SUR LES SURFACES MULTIPLES

AYANT UN NOMBRE FINI

DE POINTS DE DIRAMATION

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans ce travail, nous poursuivons nos recherches sur les surfaces qui représentent les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique ([1]). Soit F une surface algébrique possédant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par Φ une surface image de cette involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. La surface Φ, multiple d'ordre p, ayant ces points de diramation, est birationnellement identique à la surface F.

Les points de diramation de la surface Φ sont singuliers pour celle-ci et le problème qui nous occupe est la détermination de ces singularités. Ce problème est lié à celui de la structure des points unis correspondants de l'involution I_p.

Soient A un point uni de l'involution I_p, A' le point de diramation correspondant de la surface Φ. Aux sections hyperplanes Γ de la surface Φ correspondent sur F des courbes C_1. La nature de la singularité de la surface Φ en A' dépend du comportement en A des courbes C_1

([1]) Nous avons résumé nos recherches antérieures sur cette question dans un exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scientifiques, n° 270, Paris, Hermann, 1935).

passant par ce point. Après avoir étudié le cas général, nous considérons d'une manière plus approfondie celui où le cône tangent en A' à la surface Φ se scinde en deux parties. Nous établissons la propriété suivante :

Si les courbes C_1 passant par A ont la multiplicité $n_1 + n_2$ en ce point, ces courbes ayant en commun dans une direction, $(2k+1)n_2$ points multiples d'ordre n_1 infiniment voisins successifs de A et, dans une autre direction, $(2k+1)n_1$ points multiples d'ordre n_2 infiniment voisins successifs de A, le point A' est multiple d'ordre n_1+n_2 pour la surface Φ, le cône tangent à cette surface en ce point se composant de deux cônes rationnels, d'ordres n_1 et n_2, ayant une droite en commun. Au point A' sont infiniment voisins successifs k points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. On a $p=(2k+1)n_1n_2+n_1+n_2$.

Si les deux suites de points infiniment voisins de A appartenant aux courbes C_1 passant par A sont formées l'une de $2(k+1)n_2$ points multiples d'ordre n_1, l'autre de $2(k+1)n_1$ points multiples d'ordre n_2, au point A' sont infiniment voisins successifs k points doubles biplanaires suivis d'un point double conique. On a

$$p=2(k+1)n_1n_2+n_1+n_2.$$

Nous terminons en donnant un exemple des particularités précédentes, la surface F étant un plan et I_p l'involution engendrée par une homographie non homologique de période p. Un second exemple analogue montre que le cône tangent à la surface Φ au point A' peut être composé de trois cônes.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de la surface F une surface normale d'un espace linéaire S_r, à r dimensions, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° L'involution I_p est engendrée, sur la surface F, par une homographie H de période p de S_r;

2° L'homographie H possède p axes ponctuels $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(p)}$, de dimensions respectives $r_1, r_2, \ldots, r_p$ dont un seul, pour fixer les idées $S^{(1)}$, rencontre F en un nombre fini de points : les points unis de l'involution.

Désignons par $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ les systèmes linéaires d'hyperplans unis de l'homographie H, les hyperplans de Σ_i passant par les axes $S^{(1)}, \ldots, S^{(i-1)}, S^{(i+1)}, \ldots, S^{(p)}$. Soient C_i les courbes découpées sur la surface F par les hyperplans de Σ_i. Le système $|C_i|$, linéaire, incomplet, est composé au moyen de l'involution I_p. Dans le système linéaire complet $|C|$ des sections hyperplanes de la surface F, il existe donc p systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$ composés au moyen de l'involution I_p; le premier de ces systèmes est dépourvu de points-base, les $p-1$ derniers ont comme points-base les points unis de l'involution I_p.

Rapportons projectivement les courbes du système $|C_1|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r_1} à r_1 dimensions. A la surface F correspond une surface Φ dont les points représentent les groupes de l'involution I_p. Dans la correspondance $(1, p)$ existant entre les surfaces Φ et F, les points de diramation de la surface Φ sont des points isolés, singuliers pour la surface.

Nous désignerons par Γ les sections hyperplanes de la surface Φ, par $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_p$ les courbes de cette surface qui correspondent respectivement aux courbes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ de F. Les systèmes linéaires $|\Gamma|, |\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_p|$ sont complets.

Soient n l'ordre de la surface Φ, π le genre de ses sections hyperplanes Γ. Le système linéaire $|C_1|$ et par suite le système linéaire $|C|$ ont le degré pn et, d'après la formule de Zeuthen, le genre $p(\pi-1)+1$.

2. Soient A un point uni de l'involution I_p, α le plan tangent à la surface F en A. Nous supposons donc que la surface F a un point simple en A; nous supposerons en outre que le plan tangent α ne rencontre l'axe $S^{(1)}$ de l'homographie H qu'au seul point A.

La surface F et le point A étant unis pour l'homographie H, le plan α est également uni pour cette homographie. Par conséqnent, ce plan s'appuie suivant une droite sur l'un des axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$ de l'homographie H, ou en un point sur deux de ces axes. Dans le premier cas, toute tangente à la surface F au point A est unie pour H, cette homographie déterminant dans le plan α une homologie de centre A; le point A est un point uni parfait de l'involution I_p. Dans le second cas, il n'en est plus de même et A est un point uni non parfait de l'involution I_p.

Examinons de plus près la structure du point uni A. Soit $F^\star$ une transformée birationnelle de F telle qu'au point A corresponde une courbe exceptionnelle a (on peut par exemple projeter la surface F du point A sur un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A; la courbe exceptionnelle a est alors la droite suivant laquelle le plan α rencontre cet hyperplan). A l'involution I_p correspond sur la surface $F^\star$ une involution cyclique $I_p^\star$.

Lorsque le point A est uni parfait pour I_p, tous les points de a sont unis pour $I_p^\star$, mais lorsque le point A est uni non parfait, l'involution $I_p^\star$ détermine sur la droite a une involution cyclique d'ordre p possédant deux points unis distincts $A_1^\star$, $A_2^\star$. Ces points seront unis pour $I_p^\star$ et l'on peut reprendre, au sujet de chacun d'eux, le raisonnement qui vient d'être fait pour le point A. Et ainsi de suite.

Supposons que A soit un point uni non parfait et retournons à la surface F. Aux points $A_1^\star$, $A_2^\star$ correspondent des points A_1, A_2, distincts, infiniment voisins de A, unis pour l'involution I_p. La tangente AA_1 à la surface F est unie pour l'homographie H et s'appuie en un point B_1 sur un des axes $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(p)}$, par exemple sur $S^{(2)}$. De même, la tangente AA_2 s'appuie par exemple sur $S^{(3)}$ en un point B_2. Si le point $A_1^\star$ par exemple est uni parfait pour $I_p^\star$, nous dirons que le point A_1 est uni parfait pour I_p, qu'il est non parfait dans le cas contraire.

Dans le domaine du premier ordre du point A sur la surface F, l'homographie H détermine une involution d'ordre p possédant les points unis A_1, A_2. Dans le domaine du premier ordre du point A_1, l'homographie H détermine soit l'identité si A_1 est uni parfait, soit une involution cyclique d'ordre p, possédant deux points unis A_{11}, A_{12} si A est un point uni non parfait. De même, dans le domaine du premier ordre de A_2, tous les points sont unis pour l'homographie H, ou il y a deux points unis A_{21}, A_{22} pour l'involution I_p. Et ainsi de suite, tous les points infiniment voisins de A_{11} par exemple sont unis pour I_p, ou il y a deux de ces points unis pour I_p, selon que A_{11} est uni parfait ou non.

En examinant successivement les domaines des ordres successifs du point uni non parfait A, on trouvera que ce point est le pied d'une sorte d'arbre dont les différentes branches sont formées de points unis de l'involution I_p. Chaque branche s'arrête éventuellement à un point uni parfait. L'ensemble de ces points unis forme la structure du point A.

3. Considérons les courbes C_1 passant par le point A et désignons-les par C'_1. Les hyperplans découpant sur F les courbes C'_1 appartiennent à Σ_1 et passent par A; ils contiennent donc le plan tangent α à F en A; les courbes C'_1 ont donc un point double au moins en A. Nous allons montrer que nous pouvons supposer que cette multiplicité est inférieure à p.

Désignons par $|\overline{C}|$ le système linéaire $|pC|$, par r sa dimension. En rapportant projectivement les courbes $\overline{C}$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r dimensions, nous transformons la surface F en une surface $\overline{F}$ sur laquelle nous pouvons raisonner comme plus haut, sans autre modification qu'un changement de notations.

Cela étant, considérons une courbe C passant par A et y touchant la droite AB_1. L'homographie H et ses puissances lui font correspondre $p-1$ courbes C touchant également la droite AB_1 en A. L'ensemble de ces p courbes C est une courbe $\overline{C}$ unie pour H. Construisons une seconde courbe $\overline{C}$ analogue à la première mais en partant d'une courbe C tangente en A à la droite AB_2. Observons d'autre part que les courbes $\overline{C}$ formées de p courbes C transformées les unes dans les autres par l'homographie H appartiennent totalement à un système linéaire partiel $|\overline{C}_1|$, dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution I_p. Les deux courbes construites plus haut, ayant en A un point multiple d'ordre p et p tangentes confondues avec AB_1 pour la première, AB_2 pour la seconde, appartiennent à $|\overline{C}_1|$ et déterminent dans ce système un faisceau de courbes ayant en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Revenons maintenant à notre surface F primitive. De ce qui précède, il résulte que nous pouvons choisir cette surface de manière qu'il existe des courbes C_1 ayant en A la multiplicité p et des tangentes variables. Ces courbes sont des courbes C'_1 particulières ou coïncident avec ces courbes. Plaçons-nous dans cette seconde hypothèse et soit A' le point de diramation de la surface Φ qui correspond au point uni A. Aux courbes C'_1 correspondent, sur Φ, les sections Γ' par les hyperplans passant par A'. Le système $|C'_1|$ a le degré effectif $pn - p^2$, donc le système $|\Gamma'|$ a le degré effectif $n - p$ et le point A' est multiple d'ordre p pour la surface Φ.

D'autre part, les courbes C'_1 ont le genre $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}p(p-1)$. Sur une de ces courbes, l'involution I_p détermine une involution privée de points unis, car sur cette courbe se trouve un groupe de p points distincts infiniment voisins de A. D'après la formule de Zeuthen, les courbes Γ' ont donc le genre $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$. Mais cela est absurde, car le point A', multiple d'ordre p pour Φ, abaisse le genre de $p - 1$ unités. Il en résulte que les courbes C_1 ayant un point multiple d'ordre p en A, ne peuvent être que des courbes C'_1 particulières. En d'autres termes, les courbes C'_1 ont en A une multiplicité inférieure à p.

Les tangentes à une courbe C'_1 en A étant en nombre inférieur à p, doivent être unies pour l'homographie H, par conséquent elles coïncident avec les droites AB_1, AB_2.

4. Les courbes C'_1 ont en commun le point A et les points A_1, A_2; si ces points ne sont pas tous deux unis parfaits, les courbes C'_1 ont encore en commun un certain nombre de points fixes, infiniment voisins de A, unis pour l'involution I_p. Considérons une branche d'origine A d'une courbe C'_1. Tout point du domaine de A, appartenant à cette branche et restant fixe lorsque la courbe C'_1 varie, doit être uni pour I_p, puisque chaque courbe C'_1 est transformée en elle-même par H. La branche considérée passera donc par un certain nombre de points unis de I_p, infiniment voisins successifs de A. Soit P le dernier de ces points. Le point infiniment voisin de P situé sur la branche considérée, varie avec la courbe C'_1 et doit d'autre part être uni pour I_p; il en résulte que le point P est uni parfait pour l'involution I_p.

Ainsi donc, les courbes C'_1 ont en commun certaines suites de points fixes infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution I_p, les derniers points de chacune de ces suites étant unis parfaits. Soient

P_1, P_2, ..., P_k les derniers points de chacune de ces suites, n_1, n_2, ..., n_k leurs multiplicités respectives pour les courbes C'_1.

Envisageons une courbe C'_1 et la courbe Γ' qui lui correspond sur Φ. Soient R un groupe de l'involution I_p appartenant à C'_1 et R' le point qui lui correspond sur Γ'. Lorsque le groupe R se déplace sur C'_1 et tend vers un point uni du domaine de P_1 par exemple, le point R' tend sur Γ' vers le point A' et la droite $A'R'$ tend vers une tangente à la surface Φ en A'. Il en résulte qu'aux n_1 points de la courbe C'_1 infiniment voisins de A' correspondent n_1 tangentes à la surface Φ en A'. Lorsque la courbe C'_1 varie, la courbe Γ' varie et ces n_1 tangentes engendrent un cône d'ordre n_1, tangent à Φ en A'. En répétant le même raisonnement pour les points P_2, P_3, ..., P_k, on voit que la surface Φ a en A' un point multiple d'ordre $n_1+n_2+\ldots+n_k$, le cône tangent en ce point à la surface étant décomposé en k cônes respectivement d'ordres n_1, n_2, ..., n_k.

Rapportons projectivement les courbes C'_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1-1 dimensions; à la surface F correspond une surface Φ_1, image de l'involution I_p, projectivement identique à la projection à partir de A' de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant. Aux domaines des points P_1, P_2, ..., P_k correspondent, sur Φ_1, des courbes rationnelles γ_1, γ_2, ..., γ_k, respectivement d'ordre n_1, n_2, ..., n_k. L'ensemble de ces courbes représente le domaine du point A' sur la surface Φ.

La surface Φ_1 est d'ordre $n-(n_1+n_2+\ldots+n_k)$.

5. Les courbes C'_1 assujetties à toucher en A une droite (du plan α) distincte des droites AB_1, AB_2, forment un système linéaire de dimension r_1-2; nous les désignerons par C''_1. Les courbes C''_1 ont en A une multiplicité supérieure d'une unité au moins à celle des courbes C'_1 et d'autre part au plus égale à p. Aux courbes C''_1 correspondent, sur la surface Φ, les courbes Γ'' découpées par les hyperplans passant par une droite issue de A'. A ces courbes correspondent sur la surface Φ_1 des courbes que nous désignerons par la même notation Γ'', découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 appartenant à quelques-unes des courbes γ_1, γ_2, ..., γ_k.

Si les courbes C''_1 ont en A une multiplicité inférieure à p, leurs tangentes en ce point sont confondues avec les droites AB_1, AB_2. On reprendra, pour les courbes C''_1, le raisonnement fait pour les courbes C'_1 et l'on parviendra ainsi à déterminer la singularité de la surface Φ_1 en A'_1.

En rapportant projectivement les courbes C''_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_1 - 2$ dimensions, il correspondra à la surface F une surface Φ_2, image de l'involution I_p, projectivement identique à la projection de Φ_1, à partir de A'_1, sur un hyperplan de l'espace dans lequel est plongée cette surface. On observera que si la courbe γ_1 par exemple, passe par le point A'_1, il lui correspondra sur la surface Φ_2 une certaine courbe γ'_1, d'ordre $n_1 - 1$. Il en résulte que parmi les points fixes du domaine de A communs à toutes les courbes C''_1, on rencontrera le point P_1 si $n_1 > 1$. Si la courbe γ_1 ne passe pas par le point A'_1, les courbes C''_1 auront la même multiplicité que les courbes C'_1 en P_1.

Considérons maintenant les courbes C''_1 assujetties à toucher en A une droite distincte de AB_1, AB_2 et désignons-les par C'''_1. Ces courbes ont en A une multiplicité au plus égale à p. Si cette multiplicité est inférieure à p, on recommencera sur les courbes C'''_1 le raisonnement fait pour les courbes C'_1, et ainsi de suite.

Comme les multiplicités en A des courbes C'_1, C''_1, C'''_1, ... vont en croissant, on parviendra finalement à un dernier système $|C_1^{(\nu)}|$ dont les courbes ont, en A, un point multiple d'ordre p à tangentes variables. On obtiendra par suite une suite de surfaces Φ_1, Φ_2, ..., Φ_ν, images de l'involution I_p. La dernière, Φ_ν, aura l'ordre $n - p$ et aux groupes de I_p formés de points infiniment voisins de A, situés sur les courbes $C_1^{(\nu)}$, correspondront sur cette surface les points d'une droite simple.

On parviendra ainsi à analyser la singularité de la surface Φ au point A'. Le point singulier A' sera équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles dont chacune représente le domaine d'un point uni parfait de l'involution I_p, situé dans l'entourage du point uni A.

Il convient cependant de remarquer qu'il ne sera pas toujours nécessaire, pour analyser la singularité en question, d'aller jusqu'aux courbes $C_1^{(\nu)}$. La circonstance suivante peut en effet se présenter :

Supposons qu'en analysant la singularité des courbes $C_1^{(k)}$ en A, nous ayons été conduit à trouver que le cône tangent à la surface Φ_{k-1} du point A'_{k-1} se décompose en deux cônes ayant en commun une droite a. Nous trouverons donc, sur la surface Φ_k, deux courbes γ_{k1}, γ_{k2}, équivalentes à l'ensemble des points de Φ_{k-1} infiniment voisins de A'_{k-1}, se rencontrant en un point A'_0. Il se peut qu'aux courbes $C_1^{(k+1)}$ correspondent, sur la surface Φ_k, des sections hyperplanes passant par un point distinct de A'_0. Ce dernier sera en général simple pour la surface Φ_k et la singularité du point A' sera alors complètement connue.

6. Aux courbes C_2, C_3, ..., C_p, formant des systèmes linéaires composés au moyen de I_p, correspondent sur la surface Φ des courbes que nous avons désignées par Γ_2, Γ_3, ..., Γ_p. Les systèmes linéaires $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, ..., $|\Gamma_p|$ sont complets.

Considérons une courbe C qui ne soit pas transformée en elle-même par l'homographie H. Il lui correspond sur Φ une courbe Γ^*, de genre effectif $p(\pi-1)+1$, possédant $\frac{1}{2}p(p-1)n$ points doubles, correspondant aux couples de points de la courbe C appartenant à des groupes de I_p. Lorsque la courbe C varie, la courbe Γ^* engendre un système continu rationnel appartenant par conséquent à un système linéaire.

Faisons varier la courbe C d'une manière continue dans $|C|$ jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec une courbe C_1. La courbe Γ^* varie d'une manière continue et vient coïncider avec la courbe Γ correspondante, comptée p fois. La courbe Γ^* appartient donc au système $|p\Gamma|$.

Faisons maintenant varier la courbe C d'une manière continue dans $|C|$ de manière qu'elle vienne coïncider avec une courbe C_2. La courbe Γ^* vient coïncider avec la courbe Γ_2 homologue, comptée p fois. Mais les courbes Γ_2 passent par les points de diramation de la surface Φ; elles rencontrent donc certaines composantes infiniment petites de ces points, et ces composantes interviennent dans la composition de la courbe Γ^* correspondant à la courbe C_2. Nous devons donc écrire que la courbe Γ^* envisagée se réduit à la courbe $p\Gamma_2+\Delta_2$, Δ_2 étant un certain ensemble des composantes des points de diramation de Φ. Nous avons donc

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \Delta_2|.$$

Projectivement, cela signifie que parmi les hypersurfaces qui découpent sur Φ les courbes du système $|p\Gamma|$, il en est une au moins ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface le long d'une courbe Γ_2 arbitrairement choisie.

Le même raisonnement peut être repris pour les courbes $\Gamma_3, \ldots, \Gamma_p$ et l'on aura

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \Delta_2| = |p\Gamma_3 + \Delta_3| = \ldots = |p\Gamma_p + \Delta_p|,$$

$\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_p$ étant formées de courbes infiniment petites, composantes des points de diramation de la surface Φ.

Donnons-nous maintenant, dans S_{r_1}, la surface Φ par ses équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho x_i = \psi_i(u_0, u_1, u_2, u_3) & (i = 0, 1, 2, \ldots, r_1), \\ \psi(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0, \end{cases}$$

où les ψ_i sont des polynomes de même degré et ψ un polynome irréductible. Supposons que nous ayons pu construire, sur cette surface, une des courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_p$ et soit

$$\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_{r_1}) = 0$$

l'équation de l'hypersurface ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface le long de cette courbe. Considérons maintenant, dans S_{r_1+1}, la surface représentée par les équations (1) et

$$x_{r_1+1} = \sqrt[p]{\Psi}.$$

S'il existe sur la surface Φ au moins un point de diramation, cette dernière surface est irréductible et précisément birationnellement identique à la surface F.

7. Envisageons, sur la surface F, le système linéaire

$$|D| = |2C|.$$

Le système $|D|$ n'est pas composé au moyen de l'involution I_p, mais l'homographie H échange ses courbes entre elles. Le système $|D|$

contient p systèmes linéaires partiels $|D_1|$, $|D_2|$, ..., $|D_p|$ composés au moyen de l'involution I_p. On peut les définir en disant que ces systèmes contiennent respectivement les courbes

$$2C_1, \quad C_1+C_2, \quad \ldots, \quad C_1+C_p.$$

Ces systèmes se comportent donc comme les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$. Le système $|D_1|$ est dépourvu de points-base; les autres ont comme points-base les points unis de I_p,

Deux des courbes

$$C_1+C_2, \quad 2C_2, \quad C_2+C_3, \quad \ldots, \quad C_2+C_p$$

ne peuvent appartenir à un même système linéaire composé au moyen de I_p. L'une de ces courbes appartient donc au système $|D_1|$. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la courbe C_2+C_p. Cette courbe passe par le point A, et aura donc le même comportement que l'une des courbes C'_1, C'_2, ...

On peut poursuivre ce raisonnement et disposer des indices pour que les courbes $C_3+C_{p-2}+\ldots$ aient le même comportement en A que l'une des courbes C'_1, C''_1, ... Cependant, cette façon de disposer des indices n'a rien d'absolu; il peut se faire que les courbes C_2+C_3 aient en A le même comportement que les courbes C'_1, alors que les courbes C_2, C_3 ont en A un comportement bien déterminé, comme on va le voir.

8. Les courbes C_2 sont découpées sur F par les hyperplans de Σ_2. Ces hyperplans passent par $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$ mais non par $S^{(2)}$; ils ne contiennent donc pas le plan tangent α en A à F. Il en résulte que les courbes C_2 ont un point simple en A et y touchent la droite AB_2.

Les courbes C_2 ont en commun, au point A, une suite de points simples fixes infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution I_p, le dernier étant uni parfait.

Le nombre des points d'intersection des courbes C_2 avec une des courbes C'_1, C''_1, ..., absorbés en A, est naturellement multiple de p.

Les courbes C_3 sont découpées sur F par les hyperplans de Σ_3, hyperplans ne passant pas par l'axe $S^{(3)}$ de l'homographie H et ne contenant par conséquent pas le plan tangent α à F en A. Les courbes C_3 ont un point simple en A et y touchent la droite AB_1.

Supposons que les courbes $C_2 + C_3$ appartiennent au système $|D_1|$; elles ont un point double en A et par conséquent les courbes D_1 passant par A y ont un point double. Il en est de même des courbes C'_1 et au point de diramation A', la surface Φ possède un point double biplanaire auquel peuvent être infiniment voisins successifs des points doubles.

9. Nous allons poursuivre l'étude du point de diramation A' de la surface Φ dans l'hypothèse où le cône tangent à la surface en ce point se décompose en deux cônes, nécessairement rationnels, ayant en commun une droite unique (simple pour chacun des cônes). Sur la surface Φ_1, nous aurons donc deux courbes rationnelles γ_1, γ_2, respectivement d'ordres n_1, n_2, se rencontrant en un seul point A'_1. Nous commencerons par supposer que le point A'_1 est simple pour la surface Φ_1.

Nous avons, sur la surface Φ_1, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ',

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2.$$

Soient ν_1, ν_2 les degrés respectifs de γ_1, γ_2. En considérant les intersections de la courbe $\Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2$ avec γ_1 puis avec γ_2, on a

$$0 = n_1 + \nu_1 + 1, \qquad 0 = n_2 + 1 + \nu_2,$$

d'où

$$\nu_1 = -(n_1 + 1), \qquad \nu_2 = -(n_2 + 1).$$

Nous avons, d'autre part,

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \Delta'_2|,$$

λ_1 et λ_2 étant des entiers et Δ'_2 le terme provenant de la présence éventuelle d'autres points de diramation. Les courbes Γ_2 rencontrent l'une des courbes γ_1, γ_2, par exemple la première en un point et ne rencontre pas l'autre. On a donc

$$p + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_2 + \lambda_2\nu_2 = 0;$$

par conséquent

$$p = \lambda_2(\nu_1\nu_2 - 1) = \lambda_2(n_1 n_2 + n_1 + n_2),$$

p étant un nombre premier, et le second facteur étant supérieur à l'unité, on a

$$\lambda_2 = 1, \qquad \lambda_1 = n_2 + 1, \qquad p = n_1 n_2 + n_1 + n_2.$$

Par suite,

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + (n_2 + 1)\gamma_1 + \gamma_2 + \Delta'_2|.$$

On aura de même

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_3 + \gamma_1 + (n_1 + 1)\gamma_2 + \Delta'_3|,$$

Δ'_3 provenant de la présence d'autres points de diramation.

Si les courbes $\Gamma_2 + \Gamma_3$ appartiennent au système $|D_1|$, nous avons $n_1 = 1$, $n_2 = 1$ et $p = 3$. Inversement, si $p = 3$, on a $n_1 = n_2 = 1$. La surface Φ possède en A′ un point biplanaire ordinaire, comme nous l'avons d'ailleurs établi antérieurement.

Supposons $p > 3$ et soit Γ_k une courbe rencontrant γ_1 en k_1 points et γ_2 en k_2 points. Par un raisonnement analogue au précédent, on trouve

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_k + (k_2 - k_1\nu_2)\gamma_1 + (k_1 - k_2\nu_1)\gamma_2 + \Delta_k|,$$

Δ_k étant le terme qui provient des points de diramation distincts de A′.

En particulier, on a

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_p + (p - n_2 - 1)\gamma_1 + (p - 1)\gamma_2 + \Delta_p|,$$

relation que l'on pourrait également déduire de

$$|\Gamma_2 + \Gamma_p| = |\Gamma + \Gamma'|.$$

Des relations précédentes, on déduit que les courbes C'_1 ont p points d'intersection avec les courbes C_2 ou C_3, réunis en A.

10. Retournons à la surface F. Les courbes C'_1 ont en A une multiplicité ρ. A ce point multiple sont infiniment voisins successifs h points multiples d'ordres $\rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_{1h} = n_1$, le dernier étant P_1, et dans une autre direction, k points successifs multiples d'ordres ρ_{21}, $\rho_{22}, \ldots, \rho_{2k} = n_2$, le dernier étant P_2. On a

$$\rho \geqq \rho_{11} + \rho_{21}, \qquad \rho_{11} \geqq \rho_{12} \geqq \ldots \geqq n_1, \qquad \rho_{21} \geqq \rho_{22} \geqq \ldots \geqq n_2.$$

En évaluant le nombre des intersections absorbées en A de deux courbes C'_1, ou d'une courbe C'_1 et d'une courbe C_2 ou C_3, on a

$$\begin{gathered}\rho^2+\rho_{11}^2+\rho_{12}^2+\ldots+\rho_{1h}^2+\rho_{21}^2+\rho_{22}^2+\ldots+\rho_{2k}^2=p(n_1+n_2),\\ \rho+\rho_{11}+\rho_{12}+\ldots+\rho_{1h}=p,\\ \rho+\rho_{21}+\rho_{22}+\ldots+\rho_{2k}=p.\end{gathered}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\rho(\rho-n_1-n_2)+\rho_{11}(\rho_{11}-n_1)+\ldots+\rho_{1h}(\rho_{1h}-n_1)\\ &\qquad+\rho_{21}(\rho_{21}-n_2)+\ldots+\rho_{2k}(\rho_{2k}-n_2)=0.\end{aligned}$$

Tous les termes du premier membre devant être positifs ou nuls, on a

$$\rho=n_1+n_2,\qquad \rho_{11}=\ldots=\rho_{1h}=n_1,\qquad \rho_{21}=\ldots=\rho_{2k}=n_2.$$

On a en outre $h=n_2$, $k=n_1$.

Les courbes C'_1 ont donc en A un point multiple d'ordre n_1+n_2 auquel sont infiniment voisins successifs : dans une direction, n_2 points multiples d'ordre n_1 ; dans une autre direction, n_1 points multiples d'ordre n_2. Ces points sont unis pour l'involution I_p, les derniers points de chaque suite étant unis parfaits.

Les courbes C_2 passent par les points de la première suite, les courbes C_3 par les points de la seconde suite.

Pour $n_2=1$, $n_1=\frac{1}{2}(p-1)$, on retrouve un résultat que nous avions établi directement (¹), en supposant que l'involution I_p possède un point uni parfait dans le domaine du premier ordre du point A.

Retournons au cas général. Le genre d'une courbe C'_1 est égal à

$$p(\pi-1)+1-\frac{1}{2}(n_1+n_2)(n_2+n_2-1)-\frac{1}{2}n_2n_1(n_1-1)-\frac{1}{2}n_1n_2(n_2-1).$$

D'autre part, sur une courbe C'_1, l'involution I_p détermine une involution cyclique d'ordre p possédant n_1+n_2 points unis. D'après la formule de Zeuthen, le genre π' de la courbe Γ' correspondante est donc donné par

$$\begin{aligned}&2p(\pi'-1)+(n_1+n_2)(p-1)\\ &\quad=2p(\pi-1)-(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)-n_1n_2(n_1+n_2-2).\end{aligned}$$

(¹) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1930. p. 450-467).

On en déduit

$$\pi' = \pi - (n_1 + n_2 - 1),$$

valeur que l'on obtient directement en évaluant le genre π de la courbe $\Gamma' + \gamma_1 + \gamma_2$.

11. Nous avons supposé que le cône tangent à la surface Φ au point de diramation A' était formé de deux cônes rationnels, d'ordres n_1, n_2, ayant en commun une droite simple pour chacun des cônes. Nous avons considéré le cas où il n'existe pas de point multiple infiniment voisin de A'. Nous allons maintenant faire l'hypothèse opposée.

Sur la surface Φ_1, nous aurons deux courbes rationnelles γ_1, γ_2 passant par un point A'_1 qui sera maintenant multiple pour la surface (mais simple pour les courbes γ_1, γ_2). Le point A'_1 sera cette fois équivalent à une courbe rationnelle ou à une somme de courbes rationnelles que nous représenterons par γ_0. La courbe γ_0 rencontrera en un point chacune des courbes γ_1, γ_2. Ces deux dernières devront être considérées, au point de vue des transformations birationnelles, comme ne se rencontrant pas.

Nous avons actuellement

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2.$$

En considérant les intersections de cette courbe avec γ_1, γ_2, on trouve encore que les degrés de ces courbes sont

$$\nu_1 = -(n_1 + 1), \qquad \nu_2 = -(n_2 + 1).$$

Soit ν_0 le degré de γ_0. Les courbes Γ' ne rencontrent pas γ_0; donc en considérant l'intersection de la courbe précédente avec γ_0, on trouve $\nu_0 = -2$.

Passons de la surface Φ_1 à la surface Φ_2. Sur celle-ci, il correspond à γ_1, γ_2 des courbes γ'_1, γ'_2 d'ordres respectifs $n_1 - 1$, $n_2 - 1$. Les sections hyperplanes Γ'' de Φ_2 sont données par

$$\Gamma \equiv \Gamma'' + \gamma_1 + 2\gamma_0 + \gamma_2.$$

On en déduit que les courbes Γ'' rencontrent en deux points la courbe γ_0, c'est-à-dire que le point A'_1 est double pour la surface Φ_1.

Nous sommes ainsi conduit à faire deux hypothèses, que nous examinerons séparément [1].

1° La surface Φ_1 possède, en A'_1, un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs un certain nombre de points doubles (nécessairement biplanaires) dont le dernier est biplanaire ordinaire;

2° La surface Φ_1 possède, en A'_1, un point double auquel sont infiniment voisins successifs un certain nombre de points doubles dont le dernier est conique, les précédents étant biplanaires.

12. Supposons donc en premier lieu l'existence d'une suite de k points doubles biplanaires. Cette singularité équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de $2k$ courbes rationnelles de degré -2

$$\gamma_{11}, \quad \gamma_{21}, \quad \ldots, \quad \gamma_{k1}, \quad \gamma_{k2}, \quad \ldots, \quad \gamma_{22}, \quad \gamma_{12}.$$

Chacune des courbes de cette suite rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. De plus γ_{11} et γ_{12} rencontrent ensemble γ_1 et γ_2 chacune en un point; pour fixer les idées, nous supposerons que γ_{11} rencontre γ_1 en un point, mais ne rencontre pas γ_2. Alors γ_{12} ne rencontre pas γ_{11}, mais a un point commun avec γ_2.

Cela étant, la courbe Γ_2 rencontre en un point γ_1 mais ne rencontre pas les autres courbes γ. Nous avons

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_{11}\gamma_{11} + \ldots + \lambda_{k1}\gamma_{k1} + \lambda_{k2}\gamma_{k2} + \ldots + \lambda_{12}\gamma_{12} + \lambda_2\gamma_2 + \Delta_2|,$$

les λ étant des entiers et Δ_2 ayant la même signification que plus haut.

Prenons les intersections des courbes du système précédent successivement avec les courbes $\gamma_1, \gamma_{11}, \ldots, \gamma_{12}, \gamma_2$; nous obtenons

$$\begin{aligned}
p + \lambda_1\nu_1 + \lambda_{11} &= 0,\\
\lambda_1 - 2\lambda_{11} + \lambda_{21} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
\lambda_{22} - 2\lambda_{12} + \lambda_2 &= 0,\\
\lambda_{12} + \lambda_2\nu_2 &= 0.
\end{aligned}$$

[1] Nous excluons donc les points doubles uniplanaires.

On en déduit

$$\lambda_{12} = -\lambda_2 \nu_2, \quad \lambda_{22} = -(2\nu_2 + 1)\lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{k2} = -(k\nu_2 + k - 1)\lambda_2,$$
$$\lambda_{k1} = -[(k+1)\nu_2 + k]\lambda_2, \quad \ldots,$$
$$\lambda_{11} = (2k\nu_2 + 2k - 1)\lambda_2, \quad \lambda_1 = -[(2k+1)\nu_2 + 2k]\lambda_2.$$

En portant ces valeurs dans la première relation, on obtient

$$p = [(2k+1)\nu_1\nu_2 + 2k(\nu_1 + \nu_2) + 2k - 1]\lambda_2$$

ou, en remplaçant ν_1, ν_2 par leurs valeurs

$$p = [2kn_1n_2 + n_1n_2 + n_1 + n_2]\lambda_2.$$

Le premier facteur du second membre est supérieur à l'unité; p étant premier, on a

$$\lambda_2 = 1, \qquad p = (2k+1)n_1n_2 + n_1 + n_2.$$

Par suite

$$\lambda_{12} = n_2 + 1, \quad \lambda_{22} = 2n_2 + 1, \quad \ldots, \quad \lambda_{k2} = kn_2 + 1, \quad \ldots,$$
$$\lambda_{11} = 2kn_2 + 1, \quad \lambda_1 = (2k+1)n_2 + 1$$

et

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \{(2k+1)n_2 + 1\}\gamma_1 + (2kn_2 + 1)\gamma_{11} + \ldots$$
$$+ (2n_2 + 1)\gamma_{22} + (n_2 + 1)\gamma_{12} + \gamma_2 + \Delta_2|.$$

Les courbes Γ_3 rencontrent la courbe γ_2 en un point mais ne rencontrent pas les autres courbes γ. Par une méthode analogue à la précédente, on trouve

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_3 + \gamma_1 + (n_1 + 1)\gamma_{11} + \ldots + (2kn_1 + 1)\gamma_{12} + \{(2k+1)n_1 + 1\}\gamma_2 + \Delta_3|.$$

13. Supposons maintenant que la singularité de la surface Φ_1 au point A'_1 se compose d'une suite de $k+1$ points doubles infiniment voisins successifs, les k premiers étant biplanaires et le dernier conique. Cette singularité est équivalente à un ensemble de $2k+1$ courbes rationnelles

$$\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{k1}, \gamma_k, \gamma_{k2}, \gamma_{22}, \gamma_{12},$$

chacune des courbes de cet ensemble rencontrant la suivante et la précédente en un point, mais ne rencontrant pas les autres. De plus, nous pouvons supposer que γ_{11} rencontre γ_1 en un point mais ne rencontre pas γ_2, tandis que γ_{12} a un point commun avec γ_2, mais ne rencontre pas γ_1.

On aura encore une relation de la forme

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_{11}\gamma_{11} + \ldots + \lambda_k\gamma_k + \ldots + \lambda_{12}\gamma_{12} + \lambda_2\gamma_2 + \Delta_2|.$$

En opérant comme tantôt pour exprimer que les courbes Γ_2 rencontrent la courbe γ_1 en un point mais ne rencontre pas les autres, on aura

$$\lambda_{12} = -\lambda_2\nu_2, \qquad \lambda_{22} = -(2\nu_2 + 1)\lambda_2, \qquad \ldots,$$
$$\lambda_{k2} = -(k\nu_2 + k - 1)\lambda_2, \qquad \lambda_k = -[(k+1)\nu_2 + k]\lambda_2;$$
$$\lambda_{k1} = -[(k+2)\nu_2 + k]\lambda_2, \qquad \ldots,$$
$$\lambda_{11} = -[(2k+1)\nu_2 + 2k]\lambda_2, \qquad \lambda_1 = -[(2k+2)\nu_2 + 2k + 1]\lambda_2.$$

En tenant compte de la relation

$$p + \lambda_1\nu_1 + \lambda_{11} = 0,$$

on aura

$$p = [(2k+2)\nu_1\nu_2 + (2k+1)(\nu_1 + \nu_2) + 2k]\lambda_2,$$

d'où

$$\lambda_2 = 1, \qquad p = (2k+2)\nu_1\nu_2 + (2k+1)(\nu_1 + \nu_2) + 2k.$$

En remplaçant ν_1, ν_2 par leurs valeurs, on aura enfin

$$p = 2(k+1)n_1n_2 + n_1 + n_2.$$

La relation fonctionnelle liant $|\Gamma|$ et $|\Gamma_2|$ sera cette fois

$$\begin{aligned}|p\Gamma| = |p\Gamma_2 &+ \{(2k+2)n_2 + 1\}\gamma_1 + \{(2k+1)n_2 + 1\}\gamma_{11} + \ldots \\ &+ \{(k+1)n_2 + 1\}\gamma_k + \ldots + (n_2 + 1)\gamma_{12} + \gamma_2 + \Delta_2|.\end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned}|p\Gamma| = |p\Gamma_3 &+ \gamma_1 + (n_1 + 1)\gamma_{11} + \ldots + \{(k+1)n_1 + 1\}\gamma_k + \ldots \\ &+ \{(2k+1)n_1 + 1\}\gamma_{12} + \{(2k+2)n_1 + 1\}\gamma_2 + \Delta_3|.\end{aligned}$$

14. Supposons que les courbes $C_2 + C_3$ appartiennent au système $|C_1 + C'_1|$. Sur la surface Φ, nous avons

$$|\Gamma_2 + \Gamma_3| = |\Gamma + \Gamma'| = |2\Gamma - \gamma_1 - \gamma_{11} - \ldots - \gamma_2|.$$

D'autre part, les courbes C_2, C_3 passant simplement par A, les courbes C'_1 ont un point double en A et l'on a $n_1 = n_2 = 1$.

Plaçons-nous en premier lieu dans le cas où Φ_1 a en A'_1 une suite de points doubles biplanaires (n° 12). Nous avons, en tenant compte des liaisons fonctionnelles des courbes Γ_2, Γ_3,

$$|2p\Gamma| = |p(\Gamma_2 + \Gamma_3) + (2k+3)(\gamma_1 + \gamma_{11} + \ldots + \gamma_{12} + \gamma_2) + \Delta_2 + \Delta_3|.$$

On doit donc avoir $2k + 3 = p$. La surface Φ possède en A' un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. On retrouve un cas que nous avons étudié antérieurement ([1]).

Plaçons-nous en second lieu dans l'hypothèse où la suite de points doubles infiniment voisins successifs de A'_1 se termine par un point double conique (n° 13). Le raisonnement que nous venons de faire, répété dans cette hypothèse, nous conduit à $2k + 4 = p$, ce qui est impossible puisque p est, par hypothèse, premier.

Supposons que les courbes $C_2 + C_3$ n'appartiennent pas au système $|C_1 + C'_1|$, c'est-à-dire que l'on a $n_1 + n_2 > 2$. Appelons C_p les courbes $C_1 + C'_1 - C_2$ et C_{p-1} les courbes $C_1 + C'_1 - C_3$.

De la relation

$$|2\Gamma| = |\Gamma_2 + \Gamma_p + \gamma_1 + \gamma_{11} + \ldots + \gamma_{12} + \gamma_2|,$$

on déduit la relation fonctionnelle liant les courbes Γ_p.

Dans l'hypothèse du n° 12, on a

$$\begin{aligned}|p\Gamma| = |p\Gamma_p + \{p - (2k+1)n_2 - 1\}\gamma_1 + \{p - 2kn_2 - 1\}\gamma_{11} - \ldots \\ + (p - 2n_2 - 1)\gamma_{22} + (p - n_2 - 1)\gamma_{12} + (p-1)\gamma_2 + \Delta_p|\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}|p\Gamma| = |p\Gamma_{p-1} + (p-1)\gamma_1 + (p - n_1 - 1)\gamma_{11} + \ldots \\ + \{p - (2k+1)n_1 - 1\}\gamma_2 + \Delta_{p-1}|.\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse du n° 13, on a

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_p + \{p - (2k+2)n_2 - 1\}\gamma_1 + \ldots + (p-1)\gamma_2 + \Delta_p|$$

et

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_{p-1} + (p-1)\gamma_1 + \ldots + \{p - (2k+2)n_1 - 1\}\gamma_2 + \Delta_{p-1}|.$$

([1]) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1931, p. 1131-1150).

On vérifie aisément que dans chaque cas, les courbes Γ_p rencontrent γ_1 en $n_1 - 1$ points et γ_2 en n_2 points. Les courbes Γ_{p-1} rencontrent la courbe γ_1 en n_1 points et la courbe γ_2 en $n_2 - 1$ points.

15. Le raisonnement fait au n° 10, pour déterminer la singularité des courbes C'_1 au point A, peut être en partie repris dans le cas actuel. Les courbes C'_1 ont en A un point multiple d'ordre $n_1 + n_2$ auquel sont infiniment voisins successifs dans une direction, h points multiples d'ordre n_1 dont le dernier, P_1, est uni parfait pour I_p; dans une autre direction, h' points multiples d'ordre n_2 dont le dernier, P_2, est uni parfait pour I_p.

En considérant les intersections des courbes C'_1 avec C_2, C_3, on a

$$n_1 + n_2 + hn_1 = p, \qquad n_1 + n_2 + h' n_2 = p.$$

Dans l'hypothèse du n° 12, on a

$$p = (2k+1) n_1 n_2 + n_1 + n_2, \qquad h = (2k+1) n_2, \qquad h' = (2k+1) n_1.$$

Dans l'hypothèse du n° 13, on a

$$p = 2(k+1) n_1 n_2 + n_1 + n_2, \qquad h = 2(k+1) n_2, \qquad h' = 2(k+1) n_1.$$

Aux courbes C''_1 correspondent, sur Φ, les courbes Γ'' données par

$$\Gamma \equiv \Gamma'' + \gamma_1 + 2(\gamma_{11} + \ldots + \gamma_{12}) + \gamma_2.$$

Les courbes Γ'' rencontrent γ_1 en $n_1 - 1$ points, γ_2 en $n_2 - 1$ points, γ_{11} et γ_{12} en un point chacune; elles ne rencontrent pas les autres courbes γ. Les courbes C''_1 ont donc en A un point de multiplicité supérieure à $n_1 + n_2$ et elles ont en commun un certain nombre de points infiniment voisins successifs de A; ces suites se terminent par quatre points unis parfaits de l'involution I_p : le point P_1, multiple d'ordre $n_1 - 1$, le point P_2 multiple d'ordre $n_2 - 1$, deux points simples P_{11}, P_{12} donnant respectivement naissance aux courbes γ_{11}, γ_{12}. On observera que dans le domaine du premier ordre de A, les courbes C''_1 ne peuvent avoir que deux points multiples. Les courbes C''_1 ont en commun les points communs aux courbes C'_1. De ces deux suites de points se détachent deux suites de points terminées par les points simples P_{11}, P_{12}.

Aux courbes C_1''' correspondent, sur Φ_1, les courbes Γ''' données par

$$\Gamma \equiv \Gamma''' + \gamma_1 + 2\gamma_{11} + 3(\gamma_{21} + \ldots + \gamma_{22}) + 2\gamma_{12} + \gamma_2.$$

Les courbes Γ''' rencontrent γ_1 en $n_1 - 1$ points, γ_2 en $n_2 - 1$ points, γ_{21} et γ_{22} chacune en un point; elles ne rencontrent pas les autres courbes γ.

Les courbes C_1''' ont en A un point multiple (d'ordre supérieur à la multiplicité du même point pour les courbes C_1'') auquel sont infiniment voisins un certain nombre de points fixes infiniment voisins successifs. Ces suites se terminent par quatre points unis parfaits de l'involution I_p : le point P_1, multiple d'ordre $n_1 - 1$, le point P_2 multiple d'ordre $n_2 - 1$, deux points simples P_{21}, P_{22} donnent naissance aux courbes γ_{21}, γ_{22}.

Et ainsi de suite. Les courbes $C_1^{(k+1)}$ auront un comportement analogue aux courbes C_1'', C_1'''. Les suites de points communs à ces courbes se termineront par le point P_1, multiple d'ordre $n_1 - 1$, le point P_2, multiple d'ordre $n_2 - 1$ et par deux points simples P_{k1}, P_{k2}.

Les courbes $C_1^{(k+2)}$ auront un comportement différent. Les suites de points communs à ces courbes, infiniment voisins successifs de A, se termineront par le point P_1, multiple d'ordre $n_1 - 1$, le point P_2 multiple d'ordre $n_2 - 1$ et par un point P_k, simple ou double suivant que l'on se trouve dans l'hypothèse du n° 12 ou dans celle du n° 13.

Inversement, si les courbes C_1', C_1'', ... ont en A les comportements précédents, la singularité de la surface Φ au point de diramation A′ présente les particularités indiquées précédemment.

16. Nous allons maintenant considérer un exemple que nous empruntons à la théorie des homographies cycliques du plan.

Supposons que F soit un plan et considérons l'involution I_p engendrée dans ce plan par l'homographie de période p.

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

ε étant une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité.

Comme système $|C|$, nous prendrons le système des courbes planes d'ordre p. Les points unis de l'involution I_p sont les sommets du triangle de référence; nous étudierons le point uni A(1, 0, 0).

Pour pouvoir écrire l'équation du système $|C_1|$, nous devrons considérer deux cas : $p = 6\nu + 1$ et $p = 6\nu + 5$ [1].

Dans le cas $p = 6\nu + 1$, l'équation du système $|C'_1|$ s'écrit

$$\lambda_0 x_1^p + \sum_{i=1}^{2\nu+1} \lambda_i x_1^{4\nu-2i+2} x_2^{3i-2} x_3^{2\nu-i+1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} x_1^{2\nu-2j-1} x_2^{3j-1} x_3^{4\nu-j+1} + \lambda_{3\nu+2} x_3^p = 0 \quad (1).$$

Les courbes C'_1 sont données par $\lambda_0 = 0$. Elles ont en A un point multiple d'ordre $2\nu + 1$, une tangente étant $x_2 = 0$, les 2ν autres étant confondues avec $x_3 = 0$.

Avant d'analyser la singularité des courbes C'_1 au point A, formons les équations de la surface Φ. Celle-ci s'obtiendra en rapportant projectivement les courbes (1) aux hyperplans d'un espace $S_{3\nu+2}$ à $3\nu + 2$ dimensions. Les équations paramétriques de la surface Φ seront

$$\rho X_0 = x_1^p, \qquad \rho X_i = x_1^{4\nu-2i+2} x_2^{3i-2} x_3^{2\nu-i+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2\nu + 1),$$
$$\rho X_{2\nu+1+j} = x_1^{2\nu-2j+1} x_2^{3j-1} x_3^{4\nu-j+1}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu); \qquad \rho X_{3\nu+2} = x_3^p.$$

La surface Φ sera d'ordre p. La surface Φ_1 s'obtiendra en projetant Φ du point $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ sur l'hyperplan $X_0 = 0$. Ses équations paramétriques s'obtiendront en supprimant la première des équations précédentes.

Pour étudier la singularité des courbes C'_1 au point A, nous utiliserons les transformations quadratiques [2]

$$(T_1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_2 y_3,$$
$$(T_2) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_2 z_3 : z_1 z_3.$$

---

(1) *Cf.* STEVENS, *Sur la structure des points unis des homographies planes cycliques non homologiques* (*Bulletin de la Société royale de Liége*, 1935, p. 128-132).

(2) Voir nos travaux, *Sur les homographies planes cycliques* (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 1928, p. 1-26); *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (*Id.*, 1930, p. 1-21); *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (*Id.*, 1931, p. 1-14).

La première fait correspondre au point infiniment voisin de A sur $x_3 = 0$ le point $(1, 0, 0)$, la seconde fait correspondre au point infiniment voisin de A sur $x_2 = 0$ le point $(1, 0, 0)$.

Effectuons deux fois de suite la transformation T_1 sur les courbes C'_1; nous obtenons une courbe d'équation

$$y_1^{12\nu+2}\sum_{i=1}^{2\nu+1}\lambda_i y_2^{i-1} y_3^{2\nu-i+1} + y_1^{6\nu+1}\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_{2\nu+1+j} y_2^{4\nu+j} y_3^{4\nu-j+1} + \lambda_{3\nu+2} y_2^{8\nu+1} y_3^{6\nu+1} = 0.$$

On en conclut que les courbes C'_1 ont deux points infiniment voisins successifs de A, multiples d'ordre 2ν, le premier étant sur $x_3 = 0$. Le dernier est uni parfait pour I_p. Soit P_1 ce point.

Les équations paramétriques de Φ_1 peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \rho X_i &= y_1^{12\nu+2} y_2^{i-1}\, y_3^{2\nu-i+1} && (i = 1, 2, \ldots, 2\nu+1), \\ \rho X_{2\nu+1+j} &= y_1^{6\nu+1}\, y_2^{4\nu+j} y_3^{4\nu-j+1} && (j = 1, 2, \ldots, \nu), \\ \rho X_{3\nu+2} &= y_2^{8\nu+1}\, y_3^{6\nu+1}. \end{aligned}$$

Pour obtenir sur cette surface la courbe qui représente les points infiniment voisins de P_1, posons $y_3 = \lambda y_2$ puis faisons tendre y_2 vers zéro. Nous obtenons

$$\frac{X_1}{\lambda^{2\nu}} = \frac{X_2}{\lambda^{2\nu-1}} = \ldots = \frac{X_{2\nu+1}}{1},$$
$$X_{2\nu+2} = X_{2\nu+3} = \ldots = X_{3\nu+2} = 0.$$

La courbe γ_1 est donc une courbe rationnelle normale d'ordre 2ν.

Effectuons maintenant sur les courbes C'_1 la transformation $T_2^{4\nu}$; nous obtenons

$$z_1^{4\nu p}(\lambda_1 z_2 + \lambda_{3\nu+2} z_3) + \ldots = 0,$$

les termes non écrits contenant z_1 à une puissance inférieure à $4\nu p$. Les courbes C'_1 ont en commun 4ν points simples infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur $x_2 = 0$ et le dernier, P_2, étant uni parfait pour I_p.

En raisonnant comme précédemment, on voit qu'aux points infiniment voisins de P_2 correspondent sur Φ_1 les points de la droite γ_2 d'équations

$$X_2 = \ldots = X_{2\nu+1} = X_{2\nu+2} = \ldots = X_{3\nu+1} = 0$$

Appelons O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_i. La courbe γ_1 et la droite γ_2 ont en commun le point O_1.

Il s'agit d'examiner la multiplicité de O_1 pour la surface Φ_1. A cet effet, nous allons considérer les courbes C''_1 données en posant $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$ dans l'équation (1). Ces courbes ont en A la multiplicité $2\nu + 3$, quatre tangentes étant confondues avec $x_2 = 0$, les $2\nu - 1$ autres avec $x_3 = 0$.

En appliquant aux courbes C''_1 la transformation T^2_1, on obtient

$$y_1^{12\nu+2} \sum_{i=2}^{2\nu+1} \lambda_i y_2^{i-2} y_3^{2\nu-i+1} + y_1^{6\nu+1} \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} y_2^{4\nu+j-1} y_3^{4\nu-j+1} + \lambda_{3\nu+2} y_2^{8\nu} y_3^{6\nu+1} = 0.$$

Les courbes C''_1 ont donc deux points multiples d'ordre $2\nu - 1$, infiniment voisins successifs de A. Ce sont les points déjà rencontrés en étudiant les courbes C'_1.

Les équations paramétriques de la surface Φ_2, projection de Φ_1 à partir de O_1 sur $X_1 = 0$, peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\rho X_i &= y_1^{12\nu+2} y_2^{i-2} y_3^{3\nu-i+1} && (i = 2, 3, \ldots, 2\nu+1), \\
\rho X_{2\nu+1+j} &= y_1^{6\nu+1} y_2^{4\nu+j-1} y_3^{4\nu-j+1} && (j = 1, 2, \ldots, \nu), \\
\rho X_{3\nu+2} &= y_2^{8\nu} y_3^{6\nu+1}.
\end{aligned}$$

Aux points infiniment voisins de P_1 correspondent, sur Φ_2, les points de la courbe

$$\frac{X_2}{\lambda^{2\nu-1}} = \frac{X_3}{\lambda^{2\nu-2}} = \ldots = \frac{X_{2\nu+1}}{1},$$
$$X_{2\nu+2} = X_{2\nu+3} = \ldots = X_{3\nu+2} = 0.$$

C'est la projection de γ_1 à partir de O_1 sur l'hypothèse $X_1 = 0$.

Appliquons à la courbe C''_1 la transformation $T_2^{\nu-1}$; nous obtenons l'équation

$$\sum_{i=2}^{2\nu+1} \lambda_i z_1^{(3\nu-1)(2\nu-i+1)} z_2^{3i-2} z_3^{(i-2)(3\nu-4)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} z_1^{6\nu^2-2\nu-1-(3\nu-1)j} z_2^{3j-1} z_3^{(3\nu-4)(j-1)+2} + \lambda_{3\nu+2} z_1^{(\nu-1)p} z_3^{6} = 0.$$

Le terme de plus haute puissance en z_1 est

$$\lambda_2 z_1^{(3\nu-1)(2\nu-1)} z_2^4.$$

La courbe possède donc un point quadruple en (1, 0, 0) et par conséquent les courbes C_1'' ont $\nu - 1$ points quadruples infiniment voisins successifs de A.

Opérons encore une fois T_2 sur la courbe précédente. On obtient

$$\sum_{i=2}^{2\nu+1} \lambda_i z_1^{(3\nu+2)(2\nu-i+1)} z_2^{3i-2} z_3^{(i-2)(3\nu-1)}$$
$$+\sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{2\nu+1+j} z_1^{(3\nu+2)(2\nu-j)+1} z_2^{3j-1} z_3^{(3\nu-1)(j-1)+1} + \lambda_{3\nu+2} z_1^{\nu p} z_3^2 = 0.$$

Le terme de plus haute puissance en z_1 est le dernier et par conséquent aux $n-1$ points quadruples fait suite un point double.

Opérons enfin la transformation T_1. Nous obtenons une courbe d'équation

$$z_1^{2\nu p}(\lambda_2 z_2^2 + \lambda_{2\nu+2} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+2} z_3^2) + \ldots = 0,$$

les termes non écrits contenant z_1 à une puissance inférieure à $2\nu p$. Nous obtenons un dernier point double, uni parfait pour l'involution I_p. Au domaine de ce point correspond sur la surface Φ_2 la conique d'équations

$$X_{2\nu+2}^2 - X_2 X_{3\nu+2} = 0, \qquad X_3 = \ldots = X_{2\nu+1} = X_{2\nu+3} = \ldots = X_{3\nu+1} = 0.$$

Désignons-la par γ_0. Cette conique rencontre la courbe γ_1', projection de γ_1, au point O_2.

Nous voyons que le point A_1' est double conique pour la surface Φ_1. Au point $A' \equiv O_0$, la surface Φ possède donc la multiplicité $2\nu + 1$, le cône tangent étant décomposé en un cône d'ordre 2ν et un plan ayant une droite commune. Au point A' est infiniment voisin un point double conique.

17. Envisageons maintenant le cas $p = 6\nu + 5$. L'équation des

courbes C_1 s'écrit

$$(1)\qquad \lambda_0 x_1^p + \sum_{i=1}^{2\nu+2} \lambda_i x_1^{4\nu-2i+4} x_2^{3i-1} x_3^{2\nu-i+2}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_{2\nu+2+j} x_1^{2\nu-2j+3} x_2^{3j-2} x_3^{4\nu-j+4} + \lambda_{3\nu+4} x_3^p = 0.$$

Nous obtiendrons les équations paramétriques de la surface Φ, image de l'involution I_p, dans un espace linéaire $S_{3\nu+4}$, en posant

$$\rho X_0 = x_1^p, \qquad \rho X_i = x_1^{4\nu-2i+4} x_2^{3i-1} x_3^{2\nu-i+2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2\nu+2),$$
$$\rho X_{2\nu+2+j} = x_1^{2\nu-2j+3} x_3^{3j-2} x_3^{4\nu-j+4} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu+1),$$
$$\rho X_{3\nu+4} = x_3^p.$$

Les courbes C'_1 sont caractérisées par $\lambda_0 = 0$; elles ont en A la multiplicité $2\nu + 3$, deux tangentes étant confondues avec $x_2 = 0$ et $2\nu + 1$ avec $x_3 = 0$.

Opérons sur les courbes C'_1 la transformation T_1^2; on obtient

$$y_1^{12\nu+10} \sum_{i=1}^{2\nu+2} \lambda_i y_2^{i-1} y_3^{2\nu-i+2} + y_1^{6\nu+5} \sum \lambda_{2\nu+2+j} y_2^{4\nu+j+2} y_3^{4\nu-j+4} + \lambda_{3\nu+4} y_2^{8\nu+5} y_3^{6\nu+5} = 0.$$

Les courbes C'_1 ont donc deux points multiples d'ordre $2\nu + 1$, infiniment voisins successifs de A. Au domaine du dernier, P_1, de ces points correspond, sur la surface Φ_1, la courbe γ_1, courbe normale d'ordre $2\nu + 1$,

$$\frac{X_1}{\lambda^{2\nu+1}} = \frac{X_2}{\lambda^{2\nu}} = \ldots = \frac{X_{2\nu+2}}{1},$$
$$X_{2\nu+3} = \ldots = X_{3\nu+3} = X_{3\nu+4} = 0.$$

Opérons d'autre part, sur les courbes C'_1, la transformation $T_2^{2\nu+1}$. On a

$$z_1^{12\nu^2+16\nu+5}(\lambda_1 z_2^2 + \lambda_{2\nu+3} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+4} z_3^2) + \ldots = 0.$$

Les courbes C'_1 ont donc en commun une suite de $2\nu + 1$ points doubles infiniment voisins successifs. Au domaine du dernier, P_2, de ces points correspond sur la surface Φ_1 la conique γ_2 d'équations

$$X_{2\nu+3}^2 - X_1 X_{3\nu+4} = 0, \qquad X_2 = \ldots = X_{2\nu+2} = 0, \qquad X_{2\nu+4} = \ldots = X_{3\nu+3} = 0.$$

Les courbes γ_1, γ_2 ont en commun le point O_1.

Considérons maintenant les courbes C''_1, caractérisées par $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Elles ont en A la multiplicité $2\nu + 5$, 2ν tangentes coïncidant avec $x_3 = 0$ et cinq avec $x_2 = 0$.

Appliquons aux courbes C''_1 la transformation T_1^2; nous obtenons

$$y_1^{12\nu+10} \sum_{i=2}^{2\nu+2} \lambda_i y_2^{i-2} y_3^{2\nu-i+2} + \ldots = 0.$$

Les courbes C''_1 ont deux points multiples d'ordre 2ν infiniment voisins successifs de A. Au domaine du dernier, P_1, correspond sur la surface Φ_2 la courbe γ'_1 projection de γ_1 à partir de O_1 sur l'hyperplan $X_1 = 0$.

Appliquons aux courbes C''_1 la transformation T_2; à cet effet, nous distinguerons deux cas, suivant que ν est pair ou impair.

Supposons en premier lieu $\nu = 2\nu'$ et effectuons $T_2^{\nu'-1}$. En n'écrivant pour abréger que les termes de l'équation qui nous intéressent, nous obtenons

$$\lambda_2 z_1^{2\nu(3\nu'-1)} z_2^5 + \lambda_{2\nu+3} z_1^{2\nu(3\nu'-1)-3} z_2 z_3^7 + \lambda_{3\nu+4} z_1^{2\nu(3\nu'-2)-3\nu'-5} z_3^{3\nu'+10} + \ldots = 0.$$

Les courbes C''_1 possèdent $\nu' - 1$ points quintuples infiniment voisins successifs dont le premier est situé sur la droite $x_2 = 0$.

En appliquant une nouvelle fois T_2, on obtient

$$\lambda_2 z_1^{3\nu^2+4\nu} z_2^5 + \lambda_{2\nu+3} z_1^{3\nu^2+4\nu+1} z_2 z_3^3 + \lambda_{3\nu+4} z_1^{3\nu^2+2\nu+\nu'} z_3^{2\nu-\nu'+5} + \ldots = 0. \tag{2}$$

Au dernier point quintuple fait donc suite un point quadruple.

En appliquant à la courbe (2) la transformation $T_2^{3\nu'+1}$, on trouve que le coefficient de la plus haute puissance de z_1 est $\lambda_{2\nu+3} z_2 + \lambda_{3\nu+4} z_3$. Au point quadruple font donc suite $3\nu' + 1$ points simples dont le dernier est P_2. Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ_2, la droite

$$X_2 = \ldots = X_{2\nu+2} = 0, \qquad X_{2\nu+4} = \ldots = X_{3\nu+3} = 0,$$

projection de la conique γ_2 sur l'hyperplan $X_1 = 0$ (contenant Φ_2).

Reprenons la courbe (2). La transformation T_1 donne

$$\lambda_2 y_1^{2\nu(3\nu+1)} y_2 + \lambda_{2\nu+3} y_1^{2\nu(3\nu+1)-2} y_3^3 + \ldots = 0.$$

Au point quadruple de la courbe (2) est donc infiniment voisin, dans la direction $z_3=0$, un point simple.

En appliquant à la courbe précédente la transformation T_2^2, on trouve finalement

$$z_1^{2\nu(6\nu+5)}(\lambda_2 z_2+\lambda_{2\nu+3} z_3)+\ldots=0.$$

Au point simple font donc encore suite deux points simples dont le dernier, P_0, est uni parfait pour l'involution I_p. Au domaine de ce point correspond, sur Φ_2, la droite $O_2 O_{2\nu+3}$.

Il résulte de ceci que dans le cas $\nu=2\nu'$, le point $A'_1 \equiv O_1$ est simple pour la surface Φ_1, le plan tangent étant $O_1 O_2 O_{2\nu+3}$.

On parvient aux mêmes conclusions dans le cas $\nu=2\nu'+1$. On trouve sans difficulté qu'au point A sont infiniment voisins successifs ν' points quintuples, le premier étant sur $x_2=0$; on trouve ensuite un point double. A ce dernier point sont infiniment voisins successifs dans une direction $3\nu'+2$ points simples dont le dernier est P_2, dans une autre direction, trois points simples. Le plan tangent à la surface Φ_1 en O_1 est $O_1 O_2 O_{2\nu+3}$.

Le point $A' \equiv O_0$ est donc multiple d'ordre $2\nu+3$ pour la surface Φ, le cône tangent étant formé d'un cône rationnel d'ordre $2\nu+1$ et d'un cône du second ordre ayant une seule droite en commun avec le premier. Il n'y a pas de point multiple infiniment voisin de A.

18. Nous voudrions actuellement montrer sur un exemple, emprunté également à la théorie des homographies cycliques du plan, que le cône tangent à la surface Φ au point de diramation A', peut être décomposé en plus de deux parties.

Considérons l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^9 x_3,$$

où ε est une racine primitive d'ordre 23 de l'unité. Cette homographie engendre une involution I_{23} d'ordre 23, ayant comme points unis les sommets du triangle de référence. Nous étudierons le point uni A(1, 0, 0).

Pour système $|C|$, prenons le système des courbes d'ordre 23. Le système $|C_1|$ a pour équation

$$(1)\quad \lambda_0 x_1^{23} + \lambda_1 x_1^{17} x_2\, x_3^5 + \lambda_2 x_1^{16} x_2^5\, x_3^2 + \lambda_3 x_1^{11} x_2^2 x_3^{10} + \lambda_4 x_1^{10} x_2^6 x_3^7$$
$$+ \lambda_5 x_1^9\, x_2^{10} x_3^4 + \lambda_6 x_1^8\, x_2^{14} x_3 + \lambda_7 x_1^5\, x_2^3 x_3^{15} + \lambda_8 x_1^4\, x_2^7 x_3^{12} + \lambda_9 x_1^3 x_2^{11} x_3^9$$
$$+ \lambda_{10} x_1^2 x_2^{15} x_3^6 + \lambda_{11} x_1 x_2^{19} x_3^3 + \lambda_{12} x_2^{23} + \lambda_{13} x_3^{23} = 0.$$

La surface Φ sera obtenue en rapportant projectivement les courbes (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_{13}. Le point de diramation correspondant au point A sera le point $A' \equiv O_0$.

Les courbes C'_1 sont données par $\lambda_0 = 0$; elles ont un point sextuple en A, une tangente coïncidant avec $x_2 = 0$ et cinq avec $x_3 = 0$.

Appliquons à la courbe C'_1 la transformation T_1. La courbe obtenue

$$(2)\quad \lambda_1 z_1^{35} z_3^5 + \lambda_2 z_1^{37} z_2 z_3^2 + z_1^{24} z_2^6 z_3 (\lambda_3 z_3^9 + \lambda_4 z_1^2 z_2 z_3^6 + \lambda_5 z_1^4 z_2^2 z_3^3 + \lambda_6 z_1^6 z_2^3)$$
$$+ z_1^{13} z_2^{12} (\lambda_7 z_3^{15} + \lambda_8 z_1^2 z_2 z_3^{12}$$
$$+ \lambda_9 z_1^4 z_2^2 z_3^9 + \lambda_{10} z_1^6 z_3^3 z_3^6 + \lambda_{11} z_1^8 z_2^4 z_3^3 + \lambda_{12} z_1^{10} z_2^5) + \lambda_{13} z_2^{17} z_3^{23} = 0$$

possède un point triple à tangentes $z_2 z_3^2 = 0$ au point (1, 0, 0), donc les courbes C'_1 ont un point triple infiniment voisin de A sur la tangente $x_3 = 0$.

Appliquons à la courbe (2) la transformation T_1^7; nous obtenons

$$z_1^{184} (\lambda_2 z_3^2 + \lambda_6 z_2 z_3 + \lambda_{12} z_2^2) + \ldots = 0,$$

les termes non écrits contenant z_1 à une puissance inférieure à 184. Les courbes C'_1 ont donc une suite de sept points doubles infiniment voisins successifs du point triple trouvé plus haut. Le dernier de ces points est uni parfait pour I_{23}. Sur la surface Φ_1 de S_{12}, il lui correspond la conique

$$X_6^2 - X_2 X_{12} = 0$$

du plan $O_2 O_6 O_{12}$.

Effectuons au contraire sur la courbe (2) la transformation T_2^2; nous obtenons

$$z_1^{115} (\lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_2) + \ldots = 0.$$

Il y a donc deux points simples infiniment voisins successifs du point triple. Le dernier de ces points est uni parfait pour I_{23} et il lui correspond, sur Φ_1, la droite $O_1 O_2$.

Reprenons la courbe (1) et effectuons la transformation T_2^{17}; nous obtenons

$$z_1^{391}(\lambda_1 z_2 + \lambda_{13} z_3) + \ldots = 0.$$

Les courbes C'_1 ont donc dix-sept points simples infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur $x_2 = 0$. Le dernier est uni parfait pour I_{23} et à son domaine correspond, sur la surface Φ_1, la droite $O_1 O_{13}$.

Nous voyons donc que la surface Φ possède au point de diramation A′ un point quadruple, le cône tangent étant formé d'un cône du second ordre et de deux plans; les deux plans se rencontrent suivant une droite et l'un d'eux rencontre le cône du second ordre suivant une droite.

On peut continuer l'étude de la singularité de la surface Φ au point A′; la question ne présente aucune difficulté; nous nous bornerons à donner les résultats.

Sur la surface Φ_1, nous avons une conique γ_2 et deux droites $\gamma_{11} = O_1 O_2$, $\gamma_{12} = O_1 O_{13}$ se rencontrant au point O_1. Seule la première droite γ_{11} rencontre la conique γ_2 au point O_2. Le point O_2 est simple pour la surface Φ_1, le point O_1 est double biplanaire ordinaire. Ce point est équivalent à deux droites γ_{21}, γ_{22} de degré -2, se rencontrant en un point. La droite γ_{21} rencontre γ_1 en un point et la droite γ_{22} rencontre γ_{12} en un point. Les droites γ_{21}, γ_{22} coïncident respectivement, sur la surface Φ_2, avec les droites $O_2 O_3$, $O_3 O_{13}$.