DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE À LA GÉOMÉTRIE SUR UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

par

Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie Royale de Belgique
Membre d'Honneur de la Société

La géométrie

Jusqu'au XVII[e] siècle, les mathématiciens ont utilisé l'espace d'Euclide, construction logique basée sur certains postulats, qui se rapprochait suffisamment de l'espace physique pour qu'une assimilation soit possible. À partir de cette époque, les géomètres se sont vus obligés d'amplifier l'espace euclidien en introduisant des points fictifs : les points à l'infini, les points imaginaires, les points infiniment voisins d'un point donné. Nous voudrions indiquer le pourquoi de ces amplifications, ce qui nous conduira à brosser une histoire de la Géométrie. Nous nous bornerons cependant au champ complexe sans parler des recherches récentes où les coordonnées d'un point appartiennent à un champ plus général.

La géométrie projective

C'est Desargues (1593-1662) qui le premier introduisit des points fictifs appelés points à l'infini. Il considère la projection d'un point S d'un cercle C puis la section C_1 du cône obtenu par un plan quelconque. Les points P du cercle C et les points P_1 de la conique C_1 situés sur une même génératrice du cône se correspondent dans une correspondance biunivoque. Si la courbe C_1 est une hyperbole ou une parabole, il existe des génératrices qui ne rencontrent pas C_1 mais qui rencontrent cependant C. Desargues convient de dire qu'une telle génératrice rencontre C_1 en un point fictif : un point à l'infini. Dans ces conditions, un ensemble de droites parallèles dans un plan est un faisceau de droites dont le sommet est un point à l'infini.

Les travaux de Desargues marquent le début de la *Géométrie projective* ou *Géométrie de position*. Cette géométrie devait être développée surtout par Poncelet (1788-1867). Celui-ci utilise systématiquement deux opérations : la projection et la section. Desargues projetait un cercle du point S et coupait le cône obtenu par un plan.

La Géométrie projective peut être construite d'une manière différente. Se donner une droite, c'est se donner l'ensemble de ses points et sa direction. Convenons d'appeler sa direction point improprement dit (en abrégé point impropre), les points au sens ordinaire du mot étant appelés points proprement dits (en abrégé points propres). Deux droites parallèles ont même point impropre et comme une droite contient un seul point impropre, il est naturel de dire que le lieu de ces points est le plan impropre de l'espace. L'espace projectif est l'ensemble des points propres et impropres de l'espace euclidien et il n'est plus fait de distinction entre eux. De même, l'ensemble des points impropres d'un plan est la droite impropre section de ce plan pour le plan impropre.

L'ensemble des points d'une droite de l'espace projectif est appelé ponctuelle et on peut évidemment considérer deux ponctuelles distinctes ayant la même droite comme support. On introduit ensuite le faisceau de droites, ensemble des droites d'un plan passant par un point donné, et le faisceau de plans, ensemble des plans passant par une droite donnée. Ce sont les formes de première espèce. Chacune de ces formes peut être parcourue dans deux sens par l'élément générateur, d'où l'existence de deux sens de parcours.

Considérons une ponctuelle (A) de support s et le faisceau de rayons (a) projetant (A) d'un point S. Fixons un sens de parcours dans le faisceau (a), nous fixons par là un sens de parcours dans la ponctuelle (A). Considérons un rayon a_0 de (a) et soit A_0 son point de rencontre avec s. Lorsque la droite a, partant de a_0, a effectué un tour complet autour de S, le point A a parcouru la droite s et est revenu à son point de départ. L'adjonction du point impropre à la droite s transforme donc la droite euclidienne, illimitée dans les deux sens, én une sorte de courbe fermée, remarque que l'on trouve déjà chez Desargues.

Une forme de première espèce possède donc deux sens de parcours et si l'on passe d'une telle forme à une autre par projection et par section, à un sens de parcours de l'une correspond un sens de parcours bien déterminé de l'autre.

Partageons un segment AB d'une ponctuelle orientée en deux segments tels qu'un point de AB appartienne à une partie et que tout point de la seconde partie suit tout point de la première partie. Ces deux parties sont séparées par un point C (qui peut être un point d'une des parties) tel que tout point de AB précédant C appartient à la première partie et tout point suivant C appartient à la seconde partie. Cette convention introduit la continuité et est une forme géométrique de l'introduction des nombres irrationnels par Dedekind (1831-1916).

Une homographie entre deux ponctuelles s, s' est une correspondance biunivoque entre les points de ces ponctuelles conservant les rapports harmoniques de quatre points A, B, C, D, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1.$$

Un quaterne harmonique peut d'ailleurs être défini géométriquement. Menons par chacun des points A, B deux droites formant un quadrilatère tel qu'une des diagonales passe par C. Alors la seconde diagonale passe par D. Cette définition est plus générale que la précédente, car un des points peut être impropre.

Le théorème de von Staudt (1798-1867) établit qu'une homographie entre deux ponctuelles est complètement déterminée si l'on se donne trois couples de points homologues. En d'autres termes, une homographie entre deux ponctuelles de même support ne peut posséder plus de deux points unis sans se réduire à l'identité.

Ces considérations s'étendent aux autres formes de première espèce par projection et par section.

Considérons dans un plan deux faisceaux (a), (a') de rayons, de sommets S, S'. Si ces deux faisceaux projettent une même ponctuelle ; on dit qu'ils sont perspectifs et alors la droite SS' est sa propre homologue. Inversement, si dans la projectivité entre les faisceaux (a), (a') la droite SS' est sa propre homologue, les faisceaux sont perspectifs. Si les deux faisceaux sont homographiques sans être perspectifs, l'ensemble des points communs à deux rayons homologues est une conique passant par les points S, S'.

En partant de ces données, on peut établir le théorème de Pascal (1623-1662). Si A, B, C, D, E, F sont six points d'une conique, les points d'intersection des droites AB et DE, BC et EF, CD et FA sont en ligne droite. Ce théorème donne le moyen de construire par points une conique donnée par cinq points.

L'ensemble des points et des droites d'un plan est une forme de seconde espèce. On distingue parfois le plan ponctuel (lieu de points) du plan réglé (lieu de droites). L'ensemble des droites et des plans passant par un point S est appelé gerbe de sommet S. C'est la seconde forme de deuxième espèce. On distingue parfois la gerbe de plans et la gerbe de rayons.

Deux formes de deuxième espèce sont projectives ou homographiques lorsqu'il existe entre elles une correspondance biunivoque telle que deux formes de première espèce qui en sont extraites, homologues, soient homographiques.

Considérons une gerbe de droites de sommet S et une gerbe de plans de sommet S', projectives. Le lieu des points d'intersection des droites et des plans homologues est une quadrique Q passant par les points S et S'.

Considérons maintenant deux gerbes de droites de sommets S, S' homographiques. En général une droite passant par S ne rencontre pas la droite homologue de la seconde gerbe, mais le lieu des points P communs à deux droites homologues est une courbe appelée cubique gauche, passant par les points S, S'.

Passons à l'espace. On peut considérer l'espace animé d'un certain mouvement et fixer l'attention sur les espaces Σ, Σ' à deux instants différents. On peut ainsi parler de deux espaces à trois dimensions superposées. Cela étant, nous dirons que les espaces Σ, Σ' sont homographiques s'il existe entre les points de ces espaces une correspondance biunivoque telle qu'aux points d'un plan correspondent les points d'un plan. Ces espaces sont également dits collinéaires.

Il existe une autre genre de projectivité entre deux espaces : la réciprocité ou corrélation. Dans une réciprocité, à un point de l'espace Σ correspond un plan de l'espace Σ' et aux points d'une droite correspondent les plans passant par une droite. Il est clair alors qu'aux points de Σ' correspondent les plans de Σ.

Considérons deux homographies H, H' et supposons qu'à un point P, H fasse correspondre un point P' et qu'à ce point H' fasse correspondre un point P''. Il est clair qu'il existe une homographie H'' faisant correspondre au point P le point P''. On convient de dire que cette homographie H'' est le produit des homographies H, H' et l'on écrit H'' = H'H.

Le produit de deux homographies étant une homographie, l'inverse d'une homographie étant une homographie, l'ensemble des homographies constitue un groupe G, le groupe projectif. L'identité appartient au groupe, car c'est évidemment une homographie. Suivant le concept de Klein (1849-

1925), on peut dire que la *Géométrie projective est l'étude des propriétés des figures invariantes pour les opérations du groupe G.*

Observons que le produit de deux réciprocités est une homographie.

On peut introduire l'espace projectif par une méthode utilisant la Géométrie analytique, créée comme on sait au XVIIᵉ siècle par Descartes (1596-1650) et Fermat (1601-1663).

Considérons un trièdre Oxyz dont les trois arêtes sont des droites orientées. Par un point M menons des plans parallèles aux faces du trièdre et soient M_x, M_y et M_z les points où ils rencontrent les axes (arêtes du trièdre). Les mesures des segments OM_x, OM_y, OM_z sont les coordonnées x, y, z du point M. Inversement, nous admettrons que trois nombres ordonnés x, y, z sont les coordonnées d'un point M.

Sur une droite orientée choisissons un segment de mesure + 1 et projetons le sur les axes Ox, Oy, Oz parallèlement aux faces opposées du trièdre. Soient l, m, n les mesures des segments obtenus. Ces nombres sont appelés coefficients de projection de la droite considérée. Ils ne sont pas indépendants, mais liées par une relation Ω (l, m, n) = 1, la forme Ω (x, y, z) étant un polynôme homogène du second degré exprimant la distance d'un point M (x, y, z) à l'origine. Si l'on suppose les axes rectangulaires, les quantités l, m, n sont les cosinus des angles faits par la droite avec les axes Ox, Oy, Oz (cosinus directeurs). On a alors $\Omega (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Lorsque l'on change de trièdre de référence, on doit se donner les coordonnées x_o, y_o, z_o de la nouvelle origine et les coefficients de projection l_1, m_1, n_1 du nouvel axe O'x', ceux l_2, m_2, n_2 du nouvel axe O'y', et les coefficients de projection l_3, m_3, n_3 du nouvel axe O'z'. Entre les coordonnées x, y, z d'un point M par rapport au trièdre Oxyz et celles x', y', z' du même point par rapport aux axes O'x'y'z' on a les relations

$$x = x_o + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z',$$
$$y = y_o + m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',$$
$$z = z_o + n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'.$$

On peut introduire les coordonnées homogènes du point M en posant X = xu, Y = yu, Z = zu, U = u, la quantité u étant différente de zéro. Si l'on se donne les quantités X, Y, Z, U = o, le point M est bien déterminé. Les quantités X, Y, Z, U sont les coordonnées homogènes du point M ; elles sont déterminées à un facteur de proportionnalité près. Si un point M, situé sur une droite de coefficient de projection l, m, n s'éloigne indéfiniment de l'origine sur cette droite, la quantité U tends vers zéro et X, Y, Z tendent vers des nombres proportionnels à l, m, n. Le point à l'infini sur la droite considérée a pour coordonnées homogènes l, m, n, o. Ce sont les coordonnées du point impropre de la droite. Le plan impropre ou plan à l'infini a pour équation U = o. Nous conviendrons de dire que l'espace formé par les points de coordonnées X, Y, Z, U = o est l'espace cartésien, tandis que l'espace constitué par les points X, Y, Z, U est l'espace arguésien, pour rappeler que c'est Desargues qui introduisit les points à l'infini.

Les géomètres de la Révolution française et notamment Monge (1746-1818) ont amplifié ces espaces par l'introduction de nouveaux points fictifs : les points imaginaires, c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont imaginaires. On convient d'étendre à ces points le vocabulaire ordinaire. On dira par exemple qu'une conique est rencontrée par une droite de son plan en deux points, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, car on supposera également que les coefficients d'une équation peuvent être imaginaires.

On peut maintenant introduire les coordonnées projectives d'un point. Considérons un tétraèdre proprement dit et soient

$$a_iX + b_iY + c_iZ + d_iU = o \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

les équations de ses faces. Ces quatre plans n'ayant aucun point commun, le déterminant de leurs coefficients n'est pas nul. Posons

$$x_i = a_iX + b_iY + c_iZ + d_iU \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

A un point M correspondent des valeurs de X, Y, Z, U définies à un facteur de proportionnalité près. A ces valeurs correspondent des valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 définies également à un facteur de proportionnalité près. Inversement, à des valeurs des x correspondent des valeurs de X, Y, Z, U définies à un facteur de proportionnalité près, de sorte que l'on peut prendre x_1, x_2, x_3, x_4 comme coordonnées du point M. Observons que ces coordonnées ne peuvent être toutes nulles. L'espace formé par les points de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, réelles ou imaginaires, dont l'une au moins n'est pas nulle, est l'espace projectif généralisé. Si l'on en retire les points imaginaires, on retrouve l'espace projectif défini plus haut.

On pourrait d'ailleurs supposer que les coordonnées d'un point sont des nombres d'un domaine quelconque, aussi général que possible. Nous nous limiterons ici au domaine complexe.

La figure de référence est le tétraèdre formé par les plans $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = o$.

Les coordonnées d'un point sont susceptibles d'une interprétation géométrique. Désignons par O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets du tétraèdre de référence, le point O_i étant opposé au plan $x_i = o$. Soit O_o le point unitaire, c'est-à-dire le point dont les coordonnées sont égales $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4)$. Le rapport anharmonique des quatre plans passant par la droite O_3O_4 et successivement par les points O_1, O_2, O_o, M est égal au rapport des coordonnées $x_1 : x_2$. Les autres coordonnées s'obtiennent de même. Ces formules sont utiles dans le calcul des relations qui existent entre les coordonnées d'un même point par rapport à des tétraèdres de référence distincts.

Une homographie a pour équations

$$\rho x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

A un point x correspond un point x', mais à un point x' doit correspondre un seul point x. Les équations précédentes doivent donc pouvoir être résolues par rapport aux x, ce qui exige que le déterminant des coefficients $|a_{ik}|$ soit différent de zéro.

Il convient cependant d'examiner ce qui arrive lorsque le déterminant $|a_{ik}|$ est nul. Supposons qu'il soit de caractéristique trois c'est-à-dire que tous ses mineurs ne soient pas nuls. Alors aux points d'un plan de l'espace (x) correspond dans (x') un plan qui varie dans une gerbe lorsque le point x varie. Aux points x' correspondent les plans d'une gerbe de (x) et l'homographie revient à une projectivité entre deux gerbes de plans. Lorsque le déterminant est de caractéristique deux, c'est-à-dire lorsque tous ses mineurs sont nuls, l'homographie revient à une projectivité entre deux faisceaux de plans. Ces homographies singulières n'appartiennent pas au groupe G dont il a été question plus haut.

Un plan a pour équation

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = o$$

et les coefficients, qui ne sont pas tous nuls, sont appelés coordonnées du plan. Elles sont définies à un facteur de proportionnalité près.

Une réciprocité est représentée par des équations

$$\rho\xi_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

où le déterminant des coefficients $|a_{ik}|$ n'est pas nul.

La Géométrie projective est l'étude des propriétés des figures qui ne sont pas altérées par des homographies. Les propriétés métriques sont donc exclues.

Si l'on reprend la définition de l'espace projectif donnée en dernier lieu, on constate que les coordonnées d'un point x et celles d'un plan ξ

pourraient être interverties, c'est-à-dire que tous calculs faits, on pourrait supposer que les x sont les coordonnées d'un plan et les ξ celles d'un point. D'où le *principe de dualité*. Si dans l'énoncé d'une propriété projective, on remplace le mot point par le mot plan et le mot plan par le mot point, on obtient encore une propriété projective.

Pour construire l'espace projectif, nous sommes partis de l'espace euclidien. Nous pouvons suivre le chemin inverse. Dans ce but, nous considérerons l'espace projectif réel, c'est-à-dire dont tous les points ont des coordonnées réelles.

Dans l'espace projectif aucun point et aucun plan ne joue un rôle privilégié. Fixons un plan σ et considérons les homographies qui font correspondre à ce plan ce plan lui-même. Nous les appellerons des ***affinités***. Elles forment un groupe qui sera appelé le *groupe affin* G_a et les propriétés des figures qui ne sont pas altérées par les affinités seront appelées propriétés affines. Supposons que le plan σ soit le plan de l'infini. Alors à deux droites parallèles, une affinité fait correspondre deux droites parallèles. Dans l'espace affin, le parallélisme est conservé.

Nous pouvons prendre pour coordonnées de l'espace affin les quantités X, Y, Z, U. Une sphère de centre x_o, y_o, z_o et de rayon R a pour équation

$$\Omega\ (X-xU,\ Y-yU,\ Z-zU) = R^2U^2,$$

Ω (x, y, z) étant l'expression de la distance du point x, y, z à l'origine O. La section de cette sphère par le plan à l'infini U = o a pour équation

$$\Omega\ (X,\ Y,\ Z) = o,\ U = o.$$

Rappelons que la forme Ω est homogène et du second degré par rapport à X, Y, Z, elle n'a pas de solution en nombres réels. C'est une courbe imaginaire qui porte le nom de *cercle imaginaire à l'infini* ou de *cercle absolu*. Toute quadrique contenant le cercle absolu est une sphère.

Soient a, b deux droites se coupant en un point P. Le plan des droites a, b coupe le cercle absolu γ en deux points P_1, P_2 imaginaires conjugués. L'angle V des droites a, b est donné, d'après un théorème de Laguerre (1834-1886), par l'expression

$$V = \frac{1}{2i} \log \alpha,$$

α étant le rapport anharmonique des points P_1, P_2, A, B, ces derniers étant les points de rencontre des droites a, b avec le plan de l'infini.

Parmi les affinités, on peut considérer celles qui transforment le cercle absolu γ en lui-même. On les appelle des similitudes H_s. Elles forment un groupe, le groupe G_s des similitudes. Une similitude fait correspondre aux droites a, b deux droites a', b' se coupant en un point P'. Et comme les projectivités conservent les rapports anharmoniques, les angles des droites a, b et a', b' sont égaux. Les similitudes conservent les angles et le groupe des similitudes est le groupe de la Géométrie euclidienne en ce sens que les propriétés et la géométrie élémentaire sont conservées par les similitudes.

On peut considérer parmi les similitudes celles qui conservent les distances. Ce sont les mouvements : translations, rotations, symétries par rapport à un plan. Ces homographies particulières forment un groupe G_m, le groupe des mouvements, qui correspond à la géométrie euclidienne métrique.

L'un des objets de la Géométrie projective est l'étude des propriétés des courbes et des surfaces algébriques. Nous commencerons par les courbes algébriques planes et précisément par les courbes situées dans le plan $x_4 = o$.

Une courbe algébrique plane C est l'ensemble des points réels ou imaginaires dont les coordonnées satisfont à une équation $f(x_1, x_2, x_3) = o$ où f est un polynôme entier, rationnel et homogène des variables. Le degré n de ce polynôme est appelé ordre de la courbe C. Une droite de son plan rencontre le courbe C en n points réels ou imaginaires, distincts ou confondus. Si le polynome f n'est pas le produit de deux ou plusieurs polynomes entiers, rationnels et homogènes, la courbe C est dite irréductible. Elle est réductible dans le cas opposé.

Le polynome f contient $(n+1)(n+2) : 2$ termes, de sorte qu'il faut $n(n+3) : 2$ conditions pour déterminer une courbe plane d'ordre n. Passer par un point donné donne une relation entre les coefficients de f, de sorte que l'on peut dire que par $n(n+3) : 2$ points du plan passe une courbe d'ordre n et en *général* une seule. Il se peut en effet que les points donnés soient choisis de telle sorte que les équations qui expriment le passage d'une courbe d'ordre n par ces points ne soient pas indépendantes.

Une question qui se pose est la génération des courbes planes. On peut choisir une méthode analogue à celle qui a conduit aux coniques. Considérons deux faisceaux de courbes algébriques

$$f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda f_2(x_1, x_2, x_3) = O, \quad \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \mu\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = O$$

où $f_1 + \lambda f_2 = o$ représente une courbe algébrique d'ordre p variable avec λ et $\varphi_1 + \mu\varphi_2 = O$ une courbe algébrique d'ordre q variable avec μ. Supposons qu'entre ces faisceaux, on ait une homographie, c'est-à-dire une relation bilinéaire en λ, μ, relation que par un choix convenable des courbes $f_1 = o$,

$f_2 = o$, $\varphi_1 = o$, $\varphi_2 = o$ on peut toujours supposer être de la forme $\lambda\mu = 1$. Le lieu des points communs à deux courbes homologues a pour équation

$$f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1 = O.$$

C'est donc une courbe d'ordre $n = p + q$, mais un simple compte des constantes montre que ce n'est pas la courbe la plus générale d'ordre n si $n \geqslant 3$.

Une surface algébrique F est l'ensemble des points réels ou imaginaires dont les coordonnées satisfont à une équation $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = o$, où F est un polynome entier, rationnel et homogène en x_1, x_2, x_3, x_4. Le degré de ce polynome est l'ordre de la surface et une droite rencontre une surface d'ordre n en n points réels ou imaginaires, distincts ou confondus. Le polynome F contient $N = (n+1)(n+2)(n+3) : 6$ coefficients, donc il faut N-1 conditions pour déterminer une surface d'ordre n. Si le polynome F n'est pas le produit de polynomes entiers, rationnels et homogènes des variables, la surface F est dite irréductible. La question de la génération des surfaces est plus compliquée que la question analogue pour les courbes, car il faut tenir compte des conditions de passage par des courbes.

La génération des surfaces par deux faisceaux homographiques

$$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = O,$$
$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu\Phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = O$$

conduit à la surface

$$F_1\Phi_2 - F_2\Phi_1 = O$$

qui est évidemment en général particulière car elle passe par les courbes $F_1 = F_2 = o$, $\Phi_1 = \Phi_2 = o$.

On peut également, généralisant la génération projective des quadriques, considérer deux réseaux de surfaces

$$\lambda_1F_1 + \lambda_2F_2 + \lambda_3F_3 = O, \quad \mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2 + \mu_3\Phi_3 = O$$

tels qu'à une surface de l'un correspondent un faisceau de surfaces de l'autre. Les points communs à des éléments homologues forment une surface d'équation

$$F_1\Phi_1 + F_2\Phi_2 + F_3\Phi_3 = O$$

passant par les groupes de points $F_1 = F_2 = F_3 = o$, $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = o$. Il reste à déterminer le degré de généralité des surfaces obtenues par ce procédé.

Un troisième procédé de génération des surfaces consiste à considérer trois réseaux de surfaces algébriques

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = O, \quad \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 = O, \quad \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 = O$$

tels qu'à deux surfaces prises dans deux réseaux, corresponde une seule surface du troisième réseau. Le lieu des points communs à des éléments homologues a une équation que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = O$$

On peut se demander si l'on peut obtenir par ce procédé la surface la plus générale de son ordre.

On peut définir une *courbe gauche algébrique* comme le lieu des points communs aux surfaces de trois systèmes dépendant algébriquement d'un paramètre. On peut également la définir comme le lieu d'un point x donné par les équations

$$x_1 = f_1\ (y_1,\ y_2,\ y_3),\ x_2 = f_2\ (y_1,\ y_2,\ y_3),\ x_3 = f_3\ (y_1,\ y_2,\ y_3),\ x_4 = f_4\ (y_1,\ y_2,\ y_3)$$

où f_1, f_2, f_3, f_4 sont des polynomes entiers, rationnels et homogènes de même degré, les y étant liés par une relation

$$f\ (y_1,\ y_2,\ y_3) = o,$$

f étant également un polynome entier, rationnel et homogène. Cela revient à définir une courbe algébrique gauche comme transformée rationnelle d'une courbe algébrique plane. Il convient d'observer qu'une courbe algébrique gauche n'est pas nécessairement l'intersection complète de deux surfaces algébriques. La cubique gauche par exemple est commune aux quadriques d'un réseau et deux de ces quadriques ont en commun, en dehors de la cubique gauche, une droite rencontrant cette courbe en deux points.

Il convient de remarquer que les équations

$$\|\ f_{ik}\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\| = o, \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ m\ ;\ k = 1,\ 2,\ ...,\ m+1)$$

où les f_{ik} sont des polynomes de degré $p_i + q_k$ représentent une courbe algébrique gauche, mais toute courbe algébrique gauche n'admet pas une représentation de ce type.

Les courbes et surfaces algébriques ont été l'objet de nombreuses recherches que nous ne pouvons penser à résumer ici. Une question qui s'est présentée est par exemple l'étude des points multiples des courbes ou des surfaces, mais pour être étudiée il faut avoir recours aux transformations birationnelles. Il en sera question plus loin.

L'étude des êtres géométriques a conduit les géomètres à concevoir des espaces projectifs à plus de trois dimensions. Il s'agit là d'une notation commode et nous allons en donner un exemple.

Pour fixer une droite dans l'espace, il faut quatre conditions et d'autre part sur quatre droites de l'espace s'appuient deux droites. Cela empêche de construire une géométrie projective de la droite analogue à celles des points ou des plans.

Soient y (y_1, y_2, y_3, y_4) et z (z_1, z_2, z_3, z_4) deux points déterminant une droite r. Posons $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$ et remarquons que l'on a $p_{ii} = o$, $p_{ik} + p_{ki} = o$. Nous pouvons donc nous limiter à considérer les quantités p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}, que nous appellerons les coordonnées de la droite r. Elles ne sont pas indépendantes, mais sont liées par la relation

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = o. \qquad (1)$$

Si les six quantités considérées satisfont à l'équation précédente, la droite r est l'intersection de deux plans.

$$x_1 p_{23} - x_2 p_{13} + x_3 p_{12} = o, \quad x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = o.$$

Convenons d'appeler point l'ensemble de six nombres $p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}$ non tous nuls et espace S_5 à cinq dimensions l'ensemble de ces points. Si ces nombres satisfont à l'équation (1), nous dirons que les points qui leur correspondent appartiennent à une hyperquadrique Q. Et on voit que la géométrie de la droite dans l'espace (x) revient à la géométrie des points sur l'hyperquadrique Q. Une surface réglée est représentée sur Q par une courbe. Si la réglée est une développable, les tangentes à la courbe qui la représente appartiennent à Q. Une équation linéaire et homogène par rapport aux p est appelée hyperplan de S_5. L'intersection de Q avec un hyperplan représente ce que l'on appelle un complexe linéaire de droites, système de droites tel que celles de ses droites passant par un point forment un faisceau. Cette interprétation de la géométrie réglée est due à F. Klein (1849-1925).

On imagine facilement en quoi consiste en espace projectif à r dimensions. Appelons point x l'ensemble de r + 1 nombres $x_o, x_1, \ldots, x_r$ réels ou imaginaires, non tous nuls, que nous appellerons coordonnées du point.

Convenons de dire que deux points coïncident lorsque leurs coordonnées sont proportionnelles. L'ensemble des points ainsi définis constitue un espace S_r à r dimensions.

L'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une équation linéaire et homogène est appelé hyperplan. Les coefficients de son équation sont les coordonnées de cet hyperplan. Elles sont définies à un facteur de proportionnalité près.

L'extension des locutions utilisées en géométrie projective à deux ou trois dimensions se fait sans peine. Bornons-nous à signaler celle-ci. Si deux espaces de dimensions p, q appartiennent à un espace à r dimensions et ont en commun un espace à s dimensions, on a $p+q=r+s$.

Une homographie de l'espace S_r fait correspondre à un point, un point et aux points d'un hyperplan, les points d'un hyperplan. Elle a pour équations

$$\rho x'_i = a_{io}x_o + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ir}x_r, \quad (i = o,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

le déterminant $|a_{ik}|$ des coefficients n'étant pas nul. Ces homographies forment un groupe : le groupe projectif. La Géométrie projective hyperspatiale est l'étude des propriétés qui restent inaltérées lorsque l'on effectue des homographies.

Pour donner une idée de l'utilisation des hyperespaces, donnons-nous dans S_r une surface algébrique F et deux espaces S_p et S_{r-p-1} à p et r-p-1 dimensions ne se rencontrant pas. Un point P de F et l'espace S_{r-p-1} déterminent un espace à r-p dimensions qui rencontre S_p en un point P'. Lorsque P décrit F, P' décrit en général une surface F' qui est la projection sur S_p de F à partir de S_{r-p-1}. Par exemple, la surface de Steiner, du quatrième ordre, passant doublement par les arêtes d'un trièdre et triplement par le sommet de celui-ci, est la projection sur un S_3 de la surface de Veronese (1854-1917) du quatrième ordre, située dans un espace S_5 à cinq dimensions, à partir d'une droite qui ne rencontre pas cette surface. Les propriétés de la surface de Steiner peuvent donc se déduire de celles de la surface de Veronese.

La Géométrie algébrique

Dans ce qui précède, nous avons considéré un groupe G d'homographies, ou des cas particuliers d'homographies (affinités, similitudes, mouvements) et défini la Géométrie projective comme l'ensemble des propriétés qui ne sont pas altérées par les homographies (ou leurs cas particuliers). Le groupe G est le *groupe fondamental de la Géométrie projective*. Cette conception, due à Klein, peut être étendue.

Considérons un ensemble de transformations T opérant sur les points d'un espace E et appelons produit de deux de ces transformations la transformation obtenue en opérant successivement les deux transformations. Supposons de plus que l'inverse d'une transformation de l'ensemble appartient également à l'ensemble, ce qui implique que l'identité appartient à l'ensemble. Si les produits de tous les couples de transformations de l'ensemble appartiennent à l'ensemble, celui-ci est dit être un groupe G. L'étude des propriétés de l'espace E qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe G est la *Géométrie de groupe fondamental G.*

Les homographies sont des transformations biunivoques, faisant correspondre un point à un point. Il existe d'autres transformations possédant les mêmes propriétés, ce sont les transformations birationnelles. Elles forment un groupe qui est fondamental pour une géométrie appelée *Géométrie algébrique.*

Commençons par considérer une transformation birationnelle simple. Au point x (x_1, x_2, x_3) d'un plan σ, faisons correspondre le point x' (x'_1, x'_2, x'_3) d'un plan σ' donné par les formules

$$x_1x'_1 = x_2x'_2 = x_3x'_3$$

De ces relations, on déduit

$$x'_1 : x'_2 ; x'_3 = x_2x_3 : x_3x_1 : x_1x_2$$

et

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_2x'_3 : x'_3x'_1 : x'_1x'_2.$$

On a donc bien une correspondance biunivoque entre les plans σ et σ', mais cette correspondance n'est pas sans exception : au point $x'_2 = x'_3 = o$ correspond un point indéterminé. Nous allons montrer comment on lève cette indétermination.

Commençons par observer qu'aux droites du plan σ (ou σ') correspondent les coniques C' (ou C) du plan σ' (ou σ) circonscrites au triangle de référence $O'_1O'_2O'_3$ (ou $O_1O_2O_3$). Cette correspondance est projective en ce sens qu'à une droite d'un plan correspond une conique de l'autre et qu'à un faisceau de droites correspond un faisceau de coniques.

Considérons une droite a passant par O_1. Les coniques C touchant a en O_1 forment un faisceau auquel correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet A'. On convient de dire qu'au point (fictif) A infiniment voisin de O_1 sur a correspond le point A'. Lorsque a tourne autour de O_1, le point

A' décrit une droite a'_1, car une conique C n'a qu'une tangente en O_1. A la droite a'_1 correspond dans σ une conique qui n'est autre que la conique formée par les droites O_1O_2 et O_1O_3.

Nous venons d'introduire de nouveaux points fictifs. On voit que dire que deux courbes ont une tangente commune en un point M ou qu'elles ont en commun un point (fictif) infiniment voisin de M sont deux locutions ayant le même sens.

On peut généraliser la transformation précédente. Considérons deux plans σ, σ' et dans le second plan le système des coniques C' passant par trois points O'_1, O'_2, O'_3. Entre les droites de σ et les coniques C' établissons une projectivité, c'est-à-dire une correspondance telle qu'à une droite de σ correspond une conique C' et qu'aux droites d'un faisceau correspondent les coniques C' d'un faisceau. Aux droites de σ' correspondent les coniques C passant par trois point O_1, O_2, O_3. A un point P de σ correspond en général un et un seul point P' et σ'. La transformation est analogue à la précédente, mais dans celle-ci, si les plans σ, σ' coïncident, la transformation est involutive, c'est-à-dire que son carré est l'identité. Les transformations dont il vient d'être question sont appelées transformations quadratiques.

On peut reprendre le raisonnement précédent et dire qu'aux points infiniment voisins de O_1, par exemple, correspondent les points d'une droite a'_1. Imaginons une transformation analogue à la précédente entre deux plans σ' et σ'', telle que un point O' de a'_1 joue un rôle analogue à O_1. Aux points infiniment voisins de O' correspondent les points d'une droite a'' de σ''. Et ainsi de suite. Si l'on passe de σ' à σ par la transformation inverse, aux points infiniment voisins de O' correspondent les points infiniment voisins des points infiniment voisins de O_1 homologue de O'. Les points infiniment voisins de O_1 constituent ce que l'on appelle le domaine du premier ordre de O_1. Les points infiniment voisins des points (fictifs) du domaine du premier ordre, constituent le domaine du second ordre de O_1. Et ainsi de suite. On voit qu'une transformation quadratique fait correspondre à un point du premier ordre de O_1 un point proprement dit. Deux transformations quadratiques successives font correspondre à un point du domaine du second ordre de O_1 un point proprement dit.

Ces nouveaux points fictifs permettent d'analyser les points multiples des courbes algébriques planes. Considérons une courbe algébrique C ayant un point O multiple d'ordre s, c'est-à-dire un point tel que, si la courbe est d'ordre n, toute droite passant par ce point ne la rencontre plus qu'en n-s points. Opérons une première transformation quadratique ayant 0 comme point fondamental (c'est-à-dire jouant le même rôle que O_1). Aux points du domaine du premier ordre de O correspondent les points d'une droite a et à la courbe C une courbe C' ayant sur a des points O'_1, O'_2, ..., O'_t ayant pour C' des multiplicités s_1, s_2, ..., s_t. On peut observer qu'il se peut que la courbe C' ait des contacts avec a en quelques uns des points précédents, de sorte que l'on a

$$s_1 + s_2 + \dots + s_t \leqslant s.$$

On peut alors déterminer les points du domaine du second ordre de O appartenant à la courbe C, et ainsi de suite. On démontre qu'après un nombre fini de transformations quadratiques, on arrive à une courbe n'ayant plus que des points simples.

On peut de même déterminer les points fictifs infiniment voisins d'un point dans l'espace. Le domaine du premier ordre d'un point O de l'espace est constitué par les domaines du premier ordre de ce point dans les différents plans qui le contiennent. On peut également utiliser à cet effet des transformations quadratiques. Considérons dans un espace Σ un point O et une conique γ dont le plan σ ne passe pas par O. Les quadriques Q passant par O et par γ forment un système de dimension trois. Deux quadriques Q se rencontrent en dehors de γ suivant une conique ρ rencontrant γ en deux points et passant par O. Une troisième quadrique Q n'appartenant pas au faisceau déterminé par les deux premières, rencontre ρ en un seul point variable avec la dernière quadrique. On dit que le système des quadriques Q est de degré un. Etablissons une projectivité entre les quadriques Q et les plans d'un second espace Σ', c'est-à-dire une correspondance telle qu'à une quadrique Q corresponde un plan de Σ', qu'aux quadriques d'un faisceau correspondent les plans d'un faisceau. Alors, aux quadriques Q d'un réseau, c'est-à-dire aux quadriques Q passant par un point P, correspondent les plans passant par un point P'. Au point P, nous faisons correspondre le point P'. On démontre qu'aux plans de Σ correspondent des quadriques Q' passant par un point O' et par une conique γ' dont le plan σ' ne passe pas par O'. En faisant un raisonnement analogue à celui fait dans le plan, on voit qu'aux points infiniment voisins de O correspondent les points du plan σ'.

La structure des points unis d'une surface algébrique peut être étudiée en utilisant la notion des points infiniment voisins, mais la question est beaucoup plus complexe que dans le cas des courbes planes, car les points infiniment voisins d'un point multiple peuvent former des courbes multiples.

Considérons maintenant les transformations birationnelles du plan. On appelle *réseau homaloïdal* de courbes un système de courbes dépendant de deux paramètres, tel qu'il passe une seule courbe du système par deux points et que deux courbes se rencontrent, en dehors de points fixes, en un seul point variable. Tels sont par exemple le système des coniques passant par trois points, le système des courbes du troisième ordre ayant en commun un point double et quatre points simples.

D'une manière générale, supposons que les courbes C, d'ordre n, ayant r points multiples d'ordres $s_1, s_2, ..., s_r$, distincts ou infiniment voisins, forment un système homaloïdal. On doit avoir

$$s^2_1 + s^2_2 + ... + s^2_r = n^2-1. \qquad (1)$$

D'autre part, une courbe C est rationnelle, ce qui implique la relation

$$s_1 + s_2 + ... + s_r = 3(n-1). \qquad (2)$$

Il importe de remarquer qu'une solution en nombres entiers des équations (1) et (2) n'entraîne pas toujours l'existence d'un réseau homaloïdal.

Considérons dans un plan σ un réseau homaloïdal $|C|$ et rapportons projectivement ses courbes aux droites d'un plan σ', c'est-à-dire que nous établissons une correspondance biunivoque entre les courbes C et les droites de σ' de telle sorte qu'à un faisceau de courbes C corresponde un faisceau de droites de σ'. Les courbes C passant par un point P forment un faisceau auquel correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet P'. Les points P et P' se correspondent dans une transformation birationnelle T. Aux droites du plan σ correspondent dans σ' les courbes C' d'un réseau homaloïdal et ces courbes C' ont le même ordre que les courbes C.

Le produit de deux transformations birationnelles est évidemment une transformation birationnelle et l'inverse d'une transformation birationnelle est une transformation birationnelle, donc les transformations forment un groupe G que l'on pourrait appeler *groupe de Cremona* (1830-1903) du nom du créateur des transformations birationnelles, souvent appelées transformations crémoniennes.

On doit à Noether (1844-1921) le théorème suivant : Toute transformation birationnelle du plan est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques (suivi éventuellement par une homographie, transformation projective que l'on peut dans un certain sens considérer comme l'identité). Il en résulte que le groupe crémonien est formé par les transformations quadratiques et leurs produits. Il convient d'ajouter que le théorème de Noether n'a été démontré dans tous les cas que par Castelnuovo (1865-1952) et par Chisini (1889-1967).

Un problème posé par la Géométrie algébrique plane est la classification des systèmes linéaires de courbes planes, c'est-à-dire des systèmes de courbes de dimension r tels que par r points passe en général une seule courbe du système. Ces systèmes sont répartis en classes, deux systèmes appartenant à une même classe s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une tranformation birationnelle. On a alors cherché à déterminer dans chaque classe un système type, précisément celui qui est formé de courbes d'ordre minimum. Castelnuovo a introduit dans l'étude des systèmes linéaires de courbes le système adjoint. Si les courbes d'un système linéaire ont l'ordre n, on appelle adjoint le système de courbes d'ordre n-3 dont les courbes ont la multiplicité s-1 en tout point multiple d'ordre s pour les courbes du système. Cela a amené une grande simplification dans les études des systèmes linéaires et a permis à Enriques (1871-1946) de déterminer les groupes continus finis de transformations birationnelles du plan.

Mentionnons ce théorème de Bertini (1846-1933). Toute transformation birationnelle involutive du plan peut se ramener, par une transformation birationnelle, à quatre types bien déterminés dont il donne les propriétés.

On peut remarquer que la classification des systèmes linéraires de courbes planes peut se ramener à un problème de Géométrie projective. Considérons un système linéaire $|C|$ de courbes planes C de dimension $r \geqslant 3$ et de degré n, c'est-à-dire que deux courbes C se rencontrent en n points en dehors des points-base. De plus, nous supposons que les courbes C passant par un point ne passent pas en conséquence par une second point. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions, c'est-à-dire qu'à une courbe C correspond un hyperplan de S_r et qu'à un faisceau de courbes C correspond un faisceau d'hyperplans. Dans ces conditions, aux points du plan des courbes C correspondent les points d'une surface F d'ordre n. Si nous considérons un système linéaire $|C'|$ de même classe que $|C|$, les mêmes opérations nous conduirons dans S'_r à une surface F' d'ordre n. Il existe une homographie entre S_r et S'_r qui fait passer de F à F'.

La considération des transformations birationnelles de l'espace suit des voies analogues. Appelons *système homaloïdal de surfaces* un système triplement infini de surfaces tel que trois surfaces n'appartenant pas à un même faisceau se rencontrent en un seul point en dehors des points-base.

De plus, ce système est linéraire, c'est-à-dire que par trois points de l'espace passe une seule surface du système. Rapportons projectivement les surfaces F d'un système homaloïdal |F| d'un espace S_3 aux plans d'un espace S'_3. Aux surfaces F passant par un point P correspondent les plans passant par un point P'. Les points P et P' se correspondent dans une transformation birationnelle T et celle-ci fait correspondre aux plans de S_3 des surfaces F' d'un certain ordre n' formant un système homaloïdal |F'| . A une droite de S_3 correspond dans S'_3 une courbe d'ordre n et à une droite de S'_3 une courbe d'ordre n' de S_3. Il y a lieu, lors de l'étude d'une transformation birationnelle, de tenir compte des éléments-base (points et courbes) en procédant d'une manière analogue à ce que l'on a fait pour les points-base des systèmes homaloïdaux de courbes planes.

Les transformations birationnelles de l'espace forment également un groupe, mais un groupe discontinu, car dans la définition des transformations birationnelles il entre des entiers n et n'. La Géométrie algébrique de l'espace a pour groupe fondamental le groupe des transformations birationnelles.

Ces questions peuvent être étendues aux espaces projectifs à plus de trois dimensions.

Il n'existe pas, dans l'espace, un théorème analogue à celui de Noether sur la composition des transformations au moyen de transformations d'un type déterminé.

Géométrie sur une variété algébrique

Les géométries que nous avons considérées jusqu'à présent étaient l'étude des propriétés des figures invariantes pour des transformations biunivoques (homographies, transformations birationnelles) s'étendant à tout l'espace. Nous allons abandonner ce point de vue et désormais, nous dirons que deux variétés algébriques sont équivalentes (ou birationnellement équivalentes) s'il existe entre leurs points une correspondance birationnelle sans que celle-ci puisse s'étendre nécessairement en tant que correspondance birationnelle aux espaces ambiants, qui peuvent d'ailleurs être de dimensions différentes. Ainsi une courbe algébrique gauche C et sa projection à partir d'un point P sur un plan, sont deux courbes équivalentes, à condition qu'une droite passant par P ne rencontre plus, en général, la courbe C en deux points (ceci se présente pour un nombre fini de droites).

Il convient tout d'abord de définir une variété algébrique à n dimensions. Plaçons-nous dans un espace projectif S_r à r dimensions et considérons dans cet espace r-r' hypersurfaces algébriques, c'est-à-dire r-r' polynomes entiers, rationnels et homogènes par rapport aux coordonnées, égalés à zéro. Supposons que ces polynomes dépendent algébriquement de n-r' variables $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r'}$. Le lieu des points communs à ces hypersurfaces lorsque les u varient est une variété algébrique V_n à n dimensions.

On pourrait également prendre pour définition d'une variété algébrique V_n le lieu des points x donnés par les équations

$$x_i = f_i\ (y_o, y_1, \ldots, y_n), \quad (i = o, 1, \ldots, r)$$
$$f\ (y_o, y_1, \ldots, y_n) = o,$$

où les f_i sont des polynomes entiers, rationnels de même degré et homogènes des y et f = o l'équation d'une hypersurface de l'espace S_n. On définit la variété V_n comme la transformée rationnelle d'une hypersurface algébrique de l'espace S_n.

La Géométrie dont nous allons nous occuper s'appelle *Géométrie sur une variété algébrique.* Il s'en faut qu'elle soit largement développée. On a étudié les courbes, les surfaces et un peu les variétés à trois dimensions. On va voir qu'entre la théorie des courbes et celle des surfaces, il y a de notables différences. Il reste d'ailleurs de nombreuses questions à résoudre.

Deux variétés algébriques équivalentes ont évidemment la même dimension. On partage ces variétés en classes, deux variétés équivalentes appartenant à la même classe.

Considérons en premier lieu la *Géométrie sur une courbe algébrique.* L'outil qui doit servir dans cette géométrie doit être inaltéré par les transformations birationnelles. Cet outil est le groupe de n points, G, de la courbe et les séries linéaires de ces groupes. Une telle série est un ensemble de groupes G de n points, dépendant de r paramètres, tel que r points de la courbe appartiennent en général à un seul groupe de la série et que de plus on puisse établir une correpondance biunivoque des groupes, G, sans exception, avec les points d'un espace linéaire S_r. Cette dernière condition est essentielle pour r = 1, mais est superflue pour r > 1. Une série linéaire est représentée par g^r_n ou par $|G|$. L'ordre de la série est n.

Deux groupes d'une même série linéaire sont dits équivalents. Une série qui contient tous les groupes équivalents à l'un quelconque de ces groupes est appelée série complète.

La somme $|G + H|$ de deux séries linéaires $|G|$, $|H|$ est l'ensemble des groupes équivalents à un groupe G joint à un groupe H.

Supposons que quelques groupes de la série $|G|$ contiennent un groupe d'une série $|K|$. Les groupes de $|G|$ contenant un groupe déterminé de la série $|K|$ forment une série linéaire dénotée par $|G\text{-}K|$. Et bien, quel que soit le groupe choisi dans la série $|K|$, on obtient la même série $|G\text{-}K|$. Si H est un groupe de cette série, on a $|H+K| = |G|$.

Considérons sur une courbe algébrique C une série g^1_n. Il existe un nombre fini de groupes de la série qui ont un point double et l'ensemble de ces points est le *groupe jacobien* de la série. Si par exemple, C est une courbe plane et g^1_n la série découpée par les droites passant par un point P, le groupe jacobien est le groupe des points de la courbe de contact pour les tangentes passant par P. Considérons les groupes jacobiens G_j des différentes séries de dimension un tirées de $|G|$. Ils forment une série linéaire $|G_j|$ appelée *série jacobienne* de $|G|$. On démontre que la série $|G_j\text{-}2G|$ ne dépend pas du choix de la série $|G|$. En d'autres termes, si $|H|$ est une autre série linéaire et $|H_j|$ la série jacobienne, les séries $|G_j\text{-}2G|$, $|H_j\text{-}2H|$ complètes, sont confondues. Si la série $|G_j\text{-}2G|$ existe, elle est appelée *série canonique* de la courbe. Elle est d'ordre 2p-2 et de dimension p-1. Sur deux courbes équivalentes, les séries canoniques se correspondent. Le nombre p est appelé *genre* de la courbe C. On reconnaît que p est le genre de la courbe plane d'un système linéaire donné plus haut, mais ici on raisonne sur la courbe.

Une courbe algébrique plane peut être transformée par une transformation birationnelle en une courbe ne possédant que des points multiples ordinaires (à tangentes distinctes). Elle peut de plus être transformée en une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires, mais par une transformation birationnelle ne s'étendant pas en général à tout le plan. Si n est l'ordre de la courbe, le système canonique est découpé par les courbes d'ordre n-3 passant par les points doubles de la courbe. Le système des courbes d'ordre n-1 passant par les points doubles découpe sur la courbe le système jacobien (incomplet) de la série découpée par les droites du plan. Ce sont les premières polaires de la courbe. Les courbes d'ordre n-2 passant par les points doubles découpent le *système adjoint* à la courbe. Dans le cas général d'une série linéaire $|G|$, il s'agit du système $|G_j\text{-}G|$.

Une courbe privée de système canonique est une courbe rationnelle ($p = o$). Une courbe de genre $p = 1$ est appelée courbe elliptique. Sa série canonique est d'ordre zéro. Ses coordonnées sont des fonctions elliptiques d'un paramètre.

La théorie des courbes algébriques a été faite par Brill (1842-1935) et Noether en utilisant les courbes planes. Elle a été reconstruite par G. Castelnuovo (1865-1952) et C. Segre (1839-1924) par une méthode dite hyperspatiale. Le procédé d'introduction de la série canonique exposé plus haut est dû à Enriques. On peut également introduire le genre d'une courbe C en observant que si une série g^1_n possède j points doubles, l'expression j-2n ne dépend pas de la série choisie. Dès lors, le genre est défini par la formule $2p = j - 2n + 2$.

Considérons une série $|G|$, d'ordre n, complète, de dimension r. Il peut arriver qu'un groupe G appartienne à i groupes de la série canonique $|K|$ linéairement indépendants, c'est-à-dire que la série $|K-G|$, où $|K|$ est la série canonique, ait la dimension i-1. Le nombre i est appelé indice de spécialité de la série $|G|$. La dimension de la série $|G|$ est égale à $r = n - p + i$, formule valable dans le cas $i = o$, formule due à Riemann (1826-1866)-Roch (1839-1866).

La série canonique d'une courbe de genre deux est une série g^1_2 complète. Il existe des courbes, appelées courbes hyperelliptiques, qui contiennent une série g^1_2 complète, tout groupe de la série canonique étant formé de p-1 groupes de cette série. On peut prendre pour modèle projectif d'une courbe de genre p non hyperelliptique, une courbe d'ordre 2p-2 de l'espace à p-1 dimensions, et cette courbe est dépourvue de points multiples.

Les groupes de n points de la courbe C dépendent de n paramètres. Si $n = 2p-2$, ces groupes se distribuent en ∞^p séries linéaires de dimension n-p, c'est-à-dire qu'une de ces séries dépend de p paramètres. Si $n = 2p-2$ et si la série n'est pas la série canonique, elle a la dimension p-2 et est appelée série paracanonique.

Considérons une série $|G|$ d'ordre 2p et de dimension p. Par un groupe P de p points passe un groupe G, complété par un groupe P' de p points. Inversement, par un groupe P' passe un groupe de $|G|$ complété par le groupe P. On voit donc qu'il existe une correspondance biunivoque involutive entre les groupes P et P'. Imaginons une variété algébrique V_p à p dimensions représentant les groupes de p points de la courbe C. Elle est appelée *variété de Jacobi* (1794-1851) attachée à la courbe C. A la correspondance entre les groupes P, P' correspond une transformation birationnelle involutive de V_p en soi. Comme la série $|G|$ dépend de p paramètres, on obtient sur V_p une série ∞^p de transformations birationnelles de V_p en soi. La variété de Jacobi est un cas particulier de la *variété de Picard* (1856-1941) dont il sera question plus loin, dans la théorie des surfaces.

Pour que deux courbes C, C' appartiennent à la même classe, il faut qu'elles aient même genre p mais que de plus, certaines expressions des coefficients des équations des courbes soient égales. Ces expressions sont appelées *modules* des courbes. Leur nombre est égal à 3p-3, mais il est réduit à 2p-1 si la courbe est hyperelliptique. La courbe elliptique $(p = 1)$

doit être considérée comme une courbe hyperelliptique particulière, elle dépend d'un module.

La théorie des courbes algébriques peut également être faite par voie transcendante. Nous en dirons quelques mots.

Considérons la courbe irréductible C d'équation f (u, z) = o, où f est un polynôme entier, rationnel et irréductible en u, z de degré n en u. Représentons la variable $z = x + iy$ par son affixe, c'est-à-dire par le point de coordonnées x, y d'un plan. A une valeur de z correspondent en général n valeurs distinctes de u, mais pour certaines positions du point z, certaines de ces valeurs peuvent coïncider. Ce sont les points de ramification de la fonction u (z) définie par l'équation de la courbe. Imaginons n feuillets-plans superposés au plan des z. En un point z qui n'est pas un point de ramification, chacun de ces feuillets correspond à une valeur de u, mais lorsque le point est un point de ramification, il y a une soudure entre quelques-uns de ces feuillets. Par des procédés qu'il serait trop long d'exposer ici, on passe de cet ensemble de feuillets à un disque à p trous, p étant le genre de la courbe C. Ce disque est appelé *surface de Riemann*. L'intérêt de cette surface réside dans le fait qu'à un de ses points correspond un seul point de la courbe. La fonction u (z) tirée de l'équation de la courbe, de multiforme est devenue uniforme.

Si $p = 1$, la surface de Riemann est un tore sur lequel on peut définir un parallèle σ et un méridien τ. Orientons les courbes σ et τ. Tout chemin orienté sur le tore se ramène par déformation continue à un chemin de la forme $\lambda\sigma + \mu\tau$, où λ, μ sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. Sur le disque à p trous, on peut de même entourer chaque trou d'une courbe fermée orientée et tracer des courbes orientées et fermées traversant chaque trou. Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ les premières courbes, par $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ les secondes. Un couple σ_i, τ_i s'appelle une rétrosection. Tout chemin orienté tracé sur la surface de Riemann se ramène par déformation continue à une expression de la forme

$$\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \ldots + \lambda_p\sigma_p + \mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \ldots + \mu_p\tau_p.$$

Soit φ (u, z) une fonction rationnelle de u, z. On appelle *intégrale abélienne* attachée à la courbe C l'expression

$$\int_{z_0,\, u_0}^{z,\, u} \varphi\,(u, z)\, dz$$

prise le long d'un chemin allant du point z_o, u_o au point z, u. L'intégrale, calculée en tenant compte de la fonction u (z) définie par f (u, z) = o, sera considérée comme une fonction de sa limite supérieure.

On classe les intégrales abéliennes en trois espèces, suivant qu'elles restent finies sur la surface de Riemann, ou qu'elles possèdent des pôles, ou qu'elles possèdent des singularités logarithmiques. Nous ne nous occuperons ici que des intégrales de première espèce.

Toute intégrale de première espèce attachée à la courbe C est une combinaison linéaire à coefficients entiers de p d'entre elles, qui sont linéairement indépendantes.

Une intégrale abélienne de première espèce est prise le long d'un chemin tracé sur la surface de Riemann. Ce chemin se ramène par déformation continue à une somme à coefficients entiers des coupures σ et τ. Pour calculer l'intégrale, il importe donc de connaître sa valeur le long de chacune des coupures. Ces valeurs sont appelées périodes de l'intégrale.

Soient I_1, I_2, ..., I_p les p intégrales linéairement indépendantes attachées à la courbe C,

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_p & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_p \\
I_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\
I_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\
\hline
I_p & 0 & 0 & & 1 & \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pp}
\end{array}
$$

le tableau des périodes de ces intégrales.

R. Torelli (1884-1915) a établi que si deux courbes algébriques de même genre ont même tableau des périodes des intégrales abéliennes, elles appartiennent à la même classe.

Rosati (1876-1929) a imaginé une représentation géométrique qui a rendu de nombreux services.

Pour abréger, posons $\tau_i = \sigma_{p+i}$ de telle sorte qu'un chemin σ tracé sur la surface de Riemann ramène à la forme

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \dots + m_{2p}\sigma_{2p}$$

où les m sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. Considérons les m comme les coordonnées des points d'un espace S_{2p-1} à 2p-1 dimensions.

Soit maintenant I une intégrale de première espèce ayant les périodes α_1, α_2, ..., α_{2p} le long des coupures σ_i. A cette intégrale faisons correspondre dans S_{2p-1} l'hyperplan d'équation

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{2p} x_{2p} = 0.$$

Les hyperplans qui correspondent aux différentes intégrales forment une gerbe ayant pour centre un espace S_{p-1} à p-1 dimensions ne contenant aucun point réel. Il ne rencontre donc pas son conjugué S_{p-1}.

Si une intégrale abélienne a une période nulle le long d'un cycle σ, le point représentant ce cycle appartient à l'hyperplan représentant l'intégrale.

L'étude des correspondances entre les points d'une courbe algébrique a été faite par voie transcendante par Hürwitz (1859-1919) et par voie géométrique par Severi (1879-1961). Supposons qu'entre les points d'une courbe C nous ayons une correspondance telle qu'à un point a correspondent β points b formant un groupe B et qu'inversement, à un point b correspondent α points a formant un groupe A. S'il existe un nombre entier γ tel que le groupe $\gamma a + B$ varie dans une série linéaire, alors $\gamma b + A$ varie également dans une série linéaire. Le nombre γ est appelé *valence* de la correspondance. Si ce nombre existe, le nombre de points unis de la correspondance (α, β) entre les points de C est $\alpha + \beta + \gamma p$, p étant le genre de la courbe. Cette formule est due à Cayley (1821-1895) et Brill.

Les correspondances sans valence sont dites singulières. Leur existence entraîne probablement des relations entre les périodes. Elles ont été peu étudiées.

C'est l'étude de ces correspondances qui a conduit Rosati à l'interprétation géométrique des intégrales abéliennes dont il vient d'être question.

Passons maintenant à la *Géométrie sur une surface algébrique*. L'outil utilisé ici est le système de courbes algébriques tracées sur la surface, notion qui n'est pas altérée par les transformations birationnelles.

Une surface algébrique F étant donnée, on appelle système linéaire de courbes algébriques C un ensemble de courbes dépendant de r paramètres tel que par r points de la surface il passe une et en général une seule courbe C et que, de plus, on peut établir une correspondance biunivoque sans exception entre les courbes C et les points d'un espace linéaire à r dimensions. Comme dans le cas des séries linéaires de groupes de points sur une courbe, cette seconde condition est nécessaire si $r = 1$, elle est superlfue si $r > 1$.

Les caractères d'un sytème linéraire sont le degré, nombre de points communs à deux courbes et variables avec ces courbes, le genre des courbes et la dimension, caractères qui ne sont pas altérés par une transformation birationnelle.

Un système linéaire peut posséder des points-base. S'il possède un point 0 multiple d'ordre s pour les courbes, à tangentes variables, on peut le considérer comme virtuellement inexistant à condition d'augmenter le degré effectif de s^2 et le genre effectif de $s(s-1): 2$.

Considérons un réseau ($r = 2$) de courbes C. Il y a une infinité de courbes du réseau qui ont un point double variable. Le lieu de ces points est la *jacobienne* C_j du réseau. Les jacobiennes des réseaux tirés d'un système linéaire de dimension $r > 2$, forment un système linéaire $|C_j|$, le *jacobien* du système $|C|$.

Comme dans le cas des séries de groupes de points sur une courbe, quelques définitions sont nécessaires. Deux courbes appartenant à un même système linéaire sont dites équivalentes. Un système linéaire est dit complet lorsqu'il contient toutes les courbes équivalentes à l'une quelconque de ses courbes.

Etant donné deux systèmes linéaires $|C|$, $|D|$, le système $|C + D|$ est formé de toutes les courbes équivalentes à une courbe C jointe à une courbe D. Si d'autre part il existe quelques courbes d'un système linéaire $|C|$ contenant une courbe d'un système linéaire $|E|$, le système $|C-E|$ contient toutes les courbes équivalentes à la courbe obtenue en prenant les courbes de $|C|$ contenant une courbe E déterminée. On démontre que ce système ne dépend pas de la courbe E choisie. On a évidemment $|C| = |D + E|$, relation équivalente à $|D| = |C-E|$.

Deux systèmes linéaires $|C|$ et $|D|$ étant donnés, on démontre que l'on a $|C_j + 3D| = |D_j + 3C|$. On en déduit que si l'opération est possible, le système $|C_j-3C|$ ne dépend pas du système d'où l'on est parti. C'est le *système canonique* de F. Le nombre de courbes canoniques linéairement indépendantes est le *genre géométrique* p_g de la surface.

Appliquons ce qui précède au cas où la surface F appartient à l'espace ordinaire, est d'ordre n et possède une courbe double et des points triples à la fois pour la surface et pour la courbe double. Soit $|C|$ le système des sections planes, complété le cas échéant. Le système jacobien $|C_j|$ contient les courbes découpées par les premières polaires de F et par conséquent le système canonique supposé existant, est découpé par les surfaces d'ordre n-4 passant par la courbe double. On peut calculer la dimension de ce système et on trouve un nombre $p_a - 1$ qui peut être inférieur à $p_g - 1$, qui est la dimension effective. Le nombre p_a est le *genre arithmétique* de la surface F. Il est inférieur ou égal au genre géométrique p_g.

On pourrait dire que le système canonique d'une surface d'ordre n appartenant à un espace ordinaire est découpé par les surfaces d'ordre n-4 se comportant aux points singuliers de la surface comme ses premières polaires.

Le système $|C_j-2C|$, s'il existe, découpe sur chaque courbe C la série canonique de celle-ci. Il est appelé *système adjoint* au système $|C|$. Lorsqu'il a élaboré la Géométrie sur une surface algébrique, Enriques utilisait systématiquement le système adjoint, ce qui conduisait parfois à des questions délicates. L'utilisation du système jacobien, due également à Enriques, a simplifié de beaucoup l'exposé de la question.

Beppo Levi (1875-1961) a démontré que dans toute classe de surfaces algébriques, il existe au moins une surface dépourvue de points singuliers et par suite, une surface de l'espace ordinaire n'ayant comme singularités qu'une courbe double et des points triples à la fois pour la surface et pour la courbe double.

Deux surfaces F, F' de la même classe sont liées par une correspondance birationnelle entre leurs points mais, comme c'est le cas lorsque les surfaces sont des plans, il peut y avoir des exceptions. Si O est un point de F auquel correspondent une infinité de points de F', ceux-ci forment une courbe rationnelle γ' appelée *courbe exceptionnelle*. Castelnuovo et Enriques, qui ont étudié la question, ont démontré que si la surface F contient un faisceau (rationnel ou irrationnel) de courbes rationnelles, si à un point O de F correspond une courbe exceptionnelle γ', il existe un point O' de γ' auquel correspond une courbe exceptionnelle γ passant par O. Dans toutes les autres classes, Enriques a démontré que l'on peut construire une surface dépourvue de courbe exceptionnelle. Ces dernières courbes sont dites de première espèce, les autres de seconde espèce.

Les courbes exceptionnelles de première espèce appartiennent au système canonique (comme composantes fixes) de sorte que leur présence n'altère pas les genres géométrique et arithmétique.

Le genre d'une courbe canonique est évidemment un invariant des surfaces, mais la présence de courbes exceptionnelles influe sur sa valeur, si on calcule ce genre en tenant compte de leur présence. Si $p^{(1)}$ est le genre de courbes canoniques de la surface F privée de courbes exceptionnelles, et si F' est une surface de cette classe ayant α courbes exceptionnelles, le genre des courbes canoniques de F' est $p^{(1)}-\alpha$. Le degré du système canonique est $p^{(1)}-1$.

Si $|C|$ est un faisceau linéraire de courbes de genre π ayant n points-base et s'il y a δ courbes C ayant un point double, le nombre

$$I = \delta - n - 4\pi$$

calculé pour la surface F, doit être augmenté de α unités lorsqu'on le calcule sur la surface F'. On l'appelle l'invariant de Zeuthen (1839-1921)-Segre. Noether a démontré que dans tous les cas, on a

$$p^{(1)} + I = 12p_a + 9.$$

A côté de ces invariants, Enriques a introduit les plurigenres. Si $|K|$ est le système canonique d'une surface F, le système $|2K|$ est appelé système bicanonique, le système $|3K|$ est le système tricanonique, ..., le système $|iK|$ est le système i-canonique. Le nombre de courbes linéairement indépendantes de ce système est appelé i-genre P_i de la surface. On a ainsi une série d'invariants : le bigenre P_2, le trigenre P_3, ... L'utilité de ces invariants fut tout de suite démontrée car Castelnuovo a établi que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface soit rationnelle sont $p_a = P_2 = o$.

Dans ses recherches, Enriques a cherché a caractériser les classes de surfaces par les valeurs de leurs genres, mais comme dans le cas des courbes, pour que deux surfaces appartiennent à la même classe, il faut que certaines expressions formées au moyen des coefficients des équations des surfaces soient égales. Ces expressions sont les *modules* des surfaces. Malgré les travaux d'Enriques et de M. B. Segre, cette question est à peine ébauchée.

Les conditions de rationnalité d'une surface dues à Castelnuovo ont posé la question de savoir s'il existe des surfaces de genres $p_a = p_g = o$ non rationnelles. On a sur cette question des résultats obtenus par MM. Campedelli et Godeaux.

Comme dans le cas des courbes, il convient de considérer les systèmes linéaires spéciaux, c'est-à-dire les systèmes linéaires tels que chacune de leurs courbes appartienne à des courbes canoniques. Si par une courbe C passent i courbes canoniques linéairement indépendantes, le nombre i est l'indice de spécialité du système $|C|$.

Le théorème de Riemann-Roch donne une relation entre le degré n, le genre π, l'indice de spécialité i et la dimension r d'un système $|C|$. On a

$$r \geqslant p_a + n - \pi + 1 - i.$$

L'étude des surfaces irrégulières, c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles on a $q = p_g - p_a > o$ a montré que les courbes C se distribuent en un système continu $|C|$ formé de ∞^q systèmes linéaires $|C|$. Sur une courbe C déterminée, les courbes du système $|C|$ infiniment voisines de cette courbe, découpent une série linéaire complète.

Severi à démontré que l'on peut trouver sur une surface algébrique un certain nombre ρ de courbes C_1, C_2, ..., C_p telles que toute courbe tracée sur la surface appartient à un système dont la courbe générale est une combinaison linéaire à coefficients entiers, positifs ou négatifs de ces courbes. Celles-ci forment une *base* pour les courbes tracées sur la surface. Il a montré de plus que l'on peut trouver sur certaines surfaces des systèmes de courbes distincts dont les multiples suivant un même nombre λ appartiennent à un même système linéraire. Le nombre λ admet un maximum σ qui est un invariant : le diviseur de la surface.

On a cherché à étendre la théorie des intégrales abéliennes aux surfaces et cette extension peut se faire de deux manières. Soient F (x, y, z) = o l'équation d'une surface F et R (x, y, z) une fonction rationnelle des variables. On peut considérer l'intégrale double

$$\iint R(x, y, e)dxdy$$

dans laquelle z est une fonction de x, y donnée par l'équation de la surface. On partage ces intégrales en trois espèces comme dans le cas des intégrales abéliennes et le nombre des intégrales doubles de première espèce linéairement indépendantes est égal au genre géométrique de la surface.

Si P (x, y, z) et Q (x, y, z) sont deux polynomes, Picard a considéré les intégrales de différentielles totales

$$\int P\ dx + Q\ dy,$$

où z est fonction de x, y donnée par F = o et où l'on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} P$$

Ces intégrales se partagent également en trois espèces et un beau théorème connu sous le nom de théorème de Castelnuovo-Enriques-Severi établit que le nombre d'intégrales de Picard de première espèce est égal à l'irrégularité $q = p_g - p_a$ de la surface.

C'est à propos de la démonstration de ce théorème que Castelnuovo introduisit la variété de Picard attachée à une surface irrégulière F. Représentons les systèmes linéaires | C| d'un système continu { C } par les points d'une variété V_q. Si | C_1|, | C_2| sont deux systèmes linéaires de { C }, le système | C'| donné par

$$| C | = | C_1 - C_2 + C|$$

fait correspondre à tout sytème | C| de { C } un système | C'| de { C }. Il correspond à cette correspondance une transformation birationnelle T de V_q en soi. Le système | C_1| étant choisi, on peut choisir | C_2| de ∞^q façons. Il en résulte que V_q contient ∞^q transformations birationnelles en soi. On démontre que ces transformations sont deux à deux permutables et forment un groupe continu transitif. Les variétés possédant cette propriété ont été déterminées par Picard. Les coordonnées de ces points s'expriment par des fonctions uniformes q fois périodiques de p variables (fonctions abéliennes). V_q est la variété de Picard attachée à la surface F. Elle généralise la variété de Jacobi dont il a été question à propos des courbes.

On doit à Severi une théorie des systèmes de groupes de points appartenant à une surface algébrique, théorie qui a suscité un certain intérêt. On définit l'équivalence de deux groupes de points de la manière suivante : les points-base de deux faisceaux de courbes appartenant à un même système linéaire sont équivalents de première manière. On définit ensuite l'addition et la soustraction de ces groupes de points. Les groupes de points qui peuvent être obtenus de cette manière sont dits équivalents de seconde manière.

La *Géométrie sur une variété algébrique* à plus de deux dimensions est beaucoup moins développée. On peut définir le système canonique d'une telle variété en suivant une voie analogue à celle qui a été suivie pour les courbes et les surfaces. Un premier résultat est dû à Castelnuovo et Enriques : l'irrégularité d'une surface tracée sur une variété algébrique à trois dimensions variable dans un réseau dont les surfaces se rencontrent (en dehors de la base) suivant des courbes irréductibles, est constante.

Plus tard, Severi a publié une introduction à la Géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions. Si $|F|$ est le système canonique d'une telle variété V, appelons Ω_0 le degré de ce système, Ω_1 le genre de la courbe intersection variable de deux surfaces F, Ω_2 le genre arithmétique d'une surface F, le genre arithmétique P_a de V est donné par

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4,$$

formule déjà obtenue par Panelli (1855-1934) dans un cas particulier.

Une question importante est la détermination des conditions de rationnalité d'une variété algébrique à trois dimensions. Cette question a fait l'objet de profondes recherches de C. Fano (1871-1952), mais n'est pas résolue.

On appelle involution sur une variété algébrique V un ensemble de groupes de points tel qu'un point de V appartienne en général à un seul groupe. Si V est une courbe rationnelle, on sait que cette involution peut être représentée sur une courbe rationnelle. C'est un théorème de Lüroth (1844-1910) qui se démontre d'une manière élémentaire. Si V est un plan, l'involution est également rationnelle d'après un théorème de Castelnuovo, dont la démonstration est assez délicate. Enriques a construit une involution dans un espace linéaire à trois dimensions dont les groupes sont représentés par une variété dont Fano a démontré qu'elle n'était pas rationnelle. Il y a donc un nouveau problème à résoudre : caractériser les involutions rationnelles d'un espace à trois dimensions.

On doit à M. B. Segre d'importantes recherches sur les variétés algébriques à trois dimensions, par l'étude systématique des systèmes de courbes tracées sur ces variétés.

Les intégrales attachées à une variété algébrique ont été l'objet d'études approfondies par M. E. Marchionna.

La Géométrie et la Théorie des groupes

C'est en 1872 que Félix Klein, synthétisant des idées qui commençaient à avoir cours, a publié son célèbre programme d'Erlangen. Les idées qu'il y a développait peuvent être résumées de la manière suivante : Soit V une variété d'éléments que nous conviendrons d'appeler des points. Supposons qu'il existe des transformations T faisant correspondre à un point P de V, un point P' de V. Supposons en outre que l'inverse d'une transformation T soit encore une transformation T et que si une transformation T_1 fait correspondre P' à P, une transformation T_2 faisant correspondre P'' à P', le passage direct de P à P'' puisse se faire au moyen d'une transformation T que nous appellerons produit $T_2T_1 = T$ de T_1 par T_2. L'ensemble des transformations T forme un groupe G. Cet ensemble possède donc les propriétés suivantes : le produit de deux de ses transformations est encore une transformation de l'ensemble et l'inverse d'une transformation de l'ensemble appartient encore à l'ensemble. On appelle *Géométrie de la variété V ayant pour groupe principal le groupe G*, l'ensemble des propriétés des figures qui sont invariantes pour les transformations du groupe G.

Si G' est un sous-groupe de groupe G, c'est-à-dire un groupe dont toutes les transformations font partie du groupe G, on dit que la Géométrie ayant pour groupe principal le groupe G' est subordonnée à la Géométrie ayant pour groupe principal G.

Ainsi, la Géométrie projective a pour groupe principal le groupe des homographies. La Géométrie affine est subordonnée à la Géométrie projective, la Géométrie des similitudes est subordonnée à la Géométrie affine et la Géométrie métrique est subordonnée à la précédente.

Considérons dans l'espace projectif réel à trois dimensions une quadrique Q et fixons l'attention sur le groupe G des homographies transformant Q en soi. Nous pouvons considérer une Géométrie qui a comme groupe principal le groupe G. Mais trois cas peuvent se présenter suivant que Q est une quadrique imaginaire, ou réelle, ou dégénérée.

Plaçons-nous dans le premier cas. Si A, B sont deux points (réels), la droite AB coupe Q en deux points imaginaires conjugués P_1, P_2. Nous définirons la distance des points AB par la formule

$$AB = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}_e (P_1, P_2, A, B).$$

Cette distance est réelle et si C est un troisième point de la droite AB, on a $AB + BC = AC$. La Géométrie de l'espace réel de groupe principal G est la Géométrie de Riemann où par un point ne passe pas de parallèle à une droite donnée. Il convient cependant de signaler qu'il existe un certain parallélisme dit de Cliffort (1845-1879) où une parallèle est définie comme le lieu d'un point entraîné par une translation le long d'une droite donnée. D'une manière précise, si d est une droite et P un point ne lui appartenant pas, il existe une homographie du groupe G pour laquelle la droite est unie. La parallèle de Cliffort à d menée par P est la droite passant par P unie pour cette homographie.

Supposons maintenant que Q soit une quadrique réelle et précisément un ellipsoïde. Convenons de considérer l'espace intérieur à l'ellipsoïde. Alors la droite joignant deux points A, B de cet espace rencontre Q en deux points P_1, P_2. On prendra pour distance AB l'expression

$$AB = \frac{1}{2} \operatorname{Log}_e (P_1, P_2, A, B).$$

La géométrie obtenue est celle de Lobatchefski (1793-1856) à condition d'appeler droites parallèles deux droites intérieures à l'ellipsoïde qui se rencontrent en un point de celui-ci. Par un point passent deux parallèles à une droite.

Supposons maintenant que la quadrique Q soit dégénérée comme quadrique-enveloppe, c'est-à-dire qu'elle soit constituée par les plans passant par les tangentes à une conique C. On peut prendre le plan de cette conique pour plan de l'infini et la conique C pour cercle imaginaire à l'infini. On retrouve ainsi la Géométrie euclidienne.

Toutes les Géométries connues rentrent dans ce schéma sauf cependant, comme nous l'avons vu la Géométrie sur une variété algébrique et aussi une Géométrie imaginée par Riemann basée sur la distance de deux points.

Supposons que sur une variété V les points soient donnés par n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (coordonnées du points) et soit $f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ une forme quadratique positive dont les coefficients sont des fonctions des x. Riemann pose que la distance entre deux points x et $x + dx$ infiniment voisins soit donnée par $ds^2 = f(dx)$. Il appartenait à E. Cartan (1869-1951) de généraliser la conception de Klein pour faire rentrer la Géométrie riemannienne dans un cadre élargi.

Reprenons la variété V_n à n dimensions et attachons à chaque point A de cette variété un espace linéaire S_a à n dimensions. Donnons-nous dans chacun de ces espaces un groupe G. Nous désignerons par G_a celui qui appartient à S_a. Donnons-nous en outre un raccordement entre les points d'un espace S_a et ceux d'un espace infiniment voisin attaché au point $A + dA$.

Cela étant, considérons deux points A, B de V_n et un chemin l allant de A à B, tracé sur V_n. Grâce au raccordement donné, on peut passer de la Géométrie de Groupe G_a dans S_a, à la Géométrie de groupe G_{a+da} dans l'espace S_{a+da}. Et de proche en proche, au moyen d'une sorte d'intégration, on pourra passer à la Géométrie de groupe G_b dans l'espace S_b. Cette géométrie dépendra en général du chemin l.

Supposons maintenant que le point B coïncide avec le point A et considérons tous les chemins tracés sur V_n, partant de A et y revenant. Pour chacun de ces chemins on reviendra en A avec une géométrie de groupe G', mais on pourra passer du groupe G' au groupe G par une certaine transformation t et ces transformations t forment un groupe g, que Cartan appelle *groupe d'holonomie*.

Les Géométries riemanniennes sont susceptibles de cette interprétation. Il est évident que si le groupe g se réduit à l'identité, on obtient une géométrie qui rentre dans le cadre de Klein.