

## SUR LES POINTS D'ECKARDT D'UNE SURFACE ALGÈBRIQUE,

par M. LUCIEN GODEAUX,  
*Professeur à l'Université de Liège.*

E. F. ECKARDT (1) a considéré les points simples d'une surface cubique appartenant à trois droites de cette surface. Nous appellerons plus généralement *point d'ECKARDT* d'une surface algébrique un point simple de cette surface en lequel le plan tangent coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple au point de contact. Dans cette note, nous établissons quelques propriétés de ces points.

1. Soit  $F$  une surface algébrique d'ordre  $n$ . Le plan tangent  $\sigma$  en un point simple  $O$  de cette surface coupe celle-ci suivant une courbe  $C_0$  ayant en général un point double à tangentes distinctes en  $O$ . La  $(n - 2)$ -ième polaire du point  $O$  par rapport à la surface  $F$  est une quadrique  $Q$  tangente à  $F$  au point  $O$  et la section de  $Q$  par  $\sigma$  est formée des tangentes en  $O$  à la courbe  $C_0$  (tangentes asymptotiques de  $F$  en  $O$ ).

Si le point  $O$  est parabolique pour la surface  $F$ , les tangentes asymptotiques coïncident et la courbe  $C_0$  a un point de rebroussement en  $O$ . La quadrique polaire  $Q$  touche le plan  $\sigma$  suivant la tangente de rebroussement et est par conséquent un cône. Le sommet de ce cône ne coïncide pas avec le point  $O$ , car une droite  $p$  passant par  $O$  et n'appartenant pas à  $\sigma$  coupe encore  $F$  en  $n - 1$  points; le  $(n - 2)$ -ième groupe polaire de  $O$  par rapport à la section de  $F$  par  $p$  se compose donc du point  $O$  et d'un point distinct de  $O$ , appartenant au cône  $Q$ .

Supposons maintenant que  $O$  soit un point d'ECKARDT de la surface  $F$ , c'est-à-dire que la courbe  $C_0$  ait un point triple en  $O$ .

Une droite  $s$  passant par  $O$  et située dans  $\sigma$  coupe  $F$  en  $n$  points dont trois (au moins) sont confondus avec  $O$ ; le  $(n - 2)$ -ième groupe polaire de  $O$  par rapport à ce groupe de points est donc indéterminé et la droite  $s$  appartient à la quadrique  $Q$ . Il en résulte que cette qua-

---

(1) E. F. ECKARDT, *Ueber diejenigen Flächen dritten Grades auf denen sich drei geraden Linien in einem Punkte schneiden* (MATH. ANNALEN, 1876, t.X). Voir aussi, sur le même objet : CIANI, *Sopra un fascio sizzigatico di superficie cubiche* (REND. ACCAD. NAZ. LINCEI, 1<sup>o</sup> sem. 1935); L. GODEAUX, *Sur les droites d'une surface cubique* (M, 1933), *Sur les surfaces cubiques possédant six points d'ECKARDT* (BULL. ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1935).

drique est dégénérée et contient le plan  $\sigma$  comme partie. Elle est complétée par un plan  $\sigma_1$  qui ne passe pas par O (pour la même raison que le sommet du cône Q. dans le cas où O est parabolique, est en général distinct de O).

Inversement, supposons que la quadrique Q soit dégénérée en deux plans dont l'un est le plan tangent  $\sigma$ . Une droite  $s$  passant par O et située dans  $\sigma$  coupe F en  $n$  points comprenant le point O compté au moins deux fois et un groupe G contenant au plus  $n - 2$  points. Le  $(n - 2)$ -ième groupe polaire de O par rapport aux points d'intersection de F et de  $s$  se compose du point O et du  $(n - 2)$ -ième groupe polaire de O par rapport au groupe G. Or, puisque la droite  $s$  appartient à Q, ce groupe doit être indéterminé, ce qui exige qu'il soit formé de moins de  $n - 2$  points. Il en résulte que la droite  $s$  coupe F en trois points au moins confondus en O et que O est un point d'ECKARDT.

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point simple d'une surface algébrique soit un point d'ECKARDT est que la  $(n - 2)$ -ième polaire de ce point par rapport à la surface contienne comme partie le plan tangent à la surface au point considéré.*

2. Soit

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation de la surface F. Si nous désignons par  $y_1, y_2, y_3, y_4$  les coordonnées du point O, l'équation de la  $(n - 2)$ -ième polaire Q de O par rapport à F s'écrit

$$x_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} + \dots + 2x_3 x_4 \frac{\partial^2 F}{\partial y_3 \partial y_4} = 0.$$

Lorsque le point O appartient à la hessienne

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right| = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

de la surface F, la quadrique Q est un cône et la ligne parabolique de F est l'intersection de cette surface avec la hessienne (en dehors des points multiples éventuels de F).

Si O est un point d'ECKARDT, la quadrique Q dégénère en deux plans et par conséquent, au point O, tous les mineurs du déterminant du premier membre de (1) sont nuls. Les dérivées de ce déterminant s'exprimant au moyen des mineurs, ces dérivées sont nulles au point O et par conséquent O est double pour (1).

*En un point d'ECKARDT, la hessienne d'une surface possède un point double.*

3. Pour nous rendre compte de la nature du point double O pour la hessienne, déplaçons le tétraèdre de référence de manière que O ait pour coordonnées 0, 0, 0, 1 et que le plan tangent  $\sigma$  à la surface ait pour équation  $x_3 = 0$ . Représentons par  $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$  un polynôme entier rationnel et homogène de degré  $i$  en  $x_1, x_2, x_3$ . L'équation de la surface F s'écrit sous la forme

$$x_4^{n-1}x_3 + x_4^{n-2}x_3\varphi_1 + x_4^{n-3}\varphi_3 + \dots + \varphi_n = 0. \quad (2)$$

Formons l'équation de la hessienne. Le terme de degré le plus élevé en  $x_4$  est

$$(n-1) \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2} & (n-2)x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} & (n-2)x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & n-1 \end{vmatrix} x_4^{4n-10}.$$

La hessienne étant d'ordre  $4n - 8$ , le point O est bien double pour cette surface. Le cône tangent en O a pour équation le coefficient de  $x_4^{4n-10}$  égalé à zéro, c'est-à-dire

$$(n-1) \left[ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] - (n-2)x_3 \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} \right] = 0. \quad (3)$$

Ce cône est en général irréductible et O est donc un point double conique pour la hessienne.

Nous allons préciser ce résultat. Supposons que le plan tangent  $\sigma$  à F en O coupe la surface suivant une courbe  $C_0$  ayant un point au moins quadruple en O. Alors, dans l'équation (2), on doit poser

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3 \varphi_2(x_1, x_2, x_3).$$

On a alors

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2} = x_3 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2} = x_3 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3) du cône tangent à la hessienne en O, on voit qu'elle se réduit à  $x_3^2 = 0$ . Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*En un point d'ECKARDT d'une surface algébrique, triple pour la*

section de la surface par le plan tangent en ce point, la hessienne possède un point double conique.

De plus :

*En un point simple d'une surface algébrique, quadruple au moins pour la section de la surface par le plan tangent en ce point, la hessienne a un point double uniplanaire, le plan tangent coïncidant avec le plan tangent à la surface.*

---

## PRODUIT DES DISTANCES DE DEUX POINTS CONJUGUÉS ISOGONAUX A UNE DROITE QUELCONQUE DU PLAN DU TRIANGLE,

par M. M. MONSEAU, à Hanoï (Indochine).

On connaît le théorème de T. LEMOYNE d'après lequel les cercles podaires des points d'une droite sont orthogonaux à un cercle fixe (NA, 1904, p. 400). Le centre de ce cercle est l'orthopôle de la droite ; le carré de son rayon est égal, au signe près, au double produit des distances à la droite, de l'orthopôle de cette droite et du centre du cercle circonscrit (A. HAARBLEICHER, *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, p. 60).

Pour la commodité de l'exposé, on appellera ce cercle le cercle de LEMOYNE de la droite considérée.

L'objet de cette note est de faire connaître une expression métrique du théorème de LEMOYNE et de donner quelques propriétés des cercles de LEMOYNE ainsi définis.

1. THÉORÈME. *Étant donnés une droite quelconque du plan d'un triangle et un couple quelconque de points isogonaux, le produit des distances de ces points à la droite est égal à la puissance commune de leur cercle podaire et du cercle de LEMOYNE de la droite* <sup>(1)</sup>.

Soient en effet  $\Delta_0$  une droite du plan d'un triangle ABC, (M, M') un couple de points isogonaux ; par les points M et M' menons les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  parallèles à  $\Delta_0$  et désignons par  $(\omega_0, \rho_0)$ ,  $(\omega, \rho)$ ,  $(\omega', \rho')$  les cercles de LEMOYNE des droites  $\Delta_0, \Delta, \Delta'$ .

Les points  $\omega_0, \omega, \omega'$  sont situés sur une perpendiculaire commune

---

(1) On entend, suivant l'usage, par puissance commune de deux cercles la différence entre le carré de la distance des centres et la somme des carrés des rayons ; il est clair qu'elle est nulle quand les cercles sont orthogonaux.