Dai «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei»
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. V, fasc. 5

Geometria. — *Points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

Dans un Mémoire en cours d'impression dans les «Annales de l'Ecole Normale Supérieure» (1), nous avons exposé une méthode pour déterminer la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et celle des points de diramation de la surface image d'une telle involution. Nous nous proposons d'appliquer cette méthode à un cas particulier présentant un certain intérêt.

1. Rappelons tout d'abord brièvement en quoi consiste cette méthode.

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons construire un système linéaire $|C|$, de dimension aussi grande qu'on le veut, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p, le premier, $|C_0|$, étant dépourvu de points-base, les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant un nombre convenable de dimensions, il correspond à F une surface normale Φ image de l'involution.

Considérons un point uni non parfait A de l'involution, simple pour la surface F. Il existe, dans le domaine du premier ordre de ce point, deux points unis pour l'involution. Soient a_1, a_2 les tangentes à F en A passant par ces points.

Les courbes C_0, passant par A, acquièrent en ce point une multiplicité $\rho_1 < p$, les tangentes étant confondues avec a_1, a_2. Appelons $|C_0'|$ le système formé par ces courbes. Les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_2, forment un système $|C_0''|$ dont les courbes ont en A une multiplicité $\rho_2 \leq p$, les tangentes étant confondues avec a_1, a_2 si $\rho_2 < p$. Et ainsi de suite. On construit ainsi une suite de systèmes linéaires $|C_0'|, |C_0''|, \dots, |C_0^{(\nu)}|$ dont les courbes ont en A des multiplicités croissantes, les tangentes en ce point étant confondues avec a_1, a_2, sauf pour le dernier système, dont les courbes ont en A la multiplicité p et des tangentes variables.

Au point A est attaché un entier positif $k\,(1 < k < p)$ tel que si les courbes $C_0^{(i)}$ ont λ_i tangentes en A confondues avec a_2 et μ_i tangentes confondues avec a_1, on ait

$$\lambda_i + k\mu_i \equiv 0, \qquad \text{(mod. } p).$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Un résumé de ce Mémoire a paru dans les «C. R.», juillet 1948.

Parmi les systèmes $|C_1|, |C_2|, \cdots, |C_{p-1}|$, il en est deux pour lesquels A est un point–base simple. Les courbes de l'un, $|C_1|$, de ces systèmes, touchent la droite a_2 en A et les courbes de l'autre, $|C_k|$, touchent la droite a_1 en ce point. Les courbes C_1, C_k rencontrent les courbes $C_0', C_0'', \cdots, C_0^{(\nu)}$ en p points confondus en A.

Sur chacune des courbes $C_0', C_0'', \cdots$, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches qu'il s'agit de déterminer. Ces branches ont en commun des suites de points fixes infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution I_p, se terminant chacune par un point uni parfait.

2. Nous allons considérer une involution d'ordre $p = 23$ et étudier le point uni A pour lequel on a $k = 13$.

Les nombres entiers positifs λ, μ tels que

$$\lambda + \mu < 23 \quad , \quad \lambda + 13\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 23)$$

sont donnés par

$$\lambda = 1 + 3i \quad , \quad \mu = 7 - 2i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$
$$\lambda = 2 + 3i \quad , \quad \mu = 14 - 2i, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, 6).$$

On a $\nu = 12$ et les courbes $C_0^{(12)}$ ont en A un point multiple d'ordre 23 à tangentes variables.

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 8, 7 tangentes étant confondues avec a_1 et une avec a_2. Les courbes C_1 rencontrent les courbes C_0' en 15 points $B_1, B_2, \cdots, B_{15}$ infiniment voisins successifs de A, le premier se trouvant sur a_2. Ces points sont unis pour I_{23} et le dernier, B_{15}, est uni parfait pour cette involution.

Les courbes C_{13} rencontrent les courbes C_0' en un certain nombre de points $A_1, A_2, \cdots, A_\eta$ infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur a_1; ces points sont unis pour l'involution et le dernier est uni parfait.

Les courbes $C_0^{(11)}$ ont en A la multiplicité 22, 2 tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 20 avec a_2. Puisque les courbes C_1, C_{13} rencontrent les courbes $C_0^{(11)}$ en 23 points confondus en A, ces dernières courbes passent simplement par A_1, B_1, mais ne passent pas par A_2, B_2. Il en résulte que les courbes $C_0^{(11)}$ ont en commun un point simple [2] A (1, 1) infiniment voisin de A_1 et une suite de 19 points simples B (1, 1), B (1, 2), $\cdots$, B (1, 19) infiniment voisins successifs de B_1. Tous ces points sont unis pour l'involution et A (1, 1), B (1, 19) sont unis parfaits.

Le nombre de points d'intersection des courbes $C_0', C_0^{(11)}$, absorbés en A, doit évidemment être multiple de 23. On en conclut que la somme des multiplicités des courbes C' en A_1, A (1, 1) est égale à 7. On voit sans difficulté que les courbes C_0' passent 4 fois par A_1, 3 fois par A (1, 1) et par suite une fois par les points $A_2, A_3, \cdots, A_{12}$ $(\eta = 12)$.

Soit A' le point de diramation de Φ homologue de A. Projetons la surface Φ de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une

(2) Nous écrivons, pour simplifier, A (α, β, γ) au lieu de $A_{\alpha,\beta,\gamma}$.

surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ'_0 correspondent aux courbes C'_0. Aux points infiniment voisins des points A_{12}, $A(1, 1)$, B_{15} correspondent respectivement une droite α_1, une cubique gauche α_3 et une droite β_1. Le point A' est donc multiple d'ordre 5 pour la surface Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant obtenu en projetant α_1, α_3, β_1 de A'.

Si nous désignons par n le degré et par π le genre des sections hyperplanes Γ_0 de Φ, les courbes C sont de degré $23\,n$ et de genre $23\pi - 22$. Le systèmes $|\Gamma'_0|$ a le degré $n - 5$ et le genre $\pi - 4$.

3. Les courbes C''_0 ont en A la multiplicité 9,5 tangentes étant confondues avec a_1 et 4 avec a_2. A ces courbes correspondent sur Φ_1 les sections Γ''_0 faites par les hyperplans passant par un point A'_1.

Si le point A'_1 n'appartenait pas à la courbe α_3, les courbes C''_0 passeraient 3 fois par le point $A(1, 1)$ et au moins 3 fois par le point A_1. Mais cela est impossible, car les courbes C''_0 ayant en A cinq tangentes confondues avec a_1, la somme des multiplicités de ces courbes en A_1, $A(1, 1)$ ne peut excéder 5. On en conclut que A'_1 appartient à α_3 et que les courbes C''_0 passent 2 fois par $A(1, 1)$, 3 fois par A_1 et une fois par $A_2, A_3, \cdots, A_{12}$.

En utilisant les courbes $C_0^{(11)}$, on voit que les courbes C''_0 passent 4 fois par les points B_1, B_2, B_3, 2 fois par B_4 et 2 fois par un point $B(4, 1)$ infiniment voisin de B_4, uni parfait pour l'involution.

On en conclut que le point A'_1 appartient à la droite β_1 et est double conique pour la surface Φ_1. Si nous projetons cette surface de A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ''_0. Au domaine du point A'_1 correspond sur Φ_2 une conique β_2. A la courbe α_3 correspond une conique rencontrant β_2 en un point. A la droite β_1 correspond un point (multiple pour Φ_2) de β_2. A la droite α_1 correspond une droite.

Le système $|\Gamma''_0|$ a le degré $n - 7$ et le genre $\pi - 5$.

4. Les courbes C'''_0 ont en A la multiplicité 10, 3 tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 7 avec a_2. A ces courbes correspondent sur Φ_2 les sections L'''_0 de cette surface par les hyperplans passant par un point A'_2.

En raisonnant comme plus haut, on voit que A'_2 est le point de rencontre des coniques α_3, β_2. Les courbes C'''_0 passent deux fois par A_1, une fois par $A(1, 1)$ et une fois par $A_2, A_3, \cdots, A_{12}$, 7 fois par B_1, 3 fois par B_2, 2 fois par B_3, une fois par B_4 et par $B(4, 1)$. Elles ont en outre en commun quatre points simples $B(2, 1)$, $B(2, 2)$, $B(2, 3)$, $B(2,4)$ infiniment voisins successifs de B_2, le dernier étant uni parfait pour l'involution.

Le système $|\Gamma'''_0|$ a le degré $n - 8$ et le genre $\pi - 5$, donc le point A'_2 est simple pour la surface Φ_2.

5. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A la multiplicité 11, une tangente en ce point étant confondue avec a_1 et les 10 autres avec a_2. Ces courbes passent simplement par les points $A_1, A_2, \cdots, A_{12}$. On établit ensuite qu'elles passent

7 fois par B_1, 2 fois par B_2, B_3, une fois par B_4 et $B(4, 1)$. En outre, elles passent 3 fois par $B(1, 1)$, 2 fois par un point $B(1, 1, 1, 1)$ infiniment voisin de $B(1, 1)$, une fois par un point $B(1, 1, 1, 1)$ infiniment voisin de $B(1, 1, 1)$ et enfin une fois par un point $B(1, 1, 1, 1, 1)$ infiniment voisin de $B(1, 1, 1, 1)$, uni parfait pour l'involution.

Aux courbes $C_0^{(4)}$ correspondent sur Φ_2 des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ découpées par les hyperplans touchant la conique α_3 en A'_2. Le système $|\Gamma_0^{(4)}|$ a le degré $n - 9$ et le genre $\pi - 5$.

6. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont la multiplicité 16 en A, 14 tangentes étant confondues avec a_1 et 2 avec a_2. Elles passent 7 fois par les points A_1 et $A(1, 1)$, deux fois par les points B_1, B_2, B_3 et une fois par les points B_4 et $B(4, 1)$.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ qui correspondent sur Φ_2 aux courbes $C_0^{(5)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ particulières. Elles sont découpées sur cette surface par des hyperplans tangents à la conique α_3 au point A'_2. Comme elles doivent rencontrer cette conique en 7 points, elles la contiennent nécessairement. Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ ne rencontrent plus la droite α_1, donc celle-ci s'appuie sur la conique α_3.

Le système $|\Gamma_0^{(5)}|$ a le degré $n - 16$ et le genre $\pi - 11$.

Il est inutile de considérer les courbes $C_0^{(6)}, \cdots$, car les courbes $\Gamma_0^{(11)}$, qui correspondent sur Φ_2 aux courbes $C_0^{(11)}$, forment un système linéaire de degré $n - 22$ et de genre $\pi - 11$. On obtient donc les courbes $\Gamma_0^{(6)}, \Gamma_0^{(7)}, \cdots$ en considérant les sections de Φ_2 par des hyperplans passant par la conique α_3 et par des points simples de la surface.

Aux courbes $C_0^{(12)}$, qui ont un point multiple d'ordre 23 à tangentes variables en A, correspondent sur Φ_2 des courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ayant également le genre $\pi - 11$, et le degré $n - 23$.

7. La singularité de la surface Φ au point A' est équivalente à l'ensemble des courbes rationnelles α_1, α_3, β_2, β_1. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_1,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \alpha_1 + \alpha_3 + 2\beta_2 + \beta_1.$$

On en déduit que les courbes rationnelles $\alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \beta_1$ ont respectivemente les degrés virtuels $-2, -5, -2, -2$.

On a en outre

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\beta_2 + \beta_1$$

et on vérifie que les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ rencontrent bien la courbe α_3 en 7 points.

Roma, 1948. — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.