LUCIEN GODEAUX

SOPRA UNA RAPPRESENTAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI CREMONIANE FRA DUE PIANI

Conferenza tenuta il 19 aprile 1961

1. La teoria delle trasformazioni birazionali del piano è dovuta a CREMONA. Prima di lui, si conoscevano, oltre le omografie, le trasformazioni quadratiche. In una prima memoria, CREMONA ha costruito trasformazioni birazionali di ordine maggiore di due, prodotti di trasformazioni quadratiche (1). In una seconda memoria, egli ha dato la teoria generale delle trasformazioni birazionali del piano, trasformazioni sovente chiamate, per questa ragione, cremoniane (2).

Le trasformazioni birazionali del piano sono state oggetto di molti lavori. Se ne troverà un sunto e la bibliografia nel nostro fascicolo *Mémorial des Sciences Mathématiques* (3). In questa conferenza, vogliamo esporre una rappresentazione delle trasformazioni cremoniane fra due piani che abbiamo dato altrove (4). Si vedrà come da alcune relazioni fonzionali, si deducano agevolmente le proprietà di queste trasformazioni.

---

(1) L. CREMONA, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, I «Memoria dell'Accademia di Bologna», 1867, Opere t. II.

(2) L. CREMONA, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, II «Memoria dell'Accademia di Bologna», 1865, Opere t. II.

(3) L. GODEAUX, *Les transformations birationnelles du plan*, «Memorial des Sciences Mathématiques», fasc. XXII, 1927, seconde édition, fasc. CXXII, Paris, Gautiers-Villars, 1953. Vedere anche, per una esposizione della teoria, la nostra *Géométrie algébrique*, tome I, Paris, Masson, 1948.

(4) L. GODEAUX, *Sur la représentation des transformations birationnelles planes*, «Bullettin de la Société roy. des Sciences de Liége», 1942, *Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace*, «Mémoires in-8° de l'Academie roy. de Belgique», 1949.

2. Consideriamo una trasformazione cremoniana T fra due piani σ, σ'. Alle rette a di σ, T fa corrispondere nel piano σ' curve A' di ordine n ed alle rette a' di σ', T^{-1} fa corrispondere curve A di ordine n del piano σ. Le curve A formano una rete omoloidica $|A|$, cioè una rete di grado effettivo uno. Le curve A' formano anche una rete omoloidica $|A'|$.

Consideriamo nel piano σ il sistema (completo)

$$|D| = |a + A|.$$

Le curve D hanno l'ordine $n + 1$ e si comportano nei punti-base di $|A|$ come le curve A. Il grado del sistema $|D|$ è $2n + 2$ ed il suo genere è $n - 1$. Diciamo r la dimensione di questo sistema.

Sopra una retta a, le curve D tagliano una serie lineare di grado $n + 1$ e di dimensione $n + 1$. Le curve D che passano per $n + 2$ punti di a contengono questa retta e sono completate dalle curve di $|A|$. Abbiamo dunque $r - (n + 2) = 2$ e quindi $r = n + 4$. La dimensione di $|D|$ è $n + 4$.

Riferiamo proiettivamente le curve D agli iperpiani di uno spazio lineare S_{n+4} ad $n + 4$ dimensioni. Ai punti di σ corrispondono nello spazio S_{n+4} i punti di una superficie F di ordine $2n + 2$.

Ai punti di una retta a corrispondono i punti di una curva razionale C, di ordine $n + 1$ ed ai punti di una curva A, i punti di una curva razionale C' anchè di ordine $n + 1$. Se noi chiamiamo ancora D le sezioni iperpiane di F, abbiamo

$$D \equiv C + C'.$$

Le curve C, C' generano reti omoloidiche $|C|$, $|C'|$ ed una curva C incontra una curva C' in n punti.

Osserviamo che gli iperpiani che contengono una curva C tagliano ancora F in una curva della rete $|C'|$. Questi iperpiani sono dunque ∞^2 ed una curva C appartiene ad uno spazio lineare di dimensione $n + 1$. Le curve C sono dunque curve razionali normali. Anche le curve C' sono curve razionali normali. Gli n punti comuni ad una curva C ed a una curva C' appartengono ad uno spazio di dimensione $n - 1$ e sono quindi indipendenti.

Consideriamo adesso nel piano σ' il sistema

$$| D' | = | a' + A' | .$$

Questo sistema ha anche il grado $2n + 2$, il genere $n - 1$ e la dimensione $n + 4$. Riferiamo proiettivamente le curve D' agli iperpiani di uno spazio S_{n+4} a $n + 4$ dimensioni. Ai punti di σ' corrispondono punti di una superficie F' di ordine $2n + 2$.

Da un iperpiano ξ di S_{n+4} si passa ad una curva D mediante una omografia H, da questa curva D, T fa passare ad una curva D' e da questa curva, si passa ad un iperpiano ξ' di S'_{n+4} mediante una omografia H'. Si vede agevolmente che ad un fascio di iperpiani ξ corrisponde un fascio di iperpiani ξ', quindi la operazione HTH' è una omografia tra S_{n+4} e S'_{n+4}. Questa omografia fa evidentemente corrispondere F' a F.

Supponiamo gli spazi S_{n+4}, S'_{n+4} sovrapposti. Possiamo scegliere le omografie H, H' per avere $HTH' = 1$. Le superficie F, F' coincidono e si vede che alle curve C corrispondono nel piano σ' le curve A' ed alle curve C' le rette a'.

La superficie normale F rappresenta le coppie di punti di σ, σ' corrispondenti nella trasformazione T. Possiamo dire che F rappresenta la trasformazione T.

3. Supponiamo che nelle reti $| A |$, $| A' |$ le curve A, A' abbiano tangenti variabili nei punti-base. Allora anche le curve D, D' hanno tangenti variabili in questi punti.

Diciamo $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ i punti base di $| A |$ e $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ le loro molteplicità per le curve A e D; $O'_1, O'_2, \ldots, O'_\nu$, i punti base di $| A' |$ e $s'_1, s'_2, \ldots, s'_\nu$, le loro molteplicità per le curve A' e D'. Essendo le reti $|A|$, $|A'|$ omoloidiche, si ha

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1,$$

$$s_1'^2 + s_2'^2 + \ldots + s_{\nu'}'^2 = n^2 - 1.$$

Consideriamo il punto O_1 ed una retta p passante per questo punto. Le curve D che toccano la retta p nel punto O_1 formano un sistema lineare di dimensione $n + 3$. A queste curve D corrispondono in S_{n+4} iperpiani passanti per un punto P di F. Questo punto corrisponde al punto infinitamente vicino di O_1 sulla retta p. Quando varia p, il punto P genera una curva G_1 di F, immagine dell'intorno (del primo ordine) di O_1. La curva G_1 è di ordine s_1.

Le curve D che hanno la molteplicità $s_1 + 1$ nel punto O_1 formano un sistema di dimensione $n + 4 - (s_1 + 1) = n + 3 - s_1$. A queste curve corrispondono gli iperpiani contenenti G_1, dunque questa curva appartiene ad uno spazio lineare di dimensione s_1. La curva G_1 è una curva razionale normale.

Ai punti $O_2, O_3, \ldots, O_\nu$ corrispondono sulla superficie F curve razionali normali $G_2, G_3, \ldots, G_\nu$ di ordine $s_2, s_3, \ldots, s_\nu$. Queste curve non si incontrano e non incontrano le curve C, ma incontrano le curve C'.

I punti di G_1 rappresentano le coppie di punti omologhi di T di cui uno è infinitamente vicino ad O_1. I punti di queste coppie del piano σ' formano una curva fondamentale Ω'_1. La curva G_1 incontra le curve C' in s_1 punti, dunque le rette di Ω'_1 in s_1 punti e Ω'_1 è di ordine s_1.

Diciamo $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$ le curve fondamentali della rete $|A'|$ omologhe dei punti $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$; esse hanno gli ordini $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$.

Ai punti $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{\nu'}$ corrispondono sulla superficie F curve razionali normali $G'_1, G'_2, \ldots, G'_{\nu'}$ di ordine $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{\nu'}$. Queste curve non si incontrano e non incontrano le curve C', ma incontrano le curve C. A queste curve corrispondono nel piano σ le curve fondamentali $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{\nu'}$ della rete $|A|$; esse hanno gli ordini $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{\nu'}$.

Supponiamo che le curve G_i, G'_k si incontrino in α_{ik} punti. Ad uno di questi punti corrisponde nel piano σ un punto infinitamente vicino ad O_i appartenente alla curva Ω_k e nel piano σ', un punto infinitamente vicino ad O'_k appartenente alla curva Ω'_i. Dunque la molteplicità di O_i per la curva Ω_k e quella del punto O'_k per la curva Ω'_i sono eguali.

4. Consideriamo una curva A. Da un lato, questa curva appartiene al sistema delle curve di ordine n ed ad essa corrisponde sulla superficie F una curva del sistema $|nC|$.

Da un altro lato, la curva A passando $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ volte per i punti $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, ad essa corrisponde una curva

$$C' + s_1G_1 + s_2G_2 + \ldots + s_\nu G_\nu .$$

Si ha dunque la relazione funzionale

$$nC \equiv C' + s_1G_1 + s_2G^2 + \ldots + s_\nu G_\nu . \tag{1}$$

Consideriamo la curva Ω_1 di ordine s'_1, passanti $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{\nu 1}$ volte per i punti $O_1, O_2, \dots, O_\nu$. Da un lato, alla curva Ω_1 corrisponde una curva del sistema $|\, s'_1 C \,|$ e da un altro lato, la curva

$$G'_1 + \alpha_{11} G_1 + \alpha_{21} G_2 + \dots + \alpha_{\nu 1} G_\nu .$$

Abbiamo dunque la relazione funzionale

$$s'_2 C \equiv G'_1 + \alpha_{11} G_1 + \alpha_{21} G_1 + \dots + \alpha_{\nu 1} G_\nu .$$

Nello stesso modo, abbiamo

$$(2) \qquad s'_i C \equiv G'_i + \alpha_{1i} G_1 + \alpha_{2i} G_2 + \dots + \alpha_{\nu i} G_{\nu'} \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ \nu').$$

Abbiamo anche

$$(3) \qquad nC' \equiv C + s'_1 G'_1 + s'_2 G'_2 + \dots + s'_{\nu'} G'_{\nu'},$$

$$(4) \qquad s_k C' \equiv G_k + \alpha_{k1} G'_1 + \alpha_{k2} G'_2 + \dots + \alpha_{k\nu'} G'_{\nu'}, \qquad (k = 1,\ 2,\ \dots,\ \nu).$$

Indichiamo con $[X,\ Y]$ il numero dei punti comuni a due curve X, Y e con $[X,\ X]$ il grado virtuale di una X.

Dalla relazione (1), noi deduciamo

$$n[C,\ G_1] = [C',\ G_1] + s_1[G_1,\ G_1] + s_2[G_1,\ G_2] + \dots + s_\nu[G_1,\ G_\nu],$$

cioè $[G_1,\ G_1] = -1$. Il grado virtuale della curva G_1 e più generalmente delle curve $G_2, \dots, G_\nu, G'_1, G'_2, \dots, G'_\nu$, è uguale a -1. Osserviamo che nel passaggio dal piano σ alla superficie F, al punto O_1 corrisponde una curva G_1 e quindi questa curva è eccezionale, dunque di grado virtuale -1.

Calcoliamo, mediante le relazioni (1) e (2), $[C,\ C']$, $[G'_1,\ G'_1]$, $[G'_2,\ G'_2]$, ...,

$[G'_{\nu'},\ G'_{\nu'}]$. Abbiamo

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1,$$

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \ldots + \alpha_{\nu 1}^2 = s_1'^2 + 1,$$

$$\alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \ldots + \alpha_{\nu 2}^2 = s_2'^2 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{1\nu'}^2 + \alpha_{2\nu'}^2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu'}^2 = s_{\nu'}'^2 + 1.$$

Ne deduciamo

$$\Sigma\, \alpha_{ik}^2 = \Sigma\, s_k'^2 + \nu' = n^2 + \nu' - 1,$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu;\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu')$$

Mutando le reti $|\, A\, |$, $|\, A'\, |$, si ha

$$\Sigma\, \alpha_{ik}^2 = n^2 + \nu - 1$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots\ \nu;\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu').$$

dunque $\nu' = \nu$.

Possiamo scrivere le relazioni (1), (2), (3), (4) sotto la forma

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} C' \equiv nC - s_1 G_1 - s_2 G_2 - \ldots - s_\nu G_\nu, \\ G_1' \equiv s_1' C - \alpha_{11} G_1 - \alpha_{21} G_2 - \ldots - \alpha_{\nu 1} G_\nu, \\ G_2' \equiv s_2' C - \alpha_{12} G_1 - \alpha_{22} G_2 - \ldots - \alpha_{\nu 2} G_\nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_\nu' \equiv s_\nu' C - \alpha_{1\nu} G_1 - \alpha_{2\nu} G_2 - \ldots - \alpha_{\nu\nu} G_\nu, \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} C \equiv nC' - s_1' G_1' - s_2' G_2' - \ldots - s_\nu' G_\nu', \\ G_1 \equiv s_1 C' - \alpha_{11} G_1' - \alpha_{12} G_2' - \ldots - \alpha_{1\nu} G_\nu', \\ G_2 \equiv s_2 C' - \alpha_{21} G_1' - \alpha_{22} G_2' - \ldots - \alpha_{2\nu} G_\nu', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_\nu \equiv s_\nu C' - \alpha_{\nu 1} G_1' - \alpha_{\nu 2} G_2' - \ldots - \alpha_{\nu\nu} G_\nu'. \end{cases}$$

Abbiamo

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \ldots + \alpha_{\nu 1}^2 = s_1'^2 - 1, \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \ldots + \alpha_{\nu 2}^2 = s_2'^2 - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1\nu}^2 + \alpha_{2\nu}^2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}^2 = s_\nu'^2 - 1, \end{cases}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \ldots + \alpha_{1\nu}^2 = s_1^2 - 1, \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \ldots + \alpha_{2\nu}^2 = s_2^2 - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1}^2 + \alpha_{\nu 2}^2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}^2 = s_\nu^2 - 1. \end{cases}$$

5. Calcoliamo $[C', G_1']$, $[C', G_2']$, ..., $[C', G_\nu']$. Troviamo

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} \alpha_{11}s_1 + \alpha_{21}s_2 + \ldots + \alpha_{\nu 1}s_\nu = ns_1', \\ \alpha_{12}s_1 + \alpha_{22}s_2 + \ldots + \alpha_{\nu 2}s_\nu = ns_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1\nu}s_1 + \alpha_{2\nu}s_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}s_\nu = ns_\nu', \end{cases}$$

e, mutando i sistemi $|A|$, $|A'|$,

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} \alpha_{11}s_1' + \alpha_{12}s_2' + \ldots + \alpha_{1\nu}s_\nu' = ns_1, \\ \alpha_{21}s_1' + \alpha_{22}s_2' + \ldots + \alpha_{2\nu}s_\nu' = ns_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu 1}s_1' + \alpha_{\nu 2}s_2' + \ldots + \alpha_{\nu\nu}s_\nu = ns_\nu. \end{cases}$$

La trasformazione T è completamente determinata dalla conoscenza del sistema omoloidico $|A|$, quindi le relazioni (II) debbono essere una conseguenza delle relazioni (I). Si vede che la sostituzione nella (I) delle espressioni di C, G_1, G_2, ..., G^ν date dalle (II) conduce ad identità mediante le relazioni (III) e (V).

6. La jacobiana G_j della rete $|\ C\ |$ contiene le curve fondamentali di questa rete, cioè le curve $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$. Se la curva C_j avesse ancora un'altra componente, questa sarebbe fondamentale, essendo $|\ C\ |$ omoloidico. A questa curva corrisponderebbe nel piano σ un punto comune a tutte le curve A, distinto da $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, il che è impossibile. Abbiamo dunque

$$C_j = G_1 + G_2 + \ldots + G_\nu$$

e, per la rete $|\ C'\ |$,

$$G_j = G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_\nu .$$

Dalla relazione fondamentale

$$C_j + 3C' \equiv C'_j + 3C,$$

abbiamo

(VII) $$3C' + G_1 + G_2 + \ldots + G_\nu \equiv 3C + G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_\nu .$$

Le sezioni di queste curve con C' e C danno

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3(n-1),$$
$$s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_\nu = 3(n-1).$$

Le sezioni colle curve $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ danno

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1\nu} = 3s_1 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{\nu 1} + \alpha_{\nu 2} + \ldots + \alpha_{\nu\nu} = 3s_\nu - 1,$$

e

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \ldots + \alpha_{\nu 1} = 3s'_1 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{1\nu} + \alpha_{2\nu} + \ldots + \alpha_{\nu\nu} = 3s'_\nu - 1.$$

7. Abbiamo supposto che in un punto fondamentatale della T nel piano σ le curve A avessero tangenti variabili. Vogliamo adesso esaminare altri casi.

Supponiamo che in un punto fondamentale O, multiplo di ordine s, le curve A abbiano $s_1 < s$ tangenti distinte fisse $t_1, t_2, \ldots, t_{s_1}$. Supporremo che le curve A abbiano $t_1, t_2, \ldots, t_{s_1}$ come tangenti ordinarie e diremo $O_1, O_2, \ldots, O_{s_1}$ i punti infinitamente vicini ad O sopra queste tangenti.

Si dimostra, come nel caso generale, che ai punti infinitamente vicini ad O, corrispondono sopra F i punti di una curva G di ordine $s - s_1$, appartenente ad uno spazio a $s - s_1$ dimensioni. La curva G è razionale normale.

Consideriamo una conica γ irriducibile, tangente alla retta t_1 nel punto O. Alle curve D che osculano la conica γ nel punto O corrispondono nello spazio S_{n+4} gli iperpiani passanti per un punto P. Questo punto corrisponde al punto infinitamente vicino ad O_1 sulla conica γ. Quando varia γ, il punto P descrive una retta g_1, immagine dell'intorno del punto O_1. La retta g_1 incontra la curva G in un punto: agli iperpiani passanti per questo punto corrispondono le curve D che hanno t_1 come tangente doppia.

Agli intorni dei punti $O_2, \ldots, O_{s_1}$ corrispondono rette $g_1, \ldots, g_{s_1}$ appoggiate alla curva G.

Nel caso qui studiato, al puuto O corrisponde una curva di ordine s riducibile in una curva di ordine $s - s_1$ ed in s_1 rette.

8. Supponiamo adesso che le curve A e quindi le curve D abbiamo in un punto O, multiplo di ordine s, s tangenti fisse $t_1, t_2, \ldots, t_s$. Chiamiamo $O_1, O_2, \ldots, O_s$ i punti di queste rette infinitamente vicini ad O.

Esistono curve ∞^{n+3} curve D che hanno la moltiplicità $s + 1$ nel punto O. Gli iperpiani corrispondenti nello spazio S_{n+4} passano per un punto P di F, multiplo di ordine $s + 1$ per questa superficie.

Come nel caso precedente, si dimostra che agli intorni dei punti $O_1, O_2, \ldots, O_s$ corrispondono sopra F, s rette $g_1, g_2, \ldots, g_s$. Queste rette passano per il punto P perchè fra le curve D che hanno la molteplicità $s + 1$ nel punto O, si trovano curve aventi una delle rette $t_1, t_2, \ldots, t_s$ come tangente doppia.

All'intorno del punto P sulla superficie F corrisponde l'intorno del punto O nel piano σ.

In questo caso, la curva G corrispondente al punto O è riducibile in s rette passanti per un punto multiplo della superficie F.

SOPRA UNA RAPPRESENTAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI CREMONIANE FRA DUE SPAZI

Conferenza tenuta il 20 aprile 1961

1. Le prime ricerche sulle trasformazioni birazionali dello spazio sono dovute a CREMONA, CAYLEY, e NOETHER. Molti lavori successivi sono relativi a trasformazioni particolari. Al MONTESANO è dovuto una importante memoria sul caso generale (¹). Di tutte queste ricerche, si troverà un sunto e la bibliografia nel nostro opuscolo dello *Memorial des Sciences Mathématiques* (²). Qui vogliamo introdurre un varietà a tre dimensioni rappresentante le coppie di punti omologhi in una trasformazione cremoniana tra due spazi a tre dimensioni. Si trovano agevolmente alcune relazioni funzionali e si deducono le relazioni fra gli elementi fondamentali della trasformazione.

2. Consideriamo una trasformazione cremoniana T fra due spazi Σ, Σ'. A un piano α di Σ, T fa corrispondere in Σ' una superficie A' di ordine n' ed ad un piano α' di Σ', T^{-1} fa corrispondere una superficie A di ordine n. I sistemi $|A|$, $|A'|$

(¹) MONTESANO, *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali fra i punti dello spazio* «Atti della Accademia di Napoli», 1926.

(²) L. GODEAUX, *Les transformations birationnelles de l'espace*, «Mémorial des Sciences Mathématiques», Facs. LXVII, Paris, Gautier-Villars, 1934. Vedere anche per la teoria generale delle trasformazioni birazionali, il nostro libro: *Géométrie algébrique*, tome I, Paris, Masson, 1948.

sono omoloidici. Fuori della base, due superficie A si incontrano in una curva a di ordine n' e due superficie A' in una curva a' di ordine n.

Nello spazio Σ, consideriamo il sistema

$$| D | = | \alpha + A |,$$

le cui superficie hanno l'ordine $n + 1$ e si comportano come le superficie A nei punti e nelle curve-basi di A.

Diciamo $[X, Y, Z]$ il numero dei punti comuni a tre superficie X, Y, Z. Abbiamo

$$[D, D, D] = [\alpha, \alpha, \alpha] + 3[\alpha, \alpha, A] + 3[\alpha, A, A] + [A, A, A],$$

dunque il sistema $| D |$ ha il grado $3(n + n') + 2$.

Se r è la dimensione di $| D |$, riferiamo proiettivamente la superficie D agli iperpiani di uno spazio S_r a r dimensioni. Ai punti di Σ, corrispondono i punti di una varietà V a tre dimensioni, di ordine $3(n + n') + 2$.

Ai punti di un piano α di Σ corrispondono i punti di una superficie F di V e quando α varia, questa superficie varia in un sistema omaloidico $| F |$. L'ordine della superficie F è

$$[\alpha, D, D] = [\alpha, \alpha, \alpha] + 2[\alpha, \alpha, A] + [\alpha, A, A] = 2n + n' + 1.$$

Due superficie F hanno in comune una curva C, razionale, di ordine $n + 1$. Alle superficie A di Σ corrispondono sopra V superficie F' di ordine

$$[A, D, D] = [\alpha, \alpha, A] + 2[\alpha, A, A] + [A, A, A] = 2n' + n + 1.$$

Le superficie F' formano un sistema omaloidico $| F' |$ e due superficie F' si incontrano in una curva C' di ordine $n' + 1$.

Se notiamo ancora con D le sezioni iperpiane della V, abbiamo

$$D \equiv F + F'.$$

Uua superficie F ed una superficie F' hanno in comune una curva K di ordine

$$[\alpha, A, D] = [\alpha, \alpha, A] + [\alpha, A, A] = n + n'.$$

Questa curva può non essere razionale. Essa corrisponde ad una sezione piana di una superficie A.

Nello spazio Σ' possiamo anche considerare il sistema

$$| D' | = | \alpha' + A' | .$$

La trasformazione T fa corrispondere le superficie D' alle D, dunque $| D' |$ ha anche la dimensione r.

Riferiamo proiettivamente le superficie D' agli iperpiani di uno spazio S'_r a r dimensioni. Ai punti dello spazio Σ' corrispondono i punti di una varietà V' a tre dimensioni. Nello stesso modo che nel caso delle trasformazioni fra due piani, si dimostra che V' corrisponde a V in una omografia fra S_r et S'_r. Se questi spazi sono sovrapposti, possiamo supporre che le varietà V e V' coincidono. Allora, alle superficie F corrispondono le superficie A' e alle superficie F', i piani α' di Σ'.

La varietá V rappresenta le coppie di punti di Σ, Σ' omologhi nella trasformazione T,

3. Sia O un punto fondamentale isolato di T nello spazio Σ. Vogliamo dire un punto che può appartenere a qualche curva fondamentale di T ma ha allora una multiplicità maggiore di questa curva per le superficie A.

Supporremo di più che i coni tangenti alle superficie A nel punto O sono variabili, senza parte fissa e variano in un sistema almeno ∞^2 e in generale un sistema ∞^3. Diremo che il punto fondamentale O è regolare.

Le superficie D che toccano una retta d in O formano un sistema lineare di dimensione $r - 1$. A queste superficie corrispondono nello S_r gli iperpiani passanti per un punto P di V. Questo punto rappresenta il punto infinitamente vicino ad O sulla retta d. Quando varia questa retta, il punto P descrive una superficie razionale G, immagine dell'intorno del punto O.

Alla superficie G corrisponde nello spazio Σ' una superficie fondamentale Ω'. L'ordine di G e della superficie Ω' è la multiplicità p di O per le curve corrispondenti alle rette di Σ' nella T^{-1}.

Una superficie F non incontra in generale la superficie G, ma se una superficie F incontra G in un punto, essa contiene questa superficie. Infatti, questa superficie F rappresenta un piano di Σ passante per O.

4. Consideriamo nello spazio Σ una curva fondamentale di prima specie γ di T, di ordine ν, multipla di ordine s per le superficie A. Supporremo che i piani tangenti alle superficie A in un punto di γ sono variabili colle superficie. Diremo allora che la curva γ è fondamentale regolare per la trasformazione.

Siano P un punto di γ, p tangente a γ in P, $\bar{\omega}$ un piano contenente la retta p. Le superficie D che toccano in P il piano $\bar{\omega}$ formano un sistema di dimensione $r-1$ e gli iperpiani corrispondenti passano per un punto P_0 di V che rappresenta i punti del piano $\bar{\omega}$ infinitamente vicini a P. Quando gira il piano $\bar{\omega}$ intorno a p, il punto P_0 genera una curva γ_0, razionale, di ordine s.

Quando il punto P descrive la curva γ, la curva γ_0 genera una superficie H. Questa superficie rappresenta i punti di Σ infinitamente vicini di γ e nello spazio Σ', una superficie fondamentale Φ'. L'ordine di questa superficie Φ' è eguale al numero q dei punti variabili di appoggio sopra γ delle curve a trasformate dalle rette Σ' mediante T^{-1}.

L'ordine della superficie H è uguale al numero dei punti di incontro variabili di γ con la curva comune a due superficie D. Consideriamo due superficie D riducibili in un piano α ed una superficie A. La retta $\alpha\alpha$ non incontra γ. Ognuna delle curve αA incontra γ in ν punti ed a uno di questi punti corrispondono s punti di H. Infine, la curva AA incontra γ in q punti variabili. L'ordine di H è dunque $2\nu s + q$.

Un piano α di Σ incontra γ in ν punti. Ad ognuno di questi punti corrisponde una curva γ_0 di ordine s. Ne concludiamo che una superficie F taglia la superficie H secondo un gruppo di ν curve γ_0 di ordine s. Come una superficie $F + F'$ è una sezione iperpiana di V, una superficie F' incontra H in una curva di ordine $\nu s + q$.

5. Consideriamo infine una curva fondamentale Γ di seconda specie, di ordine ν, multipla di ordine s per le snperficie A. A questa curva corrisponde, come si sa, una curva di seconda specie Γ' di Σ', di ordine ν', multipla di ordine s' per la superficie A'. Le curve Γ, Γ' sono razionali e si ha

$$s = \lambda\nu', \qquad s' = \lambda\nu.$$

Si sa anche che ai piani α (o α') passanti per un punto P (o P') di Γ (o di Γ') corrispondono superficie A' (o A) che hanno λ piani tangenti comuni in ogni punto della curva Γ' (o Γ). In altre parole, queste superficie A' (o A) hanno in comune una curva di ordine $\lambda\nu$ (o $\lambda\nu'$) infinitamente vicine alla curva Γ' (o Γ). Quindi, ad una retta a di Σ (o di Σ')

appoggiata alla curva Γ (o Γ') corrisponde nello spezio Σ' (o Σ) una curva φ' (o φ) di ordine $n - \lambda\nu'$ (o $n' - \lambda\nu$) appoggiata in un punto alla curva Γ' (o Γ).

Le superficie D passano s volte per la curva Γ. Consideriamo un punto P di Γ ed una retta p passante per P ma distinta della tangente a Γ in P. Come è già stato richiamato, alla retta p corrisponde una curva φ' appoggiate in un punto P' sulla Γ' (questo punto P' varia con p). Nella corrispondenza fra a e φ', il punto P' corrisponde al punto P. Le superficie D incontrano p fuori di P in $n + 1 - s$ punti, dunque le superficie D' incontrano φ' fuori di P' in $n + 1 - s$ punti. Ne risulta che alle superficie D toccante p in P corrispondono superficie D' toccanti φ' in P'.

Tra le superficie D toccanti p in P si trovano le superficie formate da una superficie A toccante p in P e da un piano qualunque. D'altra parte, si trovano anche superficie formate da un piano α passante per P e di una superficie A qualunque. Ne deduciamo che le superficie D toccanti p in P hanno $s - 1$ piani tangenti variabili in questo punto e un piano tangente fisso passante per la retta p. A queste superficie D corrispondono iperpiani passanti per un punto P_0. Questo punto rappresenta la coppia P, P_0.

Quando varia la retta p e quindi il punto P', il punto P_0 descrive una curva χ di ordine s. Quando varia P sulla curva Γ, la curva χ varia e genera un fascio $|\chi|$ sopra una superficie M. Questa superficie è l'immagine delle coppie di punti delle curve Γ, Γ'.

Mutando in questo ragionamento le curve Γ e Γ', si vede che ad un punto P' di Γ, corrisponde ad una curva χ' che, quando P' varia sopra Γ', varia in un fascio lineare $|\chi'|$.

Un piano α taglia le curve Γ in ν punti ed a questi punti corrispondono ν curve χ, dunque una superficie F taglia la superficie M in ν curve χ di ordine s. Una superficie F' taglia la superficie M in ν' curve χ', di ordine s'. Quindi, una sezione iperpiana di V è tagliata da M secondo una curva di ordine

$$\nu s + \nu' s' = 2\lambda\nu\nu' = 2\nu s = 2\nu' s'.$$

6. Supponiamo che la trasformazione T possieda, nello spazio Σ,

h punti fondamentali isolati, regolari, O_1, O_2, ..., O_h rispettivamente multipli di ordine r_1, r_2, ..., r_h per le superficie A.

k curve fondamentali di prima specie. regolari, γ_1, γ_2, ..., γ_k rispettivamente multiple di ordine s_1, s_2, ..., s_k per le superficie A.

l curve fondamentali di seconda specie, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$ rispettivamente multiple di ordine $t_1, t_2, \ldots, t_l$ per le superficie A.

Supponiamo inoltre che la trasformazione T possiede, nello spazio Σ',

h' punti fondamentali isolati, regolari, $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{h'}$ multipli di ordine $r'_1, r'_2, \ldots, r'_{h'}$ per le superficie A'.

k' curve fondamentali di prima specie, regolari, $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{k'}$ multiplo di ordine $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{k'}$ per le superficie A.

l' curve fondamentali di seconda specie, $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_l$ rispettivamente associate alle curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$, multiple di ordine $t'_1, t'_2, \ldots, t'_l$ per la superficie A'.

Ai punti $O_1, O_2, \ldots, O_h$ corrispondono sulla varietà V superficie $G_1, G_2, \ldots, G_h$ ed ai punti $O'_1, O'_2, \ldots, O'_l$ superficie $G'_1, G'_2, \ldots, G'_{h'}$.

Alle curve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ corrispondono alla V superficie $H_1, H_2, \ldots, H_h$ ed alle curve $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{k'}$ superficie $H'_1, H'_2, \ldots, H'_{k'}$.

Alle coppie di curve Γ_1 e Γ'_1, Γ_2 e Γ'_2, $\ldots$, Γ_l e Γ'_l corrispondono sopra V superficie $M_1, M_2, \ldots, M_l$.

7. Consideriamo una superficie A. Da un lato essa appartiene al sistema delle superficie di ordine n e la superficie corrispondente sulla V appartiene al sistema $|\, nF \,|$.

D'altro lato tenendo conto che A passa per gli elementi fondamentali di T, ad essa corrisponde una superficie F' ed r_1 volte G_1, r_2 volte $G_2, \ldots, r_h$ volte G_h, $s_1, s_2, \ldots, s_k$ volte $H_1, H_2, \ldots, H_k$, $t_1, t_2, \ldots, t_l$ volte $M_1, M_2, \ldots, M_l$. Abbiamo quindi la relazione funzionale

$$nF \equiv F' + r_1G_1 + r_2G_2 + \ldots + r_hG_h + s_2H_1 + s_2H_2 + \ldots + s_kH_k$$
$$+ t_1M_1 + t_2M_2 + \ldots + t_lM_l.$$

Alla superficie G'_i corrisponde nello spazio Σ' l'intorno del punto O'_i e nello spazio Σ una superficie fondamentale Ω_i, di ordine p_i, essendo p_i la multiplicità del punto O'_i per le curve T fa corrispondere alle rette di Σ. Supponiamo che la superficie Ω_i passi $r_{1i}, r_{2i}, \ldots, r_{hi}$ volte per $O_1, O_2, \ldots, O_h$, $s_{1i}, s_{2i}, \ldots, s_{ki}$ per le curve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ e $t_{1i}, t_{2i}, \ldots, t_{li}$ volte per le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$.

Col ragionamento precedente, abbiamo

$$p_iF = G'_i + r_{1i}G_1 + r_{2i}G_2 + \ldots + r_{hi}G_h + s_{1i}H_1 + s_{2i}H_2 + \ldots + s_{ki}H_k$$
$$t_{1i}M_1 + t_{2i}M_2 + \ldots + t_{li}M_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, h').$$

Alla superficie H_i corrisponde nello spazio Σ' l'intorno della curva γ'_i e nello spazio Σ una superficie fondamentale Φ_i, di ordine q_i eguale al numero dei punti d'appoggio variabili sopra γ'_i delle trasformate delle rette di Σ. Supponiamo che la superficie Φ_i passa ρ_{ji} volte per il punto O_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$, σ_{ji} volte per la curva γ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, τ_{ji} volte per la curva Γ_i $(j = 1, 2, \ldots, l)$.

Abbiamo la relazione funzionale

$$q_iF \equiv H'_i + \rho_{1i}G_1 + \rho_{2i}G_2 + \ldots + \rho_{hi}G_h + \sigma_{1i}H_1 + \sigma_{2i}H_2 + \ldots \sigma_{ki}H_k$$
$$+ \tau_{1i}M_1 + \tau_{2i}M_2 + \ldots + \tau_{li}M_l, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k').$$

Abbiamo così un primo gruppo di relazioni funzionali che scriveremo

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} &F' \equiv nF - r_1G_1 - \ldots - r_hG_h - s_1H_1 - \ldots - s_kH_k - t_1M_1 - \ldots - t_lM_l, \\ &G'_i \equiv p_iF - r_{1i}G_1 - \ldots - r_{hi}G_h - s_{1i}H_1 - \ldots - s_{ki}H_k - t_{1i}M_1 - \ldots - t_{,i}M_l, \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, h'), \\ &H'_i \equiv q_iF - \rho_{1i}G_1 - \ldots - \rho_{hi}G_h - \sigma_{1i}H_1 - \ldots - \sigma_{ki}H_k - \tau_{1i}M_1 - \ldots - \tau_{li}M_l \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k'). \end{aligned} \right.$$

Mutando i sistemi $|A|$, $|A'|$, abbiamo un secondo gruppo

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} &F \equiv n'F' - r'_1G'_1 - \ldots - r'_{h'}G'_{h'} - s'_1H'_1 - \ldots - s'_{k'}H'_{k'} - t'_1M_1 - \ldots - t'_lM_l, \\ &G_i \equiv p'_iF' - r'_{1i}G'_1 - \ldots - r'_{h'i}G'_{h'} - s'_{1i}H'_1 - \ldots - s'_{k'i}H'_{k'} - t'_{1i}M_1 - \ldots - t'_{li}M_l, \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, h), \\ &H_i \equiv \varphi'_iF' - \rho'_{1i}G'_1 - \ldots - \rho'_{h'i}G'_{h'} - \sigma'_{1i}H'_1 - \ldots - \sigma'_{k'i}H'_{k'} - \tau_{1i}M_1 - \ldots - \tau_{li}M_l, \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned} \right.$$

dove p', q', r', s', t' ρ', σ', τ' sono numeri p, q, r, $\ldots$ relativi alle superficie Ω', Φ' e alle curve Γ'.

8. Quando si dà il sistema omaloidico $|A|$, la trasformazione T è completamente determinata, dunque le relazioni (II) debbono essere conseguenze delle (I). Se, nelle (I), si sostituiscono le espressioni di F, G, H date dalle (II), si ottengono identità.

La prima delle (I) dà

$$\Sigma\, r_i p'_i + \Sigma\, s_j q'_j = nn' - 1,$$

$$\Sigma\, r_i r'_{\alpha j} + \Sigma\, s_j \rho'_{\alpha j} = nr'_{\alpha'}, \qquad (\alpha + 1, 2, \dots, h),$$

$$\Sigma\, r_i s'_{\alpha i} + \Sigma\, s_j \sigma'_{\alpha j} = ns'_{\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, k),$$

$$\Sigma\, r_i t'_{\alpha i} + \Sigma\, s_j \tau'_{\alpha j} = nt'_{\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, l),$$

$$(i = 1, 2, \dots, h';\ j = 1, 2, \dots, k').$$

Tra le altre relazioni, abbiamo ancora

$$\Sigma\, r_{\alpha i} r'_{i\alpha} + \Sigma\, s_{\alpha j} \rho'_{\alpha j} = p_\alpha r'_\alpha + 1, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, h),$$

$$\Sigma\, p_{i\beta} s_{\beta i} + \Sigma\, \sigma_{j\beta} \sigma'_{\beta j} = q_\beta s'_\beta + 1, \qquad (\beta = 1, 2, \dots, k),$$

$$(i = 1, 2, \dots, h';\ j = 1, 2, \dots, k).$$

Facciamo nella prima di equazioni $\alpha = 1, 2, \dots, h$ e nella seconda $\beta = 1, 2, \dots, k$. Per addizione, abbiamo

$$(2) \qquad \sum_i \sum_\alpha r_{i\alpha} r'_{\alpha i} + \sum_j \sum_\alpha + s_{j\alpha} \rho'_{\alpha j} + \sum_i \sum_\beta \rho_{i\beta} s'_{\beta j} + \sum_j \sum_\beta \sigma_{j\beta} \sigma_{\beta j} =$$

$$\sum_\alpha p_\alpha r'_\alpha + \sum_\beta q_\beta s'_\beta + h + k.$$

Se, nella prima delle equazioni (II), sostituiamo F', G', H' date dalle (I), il coefficiente di F è nullo e abbiamo

$$\sum_\alpha p_\alpha r'_\alpha + \sum_\beta q_\beta s'_\beta = nn' - 1.$$

Il secondo membro della (2) è quindi

$$nn' + h + k - 1.$$