

REMARQUES SUR LES QUADRIQUES ASSOCIÉES AUX POINTS D'UNE SURFACE

PAR LUCIEN GODEAUX

On sait que Lie a attaché à tout point d'une surface (x) une quadrique osculatrice appelée quadrique de Lie⁽¹⁾. Nous avons montré que cette quadrique est la première d'une suite de quadriques Φ, Φ_1, \dots attachée intrinsèquement à tout point x de la surface (x) , deux quadriques consécutives de cette suite se touchant en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques en question⁽²⁾.

Dans une série de mémoires intéressants sur les surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires, M. Buchin Su a introduit une quadrique, attachée au point x de la surface (x) , qu'il appelle quadrique associée⁽³⁾. Dans cette courte note, nous nous proposons de montrer que la quadrique associée de M. Buchin Su n'est autre que la seconde quadrique Φ_1 de notre suite, quadrique dont on possède ainsi une nouvelle définition. Cela nous permet de montrer l'identité d'une condition caractéristique des surfaces minima-projec-

(1) Voir Demoulin, Sur la théorie des lignes asymptotiques, *Comptes Rendus*, **147** (1908), 413-415; Sur quelques propriétés des surfaces courbes, *Comptes Rendus*, **147** (1908), 565-568; Sur la quadrique de Lie, *Comptes Rendus*, **147** (1908), 493-496.

(2) Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé, *Bull. Acad. roy. de Belgique*, (V) **13** (1927), 812-826; **14** (1928), 31-41; *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Paris, Hermann (1934).

(3) On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes, *Tôhoku Math. Journal*, **40** (1935), 408-420; 433-448; **41** (1935), 1-19; 203-215; *Science Reports of the Tôhoku Imp. University*, (I) **24** (1936), 601-633; 633-642; On certain pair of surfaces. *University of Chekiang, Science Reports*, **2** (1936), 39-51.

tives, indiquée par M. Buchin Su, avec une condition que nous avons donnée antérieurement.

1. Soit (x) une surface non réglée de l'espace ordinaire, rapportée à ses asymptotiques u, v . Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfont au système complètement intégrable⁽⁴⁾

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0,$$

a, b étant des fonctions de u, v non identiquement nulles.

A un point x non parabolique de la surface (x) , attachons le tétraèdre de Cartan ayant pour sommets les points

$$x, m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \quad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$

$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1x + z_2m + z_3n + z_4y$$

et les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 sont appelées coordonnées locales de ce point.

La quadrique de Lie Φ , attachée au point x , a pour équation locale

$$z_1z_4 + z_2z_3 = 0.$$

Les points caractéristiques de Φ sont le point x et les sommets du quadrilatère de Demoulin. Posons

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2)$$

et désignons par ξ, η des racines des équations

⁽⁴⁾ Nous posons

$$g^{ik} = \frac{\partial^{i+k} \varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

Les arêtes du quadrilatère de Demoulin ont pour équations

$$\left. \begin{aligned} z_1 + \xi z_2 = 0, & \quad z_3 - \xi z_4 = 0, \\ z_1 - \xi z_2 = 0, & \quad z_3 + \xi z_4 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 + \eta z_3 = 0, & \quad z_2 - \eta z_4 = 0, \\ z_1 - \eta z_3 = 0, & \quad z_2 + \eta z_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Une quadrique circonscrite au quadrilatère de Demoulin a pour équation locale

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2 + \lambda (z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0. \quad (3)$$

2. Les tangentes aux asymptotiques u, v ⁽⁵⁾ de la surface (x) sont respectivement les droites xm, xn . Lorsque u varie seul, la droite xm engendre la développable asymptotique S_u et lorsque v varie seul, la réglée gauche asymptotique R_u . Lorsque v varie seul, la droite xn engendre la développable asymptotique S_v et lorsque u varie seul, la réglée gauche asymptotique R_v .

M. Demoulin (loc. cit.) a démontré que les tangentes flecnodales de la réglée R_u sont les droites (1) et celles de la réglée R_v , les droites (2).

Les points flecnodaux situés sur la droites xm sont les points

$$t_{u1} = \xi x - m, \quad t_{u2} = \xi x + m$$

et les points flecnodaux situés sur la droite xn , les points

$$t_{v1} = \eta x - n, \quad t_{v2} = \eta x + n.$$

Lorsque v varie seul, le point t_{u1} décrit une ligne flecnodale de la surface R_u ; la tangente à cette courbe au point t_{u1} passe par le point

$$(2\xi^{01} + 2k_1)x - \xi n - y,$$

où l'on a posé

$$k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

⁽⁵⁾ Nous appelons ligne u la ligne sur laquelle u varie seul.

Le plan tangent à la quadrique (1) au point t_{u1} a pour équation

$$\xi(2z_1 + \lambda z_4) - 2\alpha z_2 - \lambda z_3 = 0. \quad (4)$$

En exprimant que ce plan contient le point dont il vient d'être question, on trouve que la quadrique du faisceau (3) tangente en t_{u1} à la courbe décrite par ce point lorsque v varie, est la quadrique de Lie. La symétrie de l'équation de cette quadrique permet de conclure que c'est la quadrique du faisceau (3) tangente aux lignes flecnodales des réglées R_u, R_v .

3. Lorsque u varie seul, le point t_{u1} décrit, sur la développable S_u , une courbe dont la tangente en t_{u1} passe par le point

$$[2\xi^{10} + \xi(\log a)^{10}]x + (\log a)^{10}m + 4bn.$$

La condition pour que ce point appartienne au plan (4) est

$$2b\lambda - \alpha(\log a^2 \alpha)^{10} = 0.$$

Par conséquent la quadrique du faisceau (3) tangente en t_{u1} à la courbe décrite par ce point lorsque u varie seul a pour équation

$$2b(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) - \alpha(\log a^2 \alpha)^{10}(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0. \quad (5)$$

Cette quadrique est également tangente au point t_{u2} à la courbe décrite par ce point lorsque u varie.

Nous avons d'autre part établi la relation

$$a\alpha(\log a^2 \alpha)^{10} = b\beta(\log b^2 \beta)^{01}.$$

L'équation de la quadrique (5) peut donc également s'écrire

$$2a(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) - \beta(\log b^2 \beta)^{01}(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.$$

La quadrique (5) est donc également tangente aux points t_{v1}, t_{v2} aux courbes décrites par ces points lorsque v varie.

La quadrique (5) est d'une part la *quadrique associée* de M. Buchin Su, d'autre part la seconde quadrique Φ_1 de la suite que

nous avons attachée au point x de la surface (x) . Parmi les huit points caractéristiques de la quadrique Φ_1 , se trouvent les quatre sommets du quadrilatère de Demoulin.

4. La polaire conjuguée de la quadrique (3) par rapport à la quadrique de Lie a pour équation

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \lambda(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la quadrique (5) soit autopolaire par rapport à la quadrique de Lie Φ est que l'on ait l'une des deux relations équivalentes⁽⁶⁾

$$(\log a^2 \alpha)^{10} = 0, \quad (\log b^2 \beta)^{01} = 0.$$

Sous cette condition, nous avons montré qu'il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe de la quadrique de Lie, c'est-à-dire que la surface (x) est minima projective⁽⁷⁾.

Liège, Université, le 13 mai 1936

(Reçu le 12, Juin, 1936)

⁽⁶⁾ Voir notre note Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, *Bull. Acad. roy. de Belgique*, (V) **15** (1929), 37-53.

⁽⁷⁾ Sur les directrices de Wilczynski et les quadriques de Lie d'une surface, *Bull. Acad. roy. de Belgique*, **15** (1929), 126-133.