RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
**Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.**
Estratto dal vol. XIV, serie 6ª, 2° sem., fasc. 11. – Roma, dicembre 1931-x.

**Matematica.** — *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux.* Nota di L. GODEAUX, presentata [1] dal Socio F. ENRIQUES.

On sait qu'il existe des surfaces algébriques dépourvues de courbes canoniques mais possédant des courbes bicanoniques: le premier exemple d'une telle surface fut donné par M. Enriques [2]; c'est la surface de genres $p_a = p_g = P_3 = 0$ , $p^{(1)} = P_2 = 1$, qui peut se remener, par une transformation birationnelle, à une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Cette surface a une courbe bicanonique d'ordre zéro. Un second exemple est dû à M. Castelnuovo [3], qui a construit une surface de genres $p_a = p_g = 0$ , $p^{(1)} = 1$ , $P_2 = 2$, possédant un faisceau de courbes bicanoniques elliptiques. Nous nous proposons d'exposer dans cette Note un exemple d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$ , $p^{(1)} = P_2 = 2$ , $P_3 = 4$. Nous y avons été conduit par le raisonnement suivant:

Soit F une surface algébrique régulière contenant une involution cyclique $I_p$, d'ordre $p$, dépourvue de points unis. Supposons que le système canonique de F ne soit composé ni au moyen d'un faisceau, ni au moyen de l'involution $I_p$ et qu'il ne possède pas de composante fixe. Supposons en outre que les genres géométrique $p_g$ et arithmétique $p_a$ de cette surface soient

$$p_a = p_g = p - 1 .$$

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie della Società dei XL, 1896, t. X, p. 66).

(3) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* (Idem. p. 122).

Une surface $\Phi$, image de l'involution $I_p$, est régulière. Entre les genres arithmétique $\pi_a$ et linéaire $\pi^{(1)}$ de $\Phi$ et les genres arithmétique $p_a$ et linéaire $p^{(1)}$ de F, on a les relations (1)

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1),$$
$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1),$$

et par suite on a $\pi_a = 0$.

Désignons par T la transformation birationnelle de F en elle-même génératrice de l'involution $I_p$. T transforme le systeme canonique de F en lui-même. Aux courbes canoniques de F, transformées en elles-mêmes par T, correspondent sur $\Phi$ des courbes qui ne peuvent appartenir à leurs adjointes, et la surface régulière $\Phi$, de genres géométrique et arithmétique 0, est dépourvue de courbe canonique. Par contre, peut posséder des courbes bicanoniques.

Appliquons ce qui précède au cas où F est une surface du cinquième ordre, ne passant pas par les sommets du tétraèdre de référence, qui soit unie pour l'homographie de période cinq

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4,$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive cinquième de l'unité.

On a actuellement $p = 5$, $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$. La surface $\Phi$ aura les caractères $\pi_a = \pi_g = 0$, $\pi^{(1)} = P_2 = 2$, $P_3 = 4$, ... et les courbes bicanoniques seront des sextiques gauches de genre quatre, formant un faisceau.

Nous réserverons à un travail plus étendu le développement de ce qui précède; nous nous bornerons dans cette Note à la considération d'*une surface du septième ordre, possédant quatre droites doubles tacnodales, côtés d'un quadrilatère gauche* et nous montrerons qu'*elle a les genres* $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 2$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 7$.

Considérons la surface $\Phi$, d'ordre sept, d'équation

$$a_1 x_1^4 x_2 x_4^2 + a_2 x_2^4 x_4 x_3^2 + a_3 x_3^4 x_1 x_2^2 + a_4 x_4^4 x_3 x_1^2 = 0.$$

Cette surface est circonscrite au tétraèdre de référence et a comme droites doubles les arêtes $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_4 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$. De plus, elle possède une droite double infiniment voisine

(1) F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri*... (Rend. Istituto Lomb., 1903). Voir aussi, pour le cas particulier des relations de M. Severi qui nous intéresse ici, nos *Recherches sur les involutions*... (« Bull. de la Soc. Math. de France », 1919).

de chacune des droites précédentes, à savoir : une droite double infiniment voisine de $x_1 = x_2 = 0$ dans le plan $x_1 = 0$, une dans le plan $x_2 = 0$ infiniment voisine de $x_2 = x_4 = 0$, une dans le plan $x_4 = 0$ infiniment voisine de $x_4 = x_3 = 0$, enfin une dans le plan $x_3 = 0$, infiniment voisine de $x_3 = x_1 = 0$.

Les sommets du tétraèdre de référence sont triples pour la surface $\Phi$. Celle–ci est irréductible et ne possède pas de point multiple en dehors de ceux qui viennent d'être indiqués.

Les adjointes de la surface $\Phi$ sont des surfaces cubiques qui doivent passer par les arêtes du tétraèdre de référence qui sont doubles pour la surface, en y touchant la face qui contient la droite double infiniment voisine. De telles surfaces n'existent pas et le genre géométrique de $\Phi$ est $p_g = 0$. Les biadjointes de la surface $\Phi$ sont des surfaces du sixième ordre qui doivent passer par les droites doubles, chacune de ces droites comptant pour huit dans l'intersection. Il en résulte que les biadjointes sont données par

$$x_1 x_2 x_3 x_4 (\lambda_1 x_1 x_4 + \lambda_2 x_2 x_3) = 0 .$$

On a donc pour $\Phi$ le bigenre $P_2 = 2$. Les courbes bicanoniques sont des sextiques gauches de genre quatre passant par les sommets du tétraèdre de référence et on a $p^{(1)} = 2$.

Les triadjointes de la surface $\Phi$ sont les surfaces du neuvième ordre

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) = 0 .$$

Les courbes tricanoniques sont donc les sections planes, de genre sept.

Les surfaces 4–adjointes sont formées des faces du tétraèdre de référence, comptées chacune deux fois, et de la surface

$$\lambda_1 x_1^2 x_4^2 + \lambda_2 x_2^2 x_3^2 + \lambda_3 x_1^2 x_2 x_4 + \lambda_4 x_2^2 x_3 x_4 + \lambda_5 x_3^2 x_1 x_2 +$$
$$+ \lambda_6 x_4^2 x_1 x_3 + \lambda_7 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 .$$

On a donc $P_4 = 7$. De plus, les surfaces précédentes découpent, sur une section plane, la série canonique complète, donc la surface $\Phi$ est régulière ($p_a = p_g = 0$).

Les droites $x_1 = x_4 = 0$ , $x_2 = x_3 = 0$ sont exceptionnelles.

Roma, 1931 — Dott. G. Bardi, Tip. della R. Accad. dei Lincei.