'ensemble sur lequel cette intégrale est prise. On peut imaginer d'autres variables dont la valeur dépend d'un ensemble auquel elles sont associées. Ces variables sont appelées des fonctions d'ensemble.

www.academieroyale.be

L'une des premières fonctions d'ensemble que l'on rencontre est la mesure d'un ensemble. M. Lebesgue a imaginé deux expressions qu'il appelle la mesure intérieure et la mesure extérieure d'un ensemble. Si ces deux expressions sont égales, leur valeur commune est appelée la mesure de l'ensemble et l'ensemble est dit mesurable. Si l'ensemble de points remplit tout un intervalle sur une droite ou tout un rectangle, sa mesure se confond avec la longueur de cet intervalle ou l'aire de ce rectangle.

Les fonctions d'ensemble ont été pour vous un sujet de profondes méditations. Vous avez scruté, jusque dans les dernières conséquences, leur propriété d'additivité. Une fonction est dite additive si la valeur de cette fonction sur une somme d'ensembles non empiétants est égale à la somme des valeurs de cette fonction sur chacun des ensembles considérés. La mesure est une fonction additive, elle est même, selon votre expression, additive au sens complet, c'est-à-dire qu'elle reste additive pour une somme infinie, mais dénombrable, d'ensembles.

Vous avez soumis la notion de mesure à une analyse serrée, en construisant cette notion par voie synthétique. Vous résolvez entièrement, à cet effet, le problème suivant posé par les travaux de M. Lebesgue : « Trouver toutes les fonctions d'ensemble soumises aux seules conditions de n'être

www.academieroyale.be

pas négatives, d'être additives au sens complet et de se réduire à la mesure au sens élémentaire dans le cas des domaines élémentaires, c'est-à-dire dans le cas où l'ensemble remplit tout un intervalle ou tout un rectangle ».

Vous démontrez qu'il n'existe qu'une seule fonction satisfaisant à ces conditions, c'est la mesure au sens de Borel-Lebesgue.

Immédiatement une question plus générale se présente à notre esprit : n'existe-t-il pas d'autres fonctions d'ensemble que l'on peut construire par un procédé analogue, ou, plus exactement, une fonction étant donnée sur certains ensembles particuliers, tels les domaines élémentaires, existe-t-il une fonction additive d'ensemble qui coïncide avec la précédente sur ces domaines ?

La résolution de ce problème exige, me semble-t-il, plus de pénétration d'esprit que n'importe quel autre problème des mathématiques et je me fais quelque scrupule à énoncer en deux mots la réponse, résultat d'une longue suite de considérations des plus abstraites.

La réponse à ce problème est affirmative, elle résulte d'une généralisation de la notion de mesure. On associe à l'ensemble considéré une fonction de domaine, c'est-à-dire une variable dont la valeur dépend de certains intervalles sur une droite ou de rectangles dans un plan. Cette fonction est arbitraire, mais elle doit être non négative,

www.academieroyale.be

continue, bornée et additive ; vous l'appelez le poids du domaine. Cette fonction permet de définir une fonction d'ensemble appelée le poids de l'ensemble, pourvu toutefois qu'une certaine condition, sur laquelle je ne puis m'étendre ici, soit réalisée. Si cette condition est satisfaite, l'ensemble est appelé un ensemble normal.

Cela étant, voici le beau théorème qui couronne votre étude : « Étant donnée une fonction définissant le poids d'un domaine élémentaire, il existe une fonction d'ensemble normal et une seule, qui soit continue et additive et qui coïncide avec le poids sur les domaines élémentaires ».

Vos considérations sont rattachées à l'importante théorie des fonctions à variation bornée. Toute fonction continue à variation bornée peut servir à définir un poids de domaine, il en découle ce résultat remarquable que toute fonction de point, continue et à variation bornée, définit une fonction d'ensemble normal, continue et additive. Il y a donc une corrélation étroite entre ces deux espèces de fonctions ; vous avez même établi qu'il y a identité entre elles, même lorsque ces fonctions ne sont pas continues. Pour mener à bonne fin ces profondes recherches, vous imaginez des méthodes et des notions nouvelles, parmi lesquelles je me bornerai à signaler les réseaux conjugués, la dérivation sur un réseau,

www.academieroyale.be

les fonctions majorante et minorante relatives à une intégrale définie.

Vos recherches dans le domaine des fonctions additives d'ensemble ne pouvaient se limiter aux fonctions continues. M. Lebesgue avait montré que toute fonction d'ensemble additive peut se décomposer en une somme de trois fonctions : une intégrale indéfinie qui est absolument continue, une fonction singulière qui est continue mais non absolument et enfin une fonction discontinue appelée la fonction des sauts. Vous avez apporté à l'étude de la fonction singulière d'importantes contributions. Ce qui donne à ces recherches un si grand intérêt, c'est votre démonstration d'identité des fonctions additives d'ensemble et des fonctions à variation bornée ; ces dernières sont donc, elles aussi, décomposables en trois éléments, et l'on acquiert ainsi une vue profonde sur la nature de ces fonctions qui jouent dans l'analyse mathématique un rôle tout à fait prépondérant.

Il est un vieil adage qui veut que la nature ne fasse pas de sauts : *natura non facit saltus ;* les premières fonctions rencontrées par les mathématiciens avaient l'allure paisible des phénomènes naturels de l'ancienne physique. Mais les théories physiques modernes sont venues infliger un démenti catégorique à ce vieil adage ; d'autre part, les progrès de l'analyse ont introduit

www.academieroyale.be

des fonctions bizarres dont les allures ont jeté un tel trouble dans la belle ordonnance des théories anciennes que certains mathématiciens les qualifièrent de fonctions pathologiques : les unes ne peuvent passer d'un point à un autre sans faire une infinité de sauts, d'autres ne sautent pas mais oscillent une infinité de fois dans tout intervalle, si petit qu'il soit, d'autres enfin serpentent avec tant de souplesse qu'elles passent par tous les points situés à l'intérieur d'un rectangle, sans en omettre un seul. Ces fonctions firent la joie des mathématiciens qui cultivent la science pour elle-même, elles provoquèrent l'indignation de ceux qui ont surtout en vue les applications.

Les nouvelles conceptions physiques ont donné une fois de plus raison à ceux qui estiment que la science doit avoir des adeptes qui marchent de l'avant sans aucun souci d'utilitarisme.

Les fonctions discontinues ont donc droit à toute l'attention des mathématiciens. Au lieu de les laisser s'introduire de-ci de-là, comme des anomalies, dans la science, le géomètre Baire s'est proposé de les faire rentrer régulièrement dans le cadre général de l'analyse en établissant une classification des fonctions de variable réelle s'étendant à toutes les fonctions, soit continues, soit discontinues, qui s'introduisent naturellement dans l'analyse.

www.academieroyale.be

Voici la base de cette classification. Les fonctions continues forment la classe zéro ; les fonctions discontinues, limites d'une suite indéfinie de fonctions continues, forment la classe un ; les fonctions limites de fonctions de la classe un et qui ne sont ni de cette classe, ni de la classe zéro, constituent la classe deux ; et ainsi de suite indéfiniment. On obtient de la sorte une infinité de classes, mais cette infinité n'épuise pas la classification. On peut, en effet, concevoir qu'une fonction soit la limite d'une suite de fonctions n'appartenant pas à une même classe, mais chevauchant sur une suite de classes dont les ordres croissent indéfiniment. Cette fonction appartiendra à une classe d'ordre transfini et l'on peut continuer de la sorte, non pas seulement infiniment, mais transfiniment.

Toutes les fonctions rentrant dans cette classification, vous les avez appelées les fonctions de Baire. Elles jouissent de propriétés communes, elles sont notamment intégrables au sens de Lebesgue, du moins si elles sont finies.

Vous avez apporté à l'étude des fonctions de Baire des méthodes nouvelles qui vous ont permis de simplifier et de compléter les résultats obtenus. Il m'est impossible de m'étendre sur ce sujet si spécial qui nécessite l'usage de la numération transfinie. Je me bornerai à signaler, parmi les notions que vous avez introduites dans ces

www.academieroyale.be

théories, celle d'ensemble compact et celle d'ensemble ambigu.

Des travaux d'un ordre d'abstraction si élevé suffiraient à absorber entièrement l'activité d'un esprit rompu aux raisonnements les plus subtils, mais une intelligence largement ouverte à la production mathématique si intense de notre époque se cantonne difficilement dans une seule spécialité. Sans sortir de la théorie des fonctions d'une variable réelle, vous abordez à la même époque une question d'une nature tout autre que celles dont nous venons de parler. Dès l'année 1908, vous publiez, sur l'approximation des fonctions par un polynome, deux mémoires qui font date dans l'histoire des mathématiques.

L'étude de l'approximation des fonctions se rattache, dans une certaine mesure, à la théorie de l'interpolation. Le problème fondamental que cette théorie pose est bien connu : un physicien a déterminé, par des mesures de laboratoire, la tension d'une vapeur à différentes températures ; il se propose de déduire de ces observations une formule permettant de calculer la tension de cette même vapeur à toute autre température. Ce problème a reçu diverses solutions dont la plus usuelle est donnée par la formule d'interpolation de Lagrange ; celle-ci résout la question au moyen d'un polynome dont les valeurs coïncident avec les données de

www.academieroyale.be

l'expérience aux points observés auxquels vous avez donné le nom de nœuds.

On admettait autrefois, du moins tacitement, qu'une légère erreur sur les données des observations ne modifiait que faiblement la formule de Lagrange, et, de plus, que le polynome de Lagrange, ayant avec une fonction donnée des nœuds communs, tendait à se confondre avec cette fonction lorsque le nombre de nœuds augmente indéfiniment dans l'intervalle d'interpolation. Tandis que Borel et Runge démontraient que cette dernière opinion est erronée et enlevaient par là à la formule de Lagrange une grande partie de son intérêt théorique, vous lui donniez le coup de grâce en montrant qu'elle ne mérite pas, au point de vue pratique, la confiance dont elle avait joui jusqu'alors ; en effet, une très minime erreur sur une observation produit, lorsque le nombre de celles-ci n'est pas très petit, une modification considérable dans les valeurs que prend ce polynome.

Dans un important mémoire présenté en 1908 à l'Académie Royale de Belgique, vous proposez une formule nouvelle, exempte de ces inconvénients, donnant lieu à des calculs plus simples et qui, chose tout à fait remarquable, peut donner naissance à toutes les formules d'interpolation connues, soit polynomiales, soit trigonométriques.

www.academieroyale.be

Arrêtons-nous un instant à ce mémoire consacré à l'étude de la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes.

La formule nouvelle que vous proposez permet d'interpoler toute fonction bornée et intégrable au sens de Riemann. Contrairement à ce qui a lieu pour la formule de Lagrange, cette formule converge vers la fonction à interpoler lorsque le nombre de nœuds tend vers l'infini et cette convergence est même uniforme dans tout intervalle à l'intérieur duquel la fonction est continue. Dans le cas où la dérivée de cette fonction est à variation bornée, vous trouvez une limite supérieure de l'écart entre la formule et la fonction. Le cas d'un contour polygonal se trouve dans ces conditions ; il est donc possible de déterminer exactement le nombre de nœuds nécessaires pour représenter un contour polygonal et, par suite aussi, approximativement la courbe dans laquelle ce contour est inscrit, de telle façon que l'écart de la formule d'interpolation soit aussi petit qu'on le veut.

Enfin, résultat remarquable, la dérivée de votre formule converge vers la dérivée de la fonction à interpoler. Ces résultats conservent une partie de leur valeur dans le cas où la fonction est discontinue.

La supériorité de votre formule étant établie, vous montrez qu'en la transformant on peut

www.academieroyale.be

en tirer diverses formules d'interpolation trigonométrique en relation étroite avec la série de Fourier et dont les propriétés de convergence et d'approximation sont analogues à celles de la formule fondamentale. Un fait que tous vos prédécesseurs avaient ignoré ou méconnu est qu'il faut distinguer soigneusement entre le cas où le nombre de subdivisions de l'intervalle d'interpolation est pair et celui où il est impair.

Enfin, une nouvelle transformation de la formule fondamentale conduit à une infinité de formules d'interpolation parabolique parmi lesquelles on trouve la formule de Lagrange. Voulant éviter le défaut de convergence de cette dernière, vous cherchez celles qui donnent une expression convergente et cela par un polynome de degré minimum ; la solution complète de ce problème couronne ce mémoire : le polynome cherché est de degré environ six fois plus élevé que celui de Lagrange.

Pour compléter l'analyse de ce beau mémoire dont l'ordonnance et la précision sont admirables, je devrais, mais les circonstances actuelles ne s'y prêtent guère, donner un aperçu des difficultés considérables qui y sont abordées et vaincues à chaque page.

Mais revenons au problème des polynomes d'approximation. Voici comment il se pose : une fonction quelconque étant donnée, trouver

www.academieroyale.be

un polynome qui en diffère aussi peu que possible, ou, pour être plus précis, trouver une suite illimitée de polynomes qui se rapprochent de plus en plus et autant qu'on le veut de la fonction considérée. Ce problème est analogue à celui de l'interpolation, mais la coïncidence en certains nœuds n'est pas exigée.

Weierstrass avait montré que ce problème est susceptible d'être résolu ; il en avait même donné une solution sous la forme d'une intégrale. Cette intégrale présentait l'inconvénient de contenir une exponentielle que l'on devait, pour obtenir effectivement un polynome, remplacer par son développement taylorien limité.

Par une étude d'une habileté prodigieuse, vous substituez à l'intégrale de Weierstrass une autre intégrale qui fournit directement un polynome. Cette intégrale n'était pas neuve, on la trouve déjà chez Stieltjes et, en même temps que vous, mais à votre insu, Landau l'utilisait dans un but analogue au vôtre et publiait ses recherches deux mois avant la parution de votre célèbre mémoire de 1908 sur l'approximation des fonctions. Cette intégrale s'est classée dans la science sous le nom d'intégrale de Landau, mais nul n'a, autant que vous, scruté ses propriétés ni analysé sous tous ses aspects la nature de la solution qu'elle apporte au problème posé. Bien plus, votre mémoire devait être

www.academieroyale.be

d'une fécondité insoupçonnée. Les problèmes fondamentaux qui s'y trouvent résolus, les voies nouvelles qui y sont ouvertes, enfin les questions qui y sont posées inspirèrent les travaux de nombreux chercheurs. Si, dans la théorie des nombres premiers, il vous a été réservé de mettre un point final à un chapitre ouvert depuis un siècle, ici c'est un chapitre nouveau que vous ouvrez à la science mathématique.

La représentation approchée d'une fonction par l'intégrale de Landau étant démontrée, vous faites un pas capital en avant en étudiant deux questions dont l'une était nouvelle et dont l'autre n'avait pas encore reçu de solution satisfaisante : la première concerne l'ordre de grandeur de l'approximation, la seconde est relative à la dérivabilité de la relation obtenue.

Le polynome de Landau, relatif à une fonction, contient un paramètre *n ;* si l'on donne à *n* successivement les valeurs 1, 2, 3..., on obtient une suite de polynomes qui se rapprochent indéfiniment de la fonction que l'on se propose de représenter. La différence entre le *n*-ième polynome et la fonction dépend de la valeur de *n*, mais « quelle est la nature de cette dépendance ? » Voilà la question que vous vous êtes posée.

Cette question est trop générale pour pouvoir être résolue, il faut faire une hypothèse sur

www.academieroyale.be

la nature de la fonction à représenter ; vous supposez cette fonction continue et possédant en chaque point des dérivées à gauche et à droite toutes deux bornées. Ce cas comprend celui de la ligne polygonale dont nous avons signalé l'importance. Cela étant, vous démontrez que l'écart entre le n-ième polynome de Landau et la fonction est d'un ordre de grandeur au moins égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$; mais peu après vous montriez que l'on peut représenter l'ordonnée d'une ligne polygonale avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n}$ au moyen d'un autre polynome. Dès lors, vous vous demandez s'il n'est pas possible de faire mieux encore et vous faisiez proposer cette question comme sujet de prix par l'Académie royale.

Entretemps vous repreniez le même problème dans un nouveau mémoire en l'envisageant sous un aspect nouveau. Appelant polynome d'approximation dans un ensemble donné le polynome dont l'écart maximum, dans cet ensemble, est le plus petit, vous étudiez les propriétés d'un tel polynome de degré n dans un ensemble de $n + 2$ points.

Cette question très particulière a une portée très générale, car vous montrez que le polynome d'approximation dans un intervalle quelconque

www.academieroyale.be

est toujours un polynome d'approximation dans un ensemble de $n + 2$ points de cet intervalle. Vous basant sur ces considérations, vous établissez un théorème fondamental qui fournit un procédé pour trouver une borne inférieure de l'approximation la meilleure. Appliqué au cas du contour polygonal, ce procédé donne une réponse partielle à la question que vous aviez fait mettre au concours : la borne trouvée est très voisine de $\frac{1}{n}$; il suit de là que si le résultat obtenu dans le mémoire précédent peut être amélioré, il est dès à présent certain qu'il ne pourra jamais l'être de beaucoup. La réponse définitive ne tarda pas à être donnée par les mathématiciens Bernstein et Jackson : toute amélioration du résultat obtenu est impossible si la fonction est lipschitzienne, comme vous l'aviez supposée. Toutefois, si l'on admet en outre l'existence de dérivées lipschitziennes, l'approximation est meilleure. La coordination des résultats acquis par de nombreux chercheurs vous permit, quelques années plus tard, d'énoncer un théorème précis à ce sujet. Nous y reviendrons dans un instant.

L'approximation est donc liée à l'existence des dérivées, c'est là un résultat capital et ceci nous conduit à parler de la seconde question que vous vous étiez posée au sujet de l'intégrale

www.academieroyale.be

de Landau : « L'égalité asymptotique entre cette intégrale et la fonction qu'elle représente est-elle susceptible d'être dérivée ? » Question qui n'avait jamais été posée dans des cas analogues et à laquelle vous alliez donner une réponse du plus haut intérêt.

Ne vous limitant pas au cas où la fonction admet une dérivée unique, ni même une dérivée à droite et à gauche, vous étendez, par un procédé ingénieux, la notion de dérivée généralisée de Schwarz ; vous démontrez que l'égalité dont il est question peut être dérivée autant de fois qu'on le veut, une dérivée d'ordre quelconque du polynome de Landau étant asymptotiquement égale à la dérivée généralisée du même ordre de la fonction, si celle-ci existe et, par conséquent, à la dérivée ordinaire du même ordre en cas d'existence de celle-ci.

Que l'étroite affinité entre une fonction et son polynome d'approximation se poursuive jusque dans toutes leurs dérivées et que l'approximation obtenue soit en rapport avec l'existence de ces dérivées, ce sont des faits qui ne surprendront personne, mais il fallut dix ans de constantes recherches pour découvrir la nature exacte de ce rapport. Les résultats sont exprimés dans un élégant théorème que vous avez énoncé en 1918, devant la Société mathématique suisse. Le voici : « Si la fonction admet

www.academieroyale.be

une dérivée d'ordre r, satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre a inférieur à l'unité, elle peut être représentée par un polynome de degré quelconque n avec une approximation d'ordre $\frac{1}{n^{r+a}}$ et réciproquement. »

Ce théorème est très précis si la suite des dérivées est limitée ; si celle-ci est illimitée, il n'assigne plus de valeur exacte à l'approximation. Dans ce cas, vous êtes arrivé encore à des résultats précis lorsque la fonction est analytique.

Votre mémoire de 1908 ne se limite pas à l'étude de l'approximation d'une fonction par un polynome ; cette approximation peut s'obtenir tout aussi bien au moyen d'une expression trigonométrique. On savait que le problème de l'approximation polynomiale et celui de l'approximation trigonométrique sont deux problèmes équivalents, mais la démonstration qu'on avait donnée de cette équivalence n'était pas exempte d'imperfection. Vous deviez plus tard en donner une démonstration simple et rigoureuse, mais, dans votre mémoire de 1908, vous étudiez directement cette approximation au moyen d'une intégrale très simple qui donne naissance à une expression trigonométrique, comme celle de Landau donne naissance à un polynome.

Fait remarquable, qui avait échappé à ceux qui s'étaient, avant vous, occupés de la même

www.academieroyale.be

question, les égalités asymptotiques obtenues subsistent dans les dérivées, exactement comme pour les polynomes. L'intégrale que vous considérez a une relation étroite avec les séries de Fourier et donne lieu à un nouveau procédé de sommation de celles-ci.

Dans la suite, vous ferez ressortir l'avantage que présentent les expressions trigonométriques sur les polynomes pour l'étude des propriétés de l'approximation. Il me serait impossible, sans employer un langage strictement mathématique, de donner une idée, même approchée, des beaux travaux que vous avez faits dans ce domaine.

L'Université de Paris vous pria de faire une suite de leçons sur ces questions ; l'Académie pontificale de Rome, ainsi que plusieurs universités et institutions scientifiques américaines, sollicitèrent à leur tour la faveur de vous entendre exposer ces théories. Qu'il me suffise de signaler ces mots de M. Lebesgue, dans l'analyse qu'il a faite du volume consacré à vos *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, professées à la Sorbonne en 1918 : « Dans cette analyse, je me suis laissé entraîner, par la nouveauté du sujet, à parler plus de la matière du livre que de sa forme ; mais qu'aurais-je pu dire qu'on ne sache déjà sur les talents d'exposition de M. de La Vallée Poussin ? Et s'il m'avait fallu signaler les contributions nouvelles à la théorie données

www.academieroyale.be

par ce livre, il m'aurait fallu parler de presque tous les énoncés et de toutes les démonstrations. »

Au cours de vos conférences dans les universités étrangères, vous étendez l'étude de l'approximation au cas des fonctions quasi-analytiques. M. Borel venait de démontrer l'existence de fonctions qui possèdent en commun avec les fonctions analytiques la propriété d'être entièrement connues dès qu'on connaît leur valeur, ainsi que celle de toutes leurs dérivées successives, en un même point, mais qui en diffèrent par l'impossibilité d'être développées par la formule de Taylor, condition qui rend leur étude singulièrement ardue. Ces fonctions, que M. Borel a appelées quasi-analytiques, vous fournissent un vaste champ d'application des théories de l'approximation par les séries de Fourier. En même temps vous apportez à l'étude de ces fonctions des contributions essentielles en rattachant leur théorie à celle des séries trigonométriques.

Les séries trigonométriques n'ont pas été simplement pour vous un outil dans l'étude de l'approximation et des fonctions quasi-analytiques. Vous avez publié sur la théorie elle-même de ces séries un certain nombre de mémoires dont l'un date de l'époque où vous étiez encore étudiant ; le plus remarquable, assurément, paru en 1912, est relatif à l'unicité du développement trigonométrique : par une étude attentive

www.academieroyale.be

de la dérivée seconde généralisée et de la différence seconde qui s'y rattache, vous démontrez ce théorème dont la généralité est paradoxale : « Toute série trigonométrique, même divergente, est la série de Fourier d'une fonction sommable, pourvu que son terme général ait pour limite zéro et que ses limites d'indétermination soient des fonctions de x finies et sommables ».

A côté de ces travaux de grande envergure qui vous valurent à deux reprises le prix décennal de mathématiques pures, vous avez publié une trentaine de notes et mémoires relatifs à des questions moins vastes concernant l'algèbre, l'analyse, la géométrie et la mécanique. Je ne puis songer à les passer en revue, je me bornerai à signaler ceux qui me paraissent les plus remarquables.

L'algèbre vous doit une belle généralisation du théorème de Rolle pour le cas où les coefficients de l'équation sont imaginaires, ainsi qu'une démonstration nouvelle et simple d'un théorème fondamental de la théorie des formes binaires, à savoir : « Tout semi-invariant est la source d'un covariant ». La plupart des traités passent ce théorème sous silence ou en donnent une démonstration défectueuse. Vous avez apporté à la résolution des systèmes d'équations linéaires qui se présentent dans la théorie des erreurs d'observation des méthodes qui se rattachent à vos recherches sur l'approximation.

www.academieroyale.be

L'analyse vous est redevable, outre les grands travaux que nous avons analysés, de diverses études sur la fonction continue de Weierstrass dépourvue de dérivée, sur l'intégrale de Poisson et sur le théorème de Bernoulli, ainsi que d'une théorie simplifiée des fonctions presque périodiques de Bohr.

En géométrie, vous êtes revenu à diverses reprises sur la question si délicate du contact. Vous avez rectifié une erreur courante en montrant que le point de contact d'une enveloppée avec son enveloppe n'est la limite d'un point d'intersection avec une enveloppée voisine que si l'ordre du contact est impair. Vous inspirant d'une remarque de Cesàro, vous avez basé la théorie du contact sur la notion du point caractéristique d'ordre *n*. Vous avez mis de l'ordre dans la théorie du plan osculateur en comparant les diverses définitions classiques de ce plan. Vous avez établi cet élégant théorème que deux plans osculateurs infiniment voisins se coupent, en tout point de la courbe, suivant la tangente, si la torsion, supposée finie et déterminée, ne s'annule pas en une infinité de points.

J'ose espérer, mon cher Maître, n'avoir pas été trop en dessous de ma tâche en essayant de dire en langage usuel des choses qui ne peuvent s'exprimer adéquatement que dans la langue nette et précise des géomètres. Mon analyse

www.academieroyale.be

serait toutefois singulièrement incomplète si l'importance de votre œuvre d'invention me faisait passer sous silence votre œuvre d'enseignement.

Vous occupez depuis 1892 la chaire de calcul différentiel et intégral que la mort de votre illustre prédécesseur Gilbert avait rendue vacante. Le cacul infinitésimal forme la base de tout enseignement mathématique ; le niveau de cet enseignement suit nécessairement celui du cours d'analyse. Vous vous êtes trouvé, à ce point de vue, dans une situation que d'autres auraient jugée difficile, le même cours d'analyse étant suivi par les étudiants qui préparent le doctorat et par les élèves ingénieurs, les uns destinés à faire de la science pure, les autres de la science appliquée.

Vous avez toujours estimé que, quel que soit le but auquel elles doivent servir, il n'y a qu'une espèce de mathématiques, les « bonnes mathématiques ». Négliger la théorie, pour s'attacher principalement aux applications, ce serait rendre les mathématiques stériles entre les mains mêmes de ceux qui désirent les appliquer. L'enseignement du calcul infinitésimal donné d'un point de vue élevé éveille d'autre part chez l'auditeur un profond sentiment d'esthétique qui élève l'âme dans des régions qu'aucune autre science ne peut lui faire atteindre. « Par l'étude du nombre, dit Platon, l'âme est conduite de la sphère des choses périssables à celle de la vérité et de l'être. »

www.academieroyale.be

C'est bien là le sentiment qu'on éprouve à la lecture du beau recueil qui contient, avec quelques additions, vos leçons de calcul différentiel et intégral. Cet ouvrage qui a vu, malgré la guerre, six éditions en vingt-cinq ans, s'est classé immédiatement premier parmi les traités similaires. « On y rencontre, écrivait Mansion au sujet de la première édition, une foule d'innovations pédagogiques excellentes ; au point de vue de la précision et de la rigueur dans les questions difficiles, il est supérieur à tous les ouvrages analogues. »

Les éditions successives de votre *Cours d'Analyse* sont le reflet des progrès de la science depuis le début de ce siècle ; chaque édition constitue un ouvrage nouveau, remanié jusque dans les principes, utilisant chaque fois les ressources les plus modernes. Bien des questions y sont exposées à la lumière de vos propres découvertes, d'autres ont été profondément remaniées et simplifiées, d'autres enfin cachent, sous une complication apparente, une généralité et une rigueur que vous avez été le premier à leur donner ; et ce qui contribue d'ailleurs à faire le charme de ces ouvrages, c'est le style limpide et sobre dans lequel ils sont écrits. Quelque paradoxal que cela puisse paraître, un théorème peut être une œuvre littéraire. Que celui qui en doute parcoure votre traité.

www.academieroyale.be

C'est par ces mêmes qualités que se distinguent vos *Leçons de Mécanique analytique*. Chargé depuis la guerre d'enseigner cette science, vous avez apporté à l'exposé des principes de la mécanique une clarté qui lui fait souvent défaut. La théorie du mouvement d'un solide possédant un point fixe a reçu, dans votre cours, plusieurs perfectionnements. Dans le cas du mouvement à la Poinsot, vous donnez une démonstration nouvelle des propriétés de l'herpolhodie, tandis que dans le cas d'un solide de révolution pesant possédant une rotation initiale très rapide, vous êtes parvenu à intégrer approximativement les équations du mouvement d'une façon plus simple et plus précise que cela n'avait été fait précédemment.

EXTRAIT DU DISCOURS DE M.F. SIMONART.

MON CHER MAÎTRE,

Si vous aviez dû vous trouver mal chaque fois que, devant vous, votre œuvre a été glorifiée, vous ne l'auriez pas supporté si longtemps. Mais le vin nouveau de la gloire ne tourne la tête qu'aux jeunes et, quand ça leur arrive, ils ne s'en remettent jamais. Comme vous avez manifestement résisté à l'épreuve, souffrez donc, qu'en cet instant encore il vous soit parlé d'elle, même au prix d'un discours malhabile. Ce n'est

www.academieroyale.be

pas sans appréhension que j'ai accepté le grand honneur d'en faire l'éloge. Si je suis inférieur à ma tâche, mon excuse sera d'avoir obéi à la demande qui m'a été faite de retracer votre œuvre et, auprès de vous, qu'il ne m'a pas été tenu rigueur à chaque fois que cet honneur m'est échu.

C'est à présent, vers vos travaux postérieurs à 1928 que nous nous tournons, les précédents ayant fait l'objet d'un exposé magistral reproduit dans le Mémorial de votre premier jubilé scientifique. Pour ceux qui n'ont pas eu le plaisir de l'entendre, rappelons brièvement qu'il vous montre d'abord penché sur la théorie des nombres, ce péché de jeunesse commun aux plus illustres mathématiciens, pénétrant les secrets de la fameuse fonction ζ de Riemann et déjà préoccupé d'élargir, en y englobant la discontinuité, la notion d'intégrale. Votre réputation scientifique connaît une ascension rapide si bien, qu'au terme d'un premier cycle décennal, le prix de mathématiques pures vous est décerné pour la période de 1894 à 1903. Dans la suite, vous êtes resté fidèle à l'analyse de la discontinuité, participant en cela au renouveau qui aux environs de 1900, alors que la théorie des ensembles et des fonctions a acquis ses bases essentielles, modifie profondément l'orientation des recherches. Bien plus, remontant avec les Borel et les Lebesgue aux sources mêmes du progrès, vous contribuez à

www.academieroyale.be

étendre, jusqu'au maximum, les domaines de validité des définitions et des représentations analytiques, que ce soit à l'occasion de la théorie des ensembles, de leur mesure, de la théorie des fonctions de variables ou d'ensembles, de leur classification, de leur intégration par les intégrales de Lebesgue ou de Stieltjes, de leur développement en séries de polynomes ou de Fourier. de leur meilleure approximation, des relations entre l'ordre asymptotique et les singularités de la fonction à approcher, qu'elle soit analytique ou quasi-analytique. Et cette prodigieuse activité scientifique, qui s'étend sur un nouveau cycle de vingt-cinq ans, vous a valu entretemps, et pour la seconde fois le prix décennal de mathématiques. Votre célébrité est mondiale. Les Universités étrangères se disputent le privilège de vous entendre et de profiter de votre enseignement. De vos voyages par delà les frontières et les mers, vous revenez comblé d'honneurs et de lauriers. Au retour de l'un d'eux il me souvient, cher Maître, d'une scène touchante et bien intime dont je fus l'heureux témoin. Tout à la joie et à la fierté, des enfants s'ingéniaient à vous parer de vos nouveaux insignes académiques et, paternellement, vous cédiez à leur caprice.

Dans leurs écrits philosophiques et leurs biographies de savants, Darboux, Picard, Hilbert et, plus récemment, M. G. Julia, s'accordent

www.academieroyale.be

généralement pour discerner trois grandes phases dans les progrès réalisés depuis Cauchy par la théorie des fonctions, théorie avec laquelle les autres disciplines mathématiques restent étroitement liées. La première allant aux environs de 1880, où règne la fonction monogène à dérivée unique et déterminée dans son domaine d'existence dès qu'elle l'est dans une portion arbitrairement petite de ce domaine, ce qui la différencie des fonctions de variables réelles. La seconde, allant aux environs de 1900 ; avec Weierstrass, elle consacre la représentation de la fonction analytique par la formule de Taylor et son prolongement. La troisième, ouverte par M. E. Borel avec les fonctions quasi-analytiques, voit s'opérer la fusion de plus en plus intime des points de vue réel et complexe et, les recherches s'élever graduellement du local au général, par des définitions et des méthodes d'exploration en bloc. « La façon dont ce progrès a été obtenu : délimiter le domaine d'application d'une définition quand on n'introduit a priori aucune restriction à son emploi, a été souvent utilisée depuis un siècle » note M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration* (p. 24). Cette conception de l'illustre savant, très cher à votre mémoire, a inspiré, en effet, tous ses travaux ; on la retrouve dans son œuvre posthume sur les coniques, publiée par les soins de votre ami M. P. Montel ; elle fut aussi la vôtre et tout

www.academieroyale.be

spécialement au cours de ce troisième cycle de votre activité, sur lequel nous allons maintenant jeter un coup d'œil.

Il s'ouvre sur un problème global, relatif aux intégrales d'une équation différentielle linéaire et faisant l'objet de deux importants mémoires parus en 1929. On sait, depuis longtemps, qu'une solution d'une telle équation, homogène et d'ordre n, est bien déterminée dans l'intervalle de continuité ou le domaine d'holomorphie des coefficients par sa valeur initiale et celle de ses $n - 1$ premières dérivées. Écartant ce point de vue local, vous vous demandez sous quelle condition le théorème d'unicité subsiste quand on astreint l'intégrale à passer par n points. Cela implique, et c'est là la conclusion fondamentale de votre étude, que les n points choisis sur le champ de la variable indépendante soient compris dans un polygone convexe dont le rayon n'excède pas la racine positive d'une certaine équation algébrique de degré n construite à partir des modules maxima des coefficients de l'équation proposée. On connaissait déjà sur cette question et, dans le cas le plus simple $n = 2$, quelques résultats dus à M. Picard en application de la méthode des approximations successives. Elle intéresse les géomètres et vous l'avez reprise plus tard dans votre cours d'analyse à propos de l'étude des géodésiques d'une surface. Il

www.academieroyale.be

revient, pour $n = 2$, à évaluer l'amplitude maximum de l'intervalle sur lequel deux intégrales différentes ne se recoupent pas ou, en définitive, sur lequel une intégrale qui s'annule deux fois s'y annule partout. Il en est ainsi, sans restriction, pour l'équation où manque l'inconnue et vous y ramenez le cas général par des transformations ; cela vous conduit à des critères variés sur l'unicité de l'intégrale. Mais ce procédé est particulier au second ordre. Pour les équations d'ordre supérieur, et voici le point crucial de votre analyse, une méthode, basée sur l'emploi du reste de la formule interpolaire de Newton et du théorème de Rolle, vous donne presque immédiatement la limitation cherchée. La réponse à la question posée tient, en effet, presque tout entière dans deux pages de votre premier mémoire ; pour l'étendre aux domaines complexes il vous suffira, dans le second, d'adapter aux fonctions interpolaires les considérations déduites du théorème de Rolle, ce qui n'est pas toujours facile. On reconnaît bien là votre manière : la vérité vous est apparue en un éclair et, avant que le tonnerre gronde, votre raison l'a rejointe, rapide, sans trahir nul effort ; il n'y a d'essouflés, parfois, que ceux qui aiment à vous suivre.

Lorsqu'un conducteur cylindrique est parcouru par un courant alternatif de grande fréquence, le courant se porte presque entièrement à la

www.academieroyale.be

surface ; ainsi, la résistance d'un fil est plus grande en courant alternatif qu'en courant continu. C'est le skineffect, l'effet de peau, mesuré par le rapport des résistances, et que Lord Kelvin a exprimé en fonction de la fréquence. Vers la fin de 1929, un ingénieur avait publié dans les Comptes-Rendus une formule empirique, reproduisant approximativement les résultats numériques de l'illustre physicien, et un autre ingénieur s'était adressé à vous, cherchant à s'informer du degré de confiance qu'on pouvait accorder à cette formule. Ce vous fut l'occasion, l'année suivante, d'une intéressante communication au Congrès national des sciences, où vous faisiez connaître une expression asymptotique simple de la formule de Lord Kelvin et qui, pratiquement, confirmait celle de l'ingénieur. C'est là votre seule incursion dans le domaine des physiciens et il plaira à ceux-ci qu'elle ait été soulignée.

Mais voici, à courte distance, deux notes peu étendues et combien riches déjà de promesses qui trahissent chez vous de plus hautes préoccupations. Elles vous montrent tourné vers deux problèmes célèbres qui retiennent depuis près de quatre-vingts ans l'attention des mathématiciens ; l'un, posé par Riemann, ou le problème de la représentation conforme ; l'autre, attribué à Dirichlet et qui porte son nom.

www.academieroyale.be

A l'origine, et si l'on en précise un peu les données, le problème de Riemann revenait au suivant. On considère dans le plan de la variable complexe z le domaine D intérieur à une courbe simple de Jordan C et le cercle unité c. Il existe une fonction holomorphe sur D, prenant des valeurs finies sur C et représentant biuniformément D sur l'intérieur de c, contours compris. Cette fonction est unique si l'on fait correspondre un élément de contact intérieur à C à un tel élément dans c. On savait, d'autre part, qu'une fonction harmonique est déterminée univoquement dans une aire par ses valeurs sur le bord, ce qui suggère immédiatement deux questions. Étant donnée une aire A, existe-t-il une fonction harmonique prenant une suite continue de valeurs données sur le bord ; dans l'affirmative, et c'est en cela que consiste le principe de Dirichlet, comment s'y prendre pour calculer cette fonction, et c'est ici le problème de Dirichlet. Telle est la conception que l'on se faisait, du moins il n'y a pas bien longtemps, sur l'origine de ces problèmes dans la plupart des traités d'Analyse et c'était aussi la vôtre, car nous l'empruntons à votre cours de licence. Nous verrons tantôt ce qu'il faut en penser.

Les solutions qui ont été apportées à ces problèmes les montrent étroitement liés. Dans une notice historique où elles étaient passées en revue,

www.academieroyale.be

nous observions, au terme de 1931 : « Parmi les problèmes posés par Riemann (1826-1866) dans sa Dissertation inaugurale parue à Göttingue en 1851, il n'en est peut-être pas qui ait été plus étudié que celui de la représentation conforme. Malgré les nombreux travaux consacrés à ce sujet par Schwarz, Neumann, vers 1870. Ceux de Poincaré, Koebe, Hilbert en 1908, l'intérêt du problème n'a cessé de rebondir sous l'impulsion des recherches plus récentes de M. M. Carathéodory, Lindelöf, Bieberbach, Montel, Julia, de La Vallée Poussin. A l'heure actuelle même, et pour la seconde fois, le problème de la représentation des domaines multiplement connexes a été choisi par M. Julia comme sujet de conférence à la Sorbonne ». Durant toute cette période, l'effort principal a porté essentiellement, d'une part, sur l'étude topologique des domaines les plus généraux, celle-ci restant en relation intime avec la théorie des ensembles ; d'autre part, sur les méthodes conduisant à la fonction de représentation. Au sujet des constructions logiques qui servent d'agencement aux méthodes, signalons un principe sur lequel vous êtes souvent revenu dans vos écrits. Sans vouloir le condamner, vous écartez de vos raisonnements l'axiome du choix arbitraire, ou principe de Zermelo. Vous n'admettez pas par exemple, « qu'un ensemble pourrait être mesurable sans

www.academieroyale.be

que nous ayons pratiquement le moyen de nous en assurer ». Ainsi, « quand nous disons qu'un ensemble est mesurable, nous entendons être en possession effective d'un procédé entièrement défini pour le mesurer ». C'est ce qui vous porte, dans la seconde édition de vos *Leçons sur l'intégrale de Lebesgue* parues en 1934, à introduire une nouvelle définition des ensembles mesurables B et à accentuer le caractère réaliste des énoncés et des démonstrations.

A l'époque où vous publiez votre premier mémoire « Sur l'application de l'intégrale de Lebesgue au problème de la représentation conforme, le problème rajeuni de Riemann revêtait la forme, définitive sans doute, que nous lui connaissons aujourd'hui. Étant donné un domaine étalé — du « schlicht » allemand dont on vous doit la traduction — simplement connexe, peut-on le représenter conformément sur l'intérieur du cercle unité ; que se passe-t-il aux frontières ? Le problème intérieur, le plus facile dites-vous, a été résolu par des procédés divers. De la correspondance des frontières, on sait qu'elle est biunivoque et continue dans le cas où les contours sont des courbes de Jordan. C'est donc au problème des frontières que vous vous attacherez et l'intégrale de Lebesgue, devenue par vos soins un puissant instrument de recherches, vous permettra d'élucider la

www.academieroyale.be

question par une voie très différente de celle des auteurs précédents et, à certains égards, plus directe. Le résultat fondamental de M. Carathéodory ne tarde pas à être vérifié et vous en retrouvez d'autres relatifs à une frontière quelconque limitant l'intérieur de l'aire. Ainsi, les caractères de biuniformité et de bicontinuité de la représentation ne s'étendent aux frontières que si tous leurs points sont complètement accessibles. Mais, dira-t-on, pourquoi cette distinction entre points frontières ? Sans doute parce qu'il en existe d'inaccessibles, dont on ne peut approcher indéfiniment et continûment par l'intérieur, telle une bande de frontière qui serait défendue par une multitude de chicanes.

Nous avons fait tantôt allusion au problème de la représentation conforme des aires multiplement connexes, ou aires à trous dont il était question à l'Institut Poincaré au printemps de 1931. A cette occasion et moins de six mois après la parution de votre grand mémoire dans les Annales de l'École normale supérieure, une des plus profondes découvertes que l'on vous doit était l'objet d'un exposé classique de la part d'un savant étranger. Une information si attentive de l'actualité scientifique n'est possible que là où les maîtres sont déchargés des tâches accessoires de l'enseignement et mis en disposition de se livrer uniquement à la recherche.

www.academieroyale.be

Ce nouveau mémoire traite du problème généralisé de Riemann. De même que son aîné, il a connu diverses fortunes avec Schottky, Koebe, Hilbert qui lui ont circonscrit un réseau de mailles dont il ne peut guère s'échapper. Mais il résiste et personne encore ne l'a forcé comme avait fait, il y a seize ans, M. Carathéodory, dans le cas simple. On se rendra mieux compte de sa position, en précisant quelques données. Un domaine est un ensemble de points tous intérieurs ; il est connexe si deux quelconques de ses points peuvent être joints par une courbe continue dont tous les points appartiennent au domaine. Si sa frontière se compose de $p + 1$ points ou continus séparés, son ordre de connexion est $p + 1$ et son genre, p. Représenter conformément deux domaines l'un sur l'autre, c'est établir entre leurs points une correspondance biunivoque conservant les angles et respectant leur sens. Ce problème est résolu pour deux domaines sans trou ou limités par un seul continu frontière et la solution dépend de trois paramètres réels. Dans le cas général, on prévoit, pour une raison d'Analysis situs, que la solution implique, chez les deux aires, qu'elles soient de même genre, ou présentent le même nombre de trous et l'on sait, depuis Schottky (1877) que, dans le cas $p > 1$, elle dépend de $3p - 3$ paramètres réels. Enfin, le seul domaine canonique envisagé

www.academieroyale.be

jusqu'ici est le plan muni de $p + 1$ coupures circulaires de même centre.

Mais vous n'entendez pas marcher sur les brisées du vieux maître teuton. Un fait simple et bien connu vous met sur la voie : une aire annulaire est conformément représentable sur une certaine couronne circulaire. Ce que vous traduisez : tout domaine borné de genre 1 est conformément représentable sur une aire convenable dont les contours sont des courbes d'égal module d'un polynome du premier degré. Rompant ici avec les conceptions de vos devanciers, vous restituez au problème général de Riemann son cadre naturel en considérant un type canonique d'aires limitées par des ovales d'égal module d'un même polynome auxquelles vous conservez le nom de cassiniennes, par allusion aux cassiniennes planes à n pôles introduites autrefois par Laguerre, qui en tenait la notion de Cassini et que Darboux a rangées plus tard dans une classe remarquable de courbes algébriques, apparentées elles-mêmes aux anallagmatiques. Au temps lointain où il s'appliquait à décrire les ovales qui illustrent encore les ouvrages élémentaires de géométrie analytique, Cassini était loin de se douter que son nom serait un jour associé au problème de la représen tation conforme. Ainsi se vérifie, une fois de plus, cette parole de M. L. de Broglie : « Le rôle des

www.academieroyale.be

géomètres est de cultiver leur science pour elle-même, sans se soucier des applications possibles, et souvent ils travaillent ainsi pour l'avenir, sans le savoir ». C'est donc sur un tel domaine limité par $p + 1$ ovales d'égal module et judicieusement choisies l'une extérieure, les autres comprises dans la première, que vous cherchez à représenter un domaine de genre p. Si la traduction analytique du problème est simple et précise, la recherche de la solution est une tâche ardue qui réclame toutes les finesses et la pénétration de votre analyse. Ce n'est qu'au terme de deux mémoires très rapprochés, que vous parvenez à la dégager. Elle apparaît alors sous une forme géométrique parfaite, dans un énoncé définitif qui porte votre signature ; la voici : « Tout domaine borné de genre p peut être représenté sur une aire dont les frontières sont des courbes fermées d'égal module d'un même polynome de degré egal ou supérieur à p mais ayant seulement p racines distinctes ».

En même temps que ces résultats fondamentaux sont l'objet d'un cours spécial « à Poincaré », cet Institut vous accueille pour entendre vos leçons sur l'extension de la méthode du balayage de Poincaré et le problème de Dirichlet, sujet connexe au précédent et auquel vous venez de consacrer une courte note. Et ceci nous amène à dire un mot du potentiel de surface qui

www.academieroyale.be

marque, ainsi qu'il a été annoncé plus haut, le début d'une seconde phase dans vos préoccupations scientifiques, phase non close pour l'heure et qui, selon votre témoignage, vous ménage encore bien des joies et des émerveillements sur des chemins inexplorés.

Considérant une masse agissante répandue sur une surface, le potentiel newtonien en un point de l'espace est une fonction continue du point, et sa dérivée, dans une direction, est la composante de la force suivant cette direction, tant que le point ne se trouve pas sur la surface. Dans ce dernier cas, la force motrice est généralement indéterminée, tandis que la dérivée normale subsiste. Le critère très général que vous apportez vous donne, en effet, cette dérivée normale par un passage à la limite effectué sur la formule des accroissements finis. L'artifice vous a souvent réussi, notamment en 1928 au sujet des enveloppes de courbes planes et vous y reviendrez en 1940, à propos de Gauss.

On doit à Poincaré une méthode, dite du balayage, pour résoudre le problème de Dirichlet dans l'espace. Sans changement notable, cette méthode, devenue classique, a été étendue au plan où le potentiel logarithmique, qui joue ici le rôle du potentiel newtonien, provient d'une loi d'attraction inversement proportionnelle à la distance. Afin de nous rendre compte du progrès

www.academieroyale.be

accompli au terme de vos leçons, rappelons, qu'à l'origine le principe du balayage consistait dans la possibilité, pour une masse active localisée en un point intérieur à un cercle, d'être étalée sur la circonférence de manière que le potentiel soit conservé à l'extérieur et diminué à l'intérieur du cercle. Cette propriété du potentiel résulte d'une interprétation de l'intégrale de Poisson qui résout le problème de Dirichlet dans le cas du cercle.

C'est par la considération des masses, et non plus des potentiels, que vous allez élargir les résultats de Poincaré et sa méthode elle-même. « Nous nous proposons ici, annoncez-vous dans l'avant-propos de vos leçons, de montrer que la considération de ces masses conduit à des procédés de démonstration plus satisfaisants que ceux utilisés par Poincaré, parce qu'ils sont à la fois plus généraux et plus autonomes. »

Projet redoutable mais bien à votre taille, dont la réalisation au cours de ce troisième cycle donnera la mesure de la puissance créatrice, de cette capacité d'invention dont peut s'approcher parfois l'esprit mathématique. Qu'il nous suffise, et nous ne pourrions guère davantage ici, de dégager la méthode introduite, les terrains et les voies que vous avez ouverts aux recherches, et encore, en nous limitant au plan.

La répartition de la masse, supposée positive, dans une aire plane, est définie par une fonction

www.academieroyale.be

complètement additive d'ensemble, ce qui vous permet d'exprimer le potentiel engendré en un point par une intégrale de Stieltjes étendue à tous les ensembles provenant de la décomposition de l'aire en parties de diamètre infiniment petit. A l'écart des masses, le potentiel est continu ; semi-continu inférieurement à l'intérieur des masses. Cette définition sauvegarde le principe du balayage du cercle à la suite de quoi, toute la masse ayant été refoulée sur la circonférence, le potentiel initial n'est altéré qu'à l'intérieur du cercle. Le même principe est ensuite étendu à des aires particulières susceptibles d'être recouvertes par un nombre limité de cercles. En balayant indéfiniment ceux-ci dans le même ordre, vous définissez un balayage limite de l'aire en vertu duquel toute la masse est transportée à la frontière et s'y trouve distribuée suivant une fonction continue de l'arc frontière ; elle y engendre un potentiel limite, s'exprimant aussi par une intégrale de Stieltjes, continu partout et égal au potentiel initial, sauf à l'intérieur où il prend une valeur moindre ; vous en concluez, pour la distribution limite, qu'elle est unique aux frontières. Une méthode toute pareille vous permet alors de définir le balayage d'une aire à connexion multiple, la frontière étant soumise à certaines conditions de régularité, entre autres celle dont Poincaré avait montré l'importance

www.academieroyale.be

et qui porte son nom. Le cas le plus intéressant et qui donne lieu à un résultat inattendu est celui où l'aire porte une seule masse unité localisée en un point ; la fonction de répartition sur le contour est alors harmonique dans l'aire et tend vers l'unité sur tout arc contenant la position limite du point. Et voici que le miracle s'accomplit ! Le principe de Dirichlet, dont on ne pardonne pas à Riemann de s'être servi à tort, le problème lui-même, résolu beaucoup plus tard par Neumann, Schwarz et Poincaré, à ces deux questions, vous apportez, en six lignes, une réponse définitive où la fameuse fonction harmonique cherchée s'exprime par une intégrale de Stieltjes étendue au contour.

C'est aussi à la lumière de ces principes que vous apportez au problème d'équilibre de Robin une solution presque immédiate. Il propose de répartir sur un contour une masse positive donnée qui soit sans action sur un point intérieur. Votre construction est particulièrement intuitive. Elle vise la répartition sur le contour C et son potentiel, constant à l'intérieur. Vous commencez par étaler conformément la masse sur une circonférence Γ extérieure à C ; elle engendre dans son intérieur, donc dans C, un potentiel constant. Circonscrivant alors à C une suite illimitée de circonférences concentriques et de rayon indéfiniment croissant, vous balayez successivement les aires annulaires

www.academieroyale.be

contenant Γ sur les frontières, dont l'une est le contour C. A la limite, le balayage a transporté toute la masse initiale sur C, tandis que le potentiel est demeuré constant dans C. Encore un artifice de calcul et c'est, sous une forme simple, le potentiel cherché ; il est plus grand sur le contour qu'à l'intérieur. Quant à la distribution sur C, elle est unique et jouit de la propriété de minimer la borne supérieure du potentiel dû à toute distribution de la masse sur le contour ou dans son intérieur.

Mais voici une dernière extension de la méthode du balayage, applicable à des aires limitées par des courbes de Jordan. Elle est propre au plan seulement et fait appel à la représentation conforme. L'élargissement du principe a pour origine cette très remarquable propriété de deux aires à contours réguliers et conformément représentées l'une sur l'autre : si on localise une masse unité en deux points homologues, le balayage refoule, sur deux arcs correspondants des contours, des masses égales. Vous étendez la propriété à des continus contours de Jordan par un balayage limite du type précédent et, chemin faisant, vous résolvez le problème de Dirichlet pour de tels contours. Vous ne tardez plus alors à donner au principe son sens le plus large et, au potentiel dû à la distribution frontière, sa forme définitive par une intégrale de Stieltjes valable dans tout le plan.

www.academieroyale.be

Cette analyse un peu poussée d'un chapitre de votre œuvre était nécessaire afin que l'on saisît mieux, sur un exemple concret et combien vivant, tout le poids d'invention qu'elle comporte, tandis que les initiés auront été mis en mesure, s'ils ne l'étaient déjà, de suivre le développement harmonieux d'une de vos conceptions les plus chères. Mais elle s'imposait aussi à un autre point de vue. Elle nous introduit, en effet, au cœur même de votre œuvre capitale au cours de cette dernière décade, de celle dont on dira peut-être un jour qu'elle fut la plus puissante portant votre signature et même la mieux représentative, sinon des tendances, du moins des réalisations de l'école française contemporaine où vous êtes invariablement associé aux Baire, Lebesgue, Borel, Hadamard et Montel. Cette œuvre maîtresse date de 1937 et s'intitule : « Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet ». Il eût été difficile d'en dire un mot sans l'introduction que nous lui avons consacrée plus haut dans le cas le plus simple. On peut juger aujourd'hui que vos leçons de 1931, vos publications ultérieures sur l'utilisation du balayage dans la représentation conforme (1932), son extension à une aire connexe non étalée (1933), vos recherches sur les fonctions harmoniques définies a priori par une intégrale de Stieltjes, de leurs propriétés dans un domaine ouvert limité

www.academieroyale.be

par des surfaces à courbure bornée, de leur détermination dans une aire sous la condition de s'annuler en tout point du bord sauf un (1934), toutes ces contributions, à peine citées ici, ont servi d'avant-propos de mise au point de ces nouvelles méthodes à l'aide desquelles vous allez aborder le problème généralisé de Dirichlet.

Nous voilà bien fixé à présent sur le principe du balayage devenu un instrument de démonstration que vous maniez avec une habileté déconcertante. Il a la vertu, répétons-le, de conserver le potentiel sur une aire fermée quand la masse tout entière y est refoulée de l'intérieur, soit, en partie seulement, de l'extérieur et qu'il y a déperdition de masses. Un balayage polaire vous avait conduit aux solutions des problèmes, devenus ordinaires, de Dirichlet et de Robin par une intégrale de Stieltjes prise par rapport aux masses étalées sur la frontière. Vos méthodes resteront efficaces dans les cas les plus généraux à condition d'y adjoindre deux notions fondamentales ; la première, celle de capacité introduite par M. N. Wiener, fondée par vous sur la considération des masses et étendue, dès 1931, aux ensembles bornés ; la seconde, ou le principe de minimum déjà utilisé par Gauss et que M. O. Frostman vient de remettre en honneur. Dès 1936, vous êtes à même de communiquer les grandes lignes de vos résultats au cours de trois conférences à

www.academieroyale.be

l'Université de Strasbourg et ils paraissent, un an plus tard par les soins de son Institut mathématique.

Dans son « Essai sur le développement de la théorie des fonctions », M. G. Julia caractérise en ces termes l'orientation prise par les recherches modernes : « Aux frontières du domaine d'existence, l'allure de la fonction relève surtout de la théorie des fonctions de variable réelle, les possibilités nouvelles révélées par les progrès de celle-ci se réalisant presque toutes aux frontières dans les problèmes naturels sur les fonctions analytiques qu'on pouvait croire les plus simples ». Le problème généralisé de Dirichlet s'est posé précisément à l'occasion d'une singularité à la frontière découverte par M. Lebesgue en 1912. Tant que la frontière est régulière partout, sauf au plus en un nombre fini de points irréguliers, le problème admet une solution et une seule. En est-il encore de même lorsque, plus généralement, la frontière porte un ensemble de points irréguliers où la fonction harmonique, continue au voisinage, est discontinue ?

Pour répondre à cette question, il convenait d'introduire une notion capable de mesurer le degré de raréfaction des points irréguliers en vue d'assigner à leur ensemble un minimum en dehors duquel le problème admet une solution unique. Cette notion est celle de capacité d'un ensemble,

www.academieroyale.be

issue elle-même du problème de la distribution d'équilibre sur un conducteur : lorsque celui-ci est soustrait à toute influence la charge électrique prend sur la surface une distribution telle que son potentiel est constant à l'intérieur du conducteur ; si cette constante est égale à l'unité, le potentiel est appelé potentiel du conducteur et la charge de distribution qui l'engendre, la capacité du conducteur. Cette conception physique de la capacité, vous allez la transposer sur le plan des ensembles boréliens et la plier aux résultats que l'on vous doit sur les fonctions positives d'ensemble. Ainsi, une masse portée par un ensemble E est définie simplement comme une fonction complètement additive de l'ensemble E et son potentiel en un point s'exprime, le plus généralement, par une intégrale sur E de Stieltjes-Lebesgue prise par rapport aux masses ; inversement, la masse est complètement déterminée par le potentiel. Vous êtes revenu une dernière fois sur ce point en 1938. D'après le problème de Robin, où l'ensemble E est régulier, il existe une distribution d'équilibre des masses à la frontière et une seule, telle que le potentiel soit constant et égal à l'unité dans E ; la masse ainsi répartie à la frontière est la capacité de l'ensemble. D'une manière générale, la capacité d'un ensemble borné est la borne supérieure des charges qu'il peut soutenir sans que son potentiel surpasse l'unité ;

www.academieroyale.be

elle est nulle si toute charge attribuée à l'ensemble lui donne un potentiel non borné. Dans vos recherches, la notion d'ensemble de capacité nulle intervient comme un ensemble d'exception, tout comme les ensembles de mesure nulle dans la théorie de l'intégration ; elle est la clé des démonstrations d'unicité.

La seconde notion à introduire est relative à l'accessibilité du minimum d'une certaine intégrale I construite par Gauss dans son célèbre mémoire de 1840 sur la théorie du potentiel newtonien, mémoire qu'en avril 1940 vous avez analysé avec tant de ferveur et tant de charme devant un petit groupe de privilégiés réunis à la Société mathématique de Belgique. L'existence d'une fonction minimisante de ce qu'on est convenu d'appeler de nos jours l'intégrale d'énergie et de l'intégrale I était regardée par Gauss, ainsi qu'elle le fut longtemps encore après lui, comme chose évidente, et s'il en a conclu légitimement à l'existence d'une distribution d'équilibre pour une masse positive retenue sur une surface fermée, il s'est trompé en affirmant la possibilité d'étaler sur la surface une couche dont le potentiel prend sur cette surface une suite continue de valeurs données. Une fonction continue sur une surface, fût-elle sphérique, n'est pas toujours un potentiel. Ainsi que vous en avez fait la remarque, elle y jouit de vertus privilégiées insoupçonnées à

www.academieroyale.be

l'époque de Gauss et qui doivent le jour aux travaux de Lebesgue sur l'intégration. Quoi qu'il en soit, Gauss était en avance sur son temps et, dans le cas général d'un ensemble fermé E, la démonstration du postulat du minimum s'est fait attendre pendant 95 ans. On la trouve dans la thèse, inspirée de vos travaux sur le balayage, d'un jeune mathématicien, M. Frostman, qui la publia en 1935 ; elle se fonde sur la méthode de variation de Gauss visant à la recherche d'une distribution rendant minimum l'intégrale d'énergie. Le fait qu'une telle distribution existe est considérable et vous n'avez pas manqué de le souligner. Il rend compte des difficultés auxquelles a donné lieu la recherche du minimum de l'intégrale de Riemann-Dirichlet, qui n'est autre que l'intégrale d'énergie. Ces difficultés provenaient de ce que, dans cette intégrale, la masse était donnée au moyen d'une densité ; il est donc naturel qu'une densité limite ne puisse être trouvée que sous certaines conditions topologiques ; la considération de la masse plutôt que la fiction classique de densité est venue dissiper définitivement le malentendu dont fut entouré jusqu'ici le principe dit de Dirichlet.

Le même principe du minimum occupe le sommet de votre travail de 1937, mais vous l'abordez par l'intégrale I de Gauss et sans recourir à l'axiome du choix auquel, décidément

www.academieroyale.be

vous ne ferez jamais grâce. Tant pis pour les cinq lettres de vos amis du Collège de France ! C'est ainsi que vous vous employez à construire la distribution minimisante limite d'une suite convergente de telles distributions sur des domaines réguliers et à montrer qu'elle est unique. Ce vous est l'occasion d'étendre la méthode du balayage à des ensembles fermés les plus généraux et de montrer que ses propriétés subsistent, sauf au plus sur un ensemble de points de capacité nulle. Pas plus que dans les cas simples, le problème généralisé de Dirichlet ne résistera longtemps à la puissance de votre méthode et voici qu'une fois encore sans qu'elle porte la trace du long effort qu'elle vous a demandé, la solution apparaît dans son admirable simplicité : il existe une fonction harmonique et une seule répondant à la question, sauf au plus pour les points d'un ensemble de capacité nulle. Mais à peine résolu le problème comporte à vos yeux un nouvel élargissement, inspiré de la considération des points frontières qui sont accessibles de l'intérieur du domaine. Qu'importe, l'énoncé de la solution s'en trouvera à peine modifié sur un point ; elle a acquis sa forme parfaite et il sera désormais bien difficile d'y rien changer.

En passant par les mains de Dirichlet, de Riemann et de Poincaré, le legs précieux fait par Gauss à la postérité, est devenu par vos soins

www.academieroyale.be

un pur joyau, et il est peu probable qu'un autre artiste vous le ravisse jamais. L'origine de cette longue suite de recherches remonte à plus d'un siècle et vous en avez décrit les circonstances au cours de votre conférence sur Gauss quelques jours avant la tourmente actuelle. Avec votre permission, il en sera cité un passage inédit, ne fût-ce que pour clore notre exposé sur une note moins abstruse qui nous vient directement de vous. Le portrait de Gauss, sa conception mathématique du potentiel, la place qui lui revient dans les recherches modernes y sont évoquées dans un saisissant raccourci.

« Le mémoire de Gauss, dont nous célébrons cette année le centenaire, n'a pas la même envergure que l'œuvre monumentale de sa première jeunesse. Quarante ans ont passé sur les *disquisitiones*, comme aussi sur le front de Gauss. Il a maintenant 63 ans. Il a été physicien, astronome, géomètre, créateur incontesté dans tous les domaines. Maintenant reclus dans sa retraite, le solitaire de Göttingue s'est retranché dans ses propres pensées et son mémoire sur le potentiel porte la marque frappante de son étrange égocentrisme... Peut-être le vieux Maître pense-t-il qu'il ne doit rien à personne et peut-être n'a-t-il qu'à moitié tort car, il faut bien le reconnaître, l'esprit qui a conçu et mené ce travail est bien le sien et le sien seul. Pour la première fois, la

www.academieroyale.be

théorie du potentiel est traitée comme une branche de mathématique pure, se suffisant à elle-même et ne cherchant aucun appui sur les faits d'expérience. Jusque là, les mathématiciens s'étaient contentés de déterminer les conditions de certains équilibres dont les phénomènes électrostatiques leur montraient la réalisation et dont l'existence était considérée comme un fait. Mais Gauss coupe tous les ponts avec la physique expérimentale. De là, ces théorèmes d'existence dont il est le premier à apercevoir la nécessité, pour lesquels il tente des démonstrations qui, tout imparfaites qu'elles soient, malgré leurs lacunes et leurs défaillances, gardent l'empreinte ineffaçable de son génie et le rapprochent plus de nous que tous ses prédécesseurs et que ses successeurs immédiats.

C'est du point de vue de Gauss que sont sorties les recherches modernes sur le problème généralisé de Dirichlet et ceux qui, comme moi, s'y sont intéressés quelque peu, doivent reconnaître dans le vieux maître de Göttingue le plus glorieux de leurs ancêtres ».

* * *

Dès 1944, de La Vallée Poussin avait écrit un ouvrage sur *Le Potentiel logarithmique. Balayage et Représentation conforme* où il exposait ses

www.academieroyale.be

dernières recherches. Les difficultés d'impression d'après-guerre retardèrent la publication de ce livre. Lorsque en 1948 fut créé le Centre Belge de Recherches Mathématiques, celui-ci eut à cœur d'assurer l'impression de cette œuvre, rendant ainsi hommage à celui qui avait accepté d'être son Président d'Honneur.

La lecture des discours de G. Verriest et de M. F. Simonart montre que dans tous les domaines qu'il a abordés, de La Vallée Poussin a apporté des résultats fondamentaux. Il s'est rangé parmi les grands mathématiciens de l'époque contemporaine et a fait le plus grand honneur à la Belgique. Tous avaient une profonde admiration pour son œuvre mathématique, mais ceux qui l'ont connu de près avaient une aussi profonde estime pour l'homme, juste et bon, bienveillant pour les jeunes.

Si de La Vallée Poussin a pu consacrer tout son temps à son enseignement et à ses recherches, il le doit à l'atmosphère familiale créée par Madame de La Vallée Poussin. Il lui a rendu hommage lors de son jubilé de 1943 par d'émouvantes paroles que M. Paul Montel a reproduites dans la notice publiée plus haut.

Liège, le 10 mai 1966. Lucien GODEAUX.

www.academieroyale.be

BIBLIOGRAPHIE

Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique.

Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, 1892-1893, 82 p.
Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques, 1896, 59 p.
Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, 1896, 32 p.
Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, 1899, 74 p. Ce mémoire a été reproduit en tête du volume du Colloque sur la théorie des nombres du C.B.R.M. (Louvain, Librairie Universitaire, 1956).

Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique.

Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de Fourier, 1908, pp. 193-254.
Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes, 1908, pp. 319-410.
L'abstraction mathématique et la réalité. Lecture, 1908, pp. 1131-1156.
Réduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, 1910, pp. 768-798.

www.academieroyale.be

Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, 1910, pp. 808-844.

Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe, 1911, pp. 119-211.

Sur l'unicité du développement trigonométrique, 1912, pp. 702-718.

Sur l'unicité du développement trigonométrique (note additionnelle), 1913, pp. 9-14.

Conférence des Académies des Sciences interalliées tenue à Londres en octobre 1918. Compte rendu, en collaboration avec MM. Lecointe et Massart. 1919, pp. 49-61.

Conférence des Académies des Sciences interalliées tenue à Paris en novembre 1918, Compte rendu, en collaboration avec MM. Lecointe et Massart, 1919, pp. 63-81.

Sur le mouvement d'un solide de révolution homogène fixé par un point de son axe, 1923, pp. 55-58.

Le temps et la relativité restreinte. Discours. 1923, pp. 569-611.

Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes, 1931, pp. 10-27.

Sur l'extension de la méthode de balayage à une aire connexe non étalée, 1933, pp. 1217-1229.

Utilisation de la méthode de balayage dans la représentation conforme, 1932, pp. 385-400.

www.academieroyale.be

Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels. 1938, pp. 368-384, 672-689.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. Première Partie.

Sur une démonstration des formules de Fourier généralisées. 1891, t. XV, pp. 39-41.
Sur les intégrales à limites infinies d'une forme particulière. 1891, t. XVI, pp. 6-8.
Sur certaines inégalités et leur application au calcul intégral. 1891, t. XVI, pp. 8-11.
Sur la série de Weierstrass représentant une fonction continue sans dérivée. 1892, t. XVI, pp. 57-61.
Sur l'intégration des équations différentielles. 1892, t. XVII, pp. 8-12.
Rapport sur un mémoire de Ph. Gilbert intitulé « Sur l'emploi des cosinus directeurs de la normale dans la théorie de la courbure des surfaces. » 1893, t. XVIII, pp. 1-5.
Sur la méthode de Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet. 1893, t. XVIII, pp. 11-12.
Sur la théorie des formes quadratiques binaires. 1895, t. XIX, pp. 59-60.
Sur les fractions continues et les formes quadratiques. 1895, t. XIX, pp. 111-113.
Sur la série de Lambert. 1896, t. XX, pp. 56-62.

www.academieroyale.be

Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques. 1898, t. XXII, pp. 84-90.
Sur les surfaces de révolution minimum. 1899, t. XXIV, pp. 49-52.
Sur la définition de l'aire des surfaces courbes. 1903, t. XXVII, pp. 90-91.
Sur la fonction sans dérivée de Weierstrass. 1903, t. XXVII, pp. 92-95.
Sur la réduction des équations différentielles linéaires à une inconnue. 1904, t. XXIX, pp. 63-67.
Intégration de l'équation de Bessel sous forme finie. 1905, t. XXIX, pp. 140-143.
Définition des intégrales définies dans le cas où la fonction sous le signe intégral devient infinie. 1905, t. XXIX, p. 206.
Sur le mouvement instantané le plus général d'un solide. 1906, t. XXXI, pp. 73-77.
Démonstration nouvelle du théorème de Bernoulli. 1907, t. XXXI, pp. 219-236.
Sur la représentation d'un plan sur un autre conservant les circonférences. 1907, t. XXXII, pp. 70-72.
Le théorème de Holditch. 1909, t. XXXIII, p. 119.
Sur l'approximation minimum d'un système d'équations ; 1909, t. XXXIII, p. 173.
Sur la transformation d'une intégrale multiple en une intégrale simple. 1911, t. XXXV, pp. 189-190.

www.academieroyale.be

Sur la définition de la différentielle totale et sur les intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites. 1913, t. XXXVIII, pp. 67-72.

Sur les propriétés générales des fonctions elliptiques. 1914, t. XXXVIII, pp. 157-161.

Sur les enveloppes de courbes planes. 1928, t. XLVIII, pp. 5-9.

Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr. 1927, t. XIVII, pp. 141-158.

Note complémentaire et explicative. 1928, t. XLVII, pp. 56-57.

Sur l'unicité de la détermination de l'intégrale d'une équation linéaire d'ordre n par n points dans le domaine complexe. 1929, t. XLIX, pp. 11-12.

Application de l'intégrale de Lebesgue au problème de la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur un cercle. 1930, t. LII, pp. 23-24.

Mouvement quasi pendulaire du pendule sphérique. 1932, t. LII, pp. 16-22.

Mouvement quasi pendulaire dans le vide à la surface de la terre. Pendule de Foucault. 1932, t. LII, pp. 83-98.

Sur la résolution de l'équation de Gaus : *sin*(z-q) = *ysin*4z. 1932, t. LII, pp. 306-313.

Expression nouvelle d'une fonction harmonique positive dans une aire et nulle en tout point du bord sauf un. 1933, t. LIII, pp. 113-122.

www.academieroyale.be

Détermination des fonctions harmoniques dans une aire A et qui s'annulent en tout point du bord sauf un. 1934, t. LIV, pp. 55-67.

Sur la différentielle totale. 1950, t. LXIV, pp. 74-75.

Deuxième Partie.

Études sur les intégrales à limites infinies pour lesquelles la fonction sous le signe est continue. 1892, t. XVI, pp. 150-180.

Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson. 1892, t. XVII, pp. 18-35.

Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. 1893, t. XVII, pp. 323-333.

Sur la géométrie non euclidienne. 1894, t. XIX, pp. 17-26. Reproduit dans Mathesis, 1895.

Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers.

Première partie : La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général. 1896, t. XX, pp. 183-256.

Deuxième partie : Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme $Mx + N$. 1896, t. XX, pp. 281-362.

Troisième partie : Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif. 1896, t. XX, pp. 363-397.

Résumé de la deuxième et de la troisième

www.academieroyale.be

partie. 1896, première partie des Annales, t. XXI, pp. 1-13.

Quatrième partie : Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif. 1897, t. XXI, pp. 251-342.

Résumé de la quatrième partie. 1897, Première partie des Annales, t. XXI, pp. 60-72.

Cinquième partie : Les nombres premiers représentables simultanément par une forme linéaire et une forme quadratique. 1897, t. XXI, pp. 343-368.

Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée. 1901, t. XXVI, pp. 1-12. Reproduit dans Mathesis, 1901.

Continuité des intégrales des équations différentielles contenant un paramètre. Existence et continuité de leurs dérivées par rapport au paramètre. 1906, t. XXX, pp. 288-294.

Sur les équations aux différentielles totales. 1906, t. XXX, pp. 295-298.

Études sur le théorème de Bernoulli. 1907, t. XXXI, pp. 119-134.

Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental de la théorie des covariants des formes binaires. 1910, t. XXXIV, pp. 223-229.

Sur la méthode de l'approximation minimum. 1910, t. XXXV, pp. 1-16.

www.academieroyale.be

Sur les théorèmes d'existence de la théorie du plan osculateur. 1926, t. XLVI, pp. 524-542.

Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr. 1927, t. XLVII, pp. 141-158.

Le théorème de Picard du point de vue topologique. 1955, t. 69, pp. 37-49 ; 1956, t. 70, pp. 81-86.

Fonctions périodiques douées de valeurs exceptionnelles. Structure. Théorème de Picard. 1957, t. 71, pp. 73-88.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences

Sur les zéros de ζ (s) de Riemann, 1916, t. 163, pp. 418-421, 471-478.

Sur les fonctions quasi-analytiques de variables réelles. 1923, t. 176, pp. 635-638.

Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. 1930, t. 190, pp. 782-784; 1931, t. 192, pp. 128-131.

Sur la représentation des aires planes multiplement connexes, 1930, t. 190, pp. 1414-1418.

Sur quelques extensions de la méthode de balayage de Poincaré et sur le problème de Dirichlet. 1931, t. 192, pp. 651-653.

Propriétés des fonctions harmoniques de deux variables dans une aire ouverte limitée par des lignes particulières. 1932, t. 195, pp. 92-94.

www.academieroyale.be

Périodiques divers.

Recherches sur la convergence des intégrales définies. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1892, pp. 421-467.

Note sur les séries dont les termes sont fonctions continues d'une variable complexe. *Jornal de Sciencias mathematicas et astronomicas*, 1892-93.

Réduction des intégrales multiples généralisées. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1899, pp. 191-204.

Éloge funèbre du professeur Joseph Carnoy. Annuaire de l'Université de Louvain, 1907.

Sur les enveloppes de courbes planes qui ont un contact d'ordre supérieur avec leurs enveloppées. *Memorie dell'Accademia Ponific. dei Nuovi Lincei*, 1910. 12 p.

Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1911, t. XXXI, pp. 296-299.

Démonstration simplifiée du théorème fondamental de M. Montel sur les familles normales de fonctions. *Annals of Mathematics*, 1915, pp. 5-11.

Sur l'intégrale de Lebesgue. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1915, pp. 435-501.

www.academieroyale.be

Sur les expressions qui s'écartent le moins de zéro dans un intervalle. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1917, pp. 53-56.

L'approximation des fonctions d'une variable réelle. L'Enseignement Mathématique, 1918, pp. 1-29.

Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent. Comptes Rendu du Congrès international des Mathématiciens de Strasbourg, 1920.

Éloge funèbre du Professeur André Dumont. Annuaire de l'Université de Louvain, 1920-1926, pp. 84-98.

Sur une propriété des fonctions entières considérées dans un demi-plan. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Roma*, 1922-23, 7 p.

L'approximation des fonctions de variables réelles. *Atti della Accademia Pontif. dei Nuovi Lincei*, 1923, 32 p.

Discours prononcé lors de la manifestation en l'honneur de M. le Professeur E. Pasquier. Louvain, Meulemans, 1923, pp. 17-30.

Quatre leçons sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1924, pp. 175-203.

On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic fonctions. *The Rice Institute Pamphlet*, 1925, pp. 105-172.

www.academieroyale.be

Discours prononcé aux funérailles de M. Ernest Pasquier, le 10 avril 1926. Annuaire de l'Université Catholique de Louvain, 1927-29, pp. 80-91.

Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1929, pp. 125-144.

Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes. Annales de l'École normale supérieure, 1930, pp. 267-309.

Sur l'expression asymptotique de la formule de Lord Kelvin donnant les rapports des résistances d'un fil au courant alternatif ou continu. Comptes Rendu du Congrès National des Sciences, Bruxelles, 1930, pp. 69-83.

Extension de la méthode de balayage de Poincaré et problème de Dirichlet. Annales de l'Institut H. Poincaré, 1932, pp. 169-232.

Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbures bornées. *Annali della Scuola Normale di Pisa*, 1933, pp. 167-197.

Que sera la Revue des Questions Scientifiques ? *Revue des Questions Scientifiques*, 1940, pp. 333-335, 1946.

Allocution prononcée par le Baron Charles de La Vallée Poussin, Président d'honneur du

www.academieroyale.be

III^e Congrès National des Sciences. Bruxelles, 1950, pp. 40-41.
Gauss et la théorie du potentiel. *Revue des Questions Scientifiques*, 1962, pp. 314-330.

Ouvrages.

Cours d'Analyse infinitésimale. Première partie. Autographie. Louvain, Uystpruyst, 1898, in-4°, 212 pages.
Cours d'Analyse infinitésimale. Deuxième partie. Autographie. Louvain, Uystpruyst, 1899, in-4°, 222 pages.
Cours d'Analyse infinitésimale. Tome I. Louvain Uystpruyst et Paris, Gauthier-Villars, 1906, in-8° de 372 pages.
Cet ouvrage a eu de nombreuses éditions. Il en est actuellement à sa 12e édition (1959). Depuis la 8e édition (1938), il est publié en collaboration avec M.F. Simonart.
Cours d'Analyse infinitésimale. Tome II. Louvain Uystpruyst et Paris, Gauthiers-Villars, 1906, in-8° de 440 pages.
Cet ouvrage en est actuellement à sa 9e édition (1957). Depuis la 8e édition (1949), il est publié en collaboration avec M.F. Simonart.
Leçons de Mécanique Analytique. Tome I. Vecteurs, Cinématique, Dynamique du point, Statique. Louvain, Uystpruyst et Paris,

www.academieroyale.be

Gauthier-Villars, 1924, in-8° de VII + 281 pages. Seconde édition en 1932.

Leçons de Mécanique Analytique. Tome II. Dynamique des systèmes, Dynamique du corps solide, Équations de la Mécanique, Mécanique des fluides. Louvain, Uystpruyst et Paris, Gauthier-Villars, 1925, in-8° de XI + 315 pages.

Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Paris, Gauthier-Villars, 1916, in-8° de VIII + 156 pages. Seconde édition en 1934.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, Gauthier-Villars, 1919, in-8° de VI + 151 pages.

Introduccion a las teorias de conjuntos y de funciones. Madrid, Université, 1921, in-8° de XXII + 109 pages.

Allocution prononcée le 24 mai 1924 au Cinquantenaire de la Société Mathématique de France. Paris, Gauthier-Villars, 1925, pp. 32-36.

Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet. Paris, Hermann, 1937, in-8° de 46 pages.

Le potentiel logarithmique. Balayage et Représentation conforme. Paris, Gauthier-Villars, 1949, in-8° de VII + 452 pages.