Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 9-10, 1969, pp. 399-407

INVOLUTIONS CYCLIQUES DU TROISIÈME ORDRE APPARTENANT A DES SURFACES ALGÉBRIQUES

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Cette note est consacrée à quelques applications de la théorie des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à des surfaces algébriques que nous avons élaborée et développée dans un ouvrage récent [*]. Précisément, nous considérons des involutions cycliques du troisième ordre dépourvues de points unis.

Dans une première partie, ces considérations nous permettent de construire une surface du douzième ordre d'un espace linéaire à quatre dimensions dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques et qui possède une seule courbe canonique, d'ordre six.

Dans la seconde partie, nous considérons, dans un espace à cinq dimensions, les involutions engendrées par des homographies de période trois sur des surfaces intersections de trois hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par les homographies. Nous obtenons comme images des involutions trois surfaces qui n'appartiennent pas à une même classe, bien qu'ayant mêmes genres arithmétique, géométrique, linéaire, mêmes pluri genres et même diviseur de Severi. On sait qu'en Géométrie algébrique, on range dans une même classe deux surfaces birationnellement équivalentes (la transformation birationnelle liant deux surfaces d'une même classe ne s'étendant pas nécessairement, en tant que transformation birationnelle, aux espaces ambiants des surfaces). C'est l'existence de trois systèmes linéaires de courbes qui montre que les surfaces n'appartiennent pas à une même classe. Pour les deux premières surfaces, ces systèmes sont des faisceau mais pour la première, leur somme est une courbe canonique, ce qui ne se présente plus pour la seconde. Pour la troisième surface, un seul de ces systèmes est un faisceau.

Nos développements pourraient être étendus aux cas où les involutions auraient pour période un nombre premier quelconque, mais les raisonnement ne seraient qu'une paraphrase des précédents, sans aucune utilité.

I

1. Considérons dans un espace S_4 à quatre dimensions l'homographie H de période trois dont les équations sont

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^2 x_4,$$

où ε est une racine primitive de l'unité.

(*) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963).

Manuscrit reçu le 19 septembre 1969.

Les hypersurfaces cubiques de S_4 transformées en elles-mêmes par H forment trois systèmes linéaires $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$ dont les équations sont respectivement

$$x_0^3 + \varphi_3(x_1, x_2) + \varphi_3'(x_3, x_4) + x_0\varphi_{11}(x_1, x_2\,;\, x_3, x_4) = 0,$$
$$x_0^2\varphi_1(x_1, x_2) + x_0\varphi_2(x_3, x_4) + \varphi_{21}(x_1, x_2\,;\, x_3, x_4) = 0,$$
$$x_0^2\varphi_1'(x_3, x_4) + x_0\varphi_2'(x_1, x_2) + \varphi_{12}(x_3, x_4\,;\, x_1, x_2) = 0.$$

où φ_i, φ_i' désignent des formes algébriques de degré i par rapport à leurs arguments et φ_{ik} une forme algébrique de degré i par rapport aux deux premiers arguments dont les coefficients sont des formes de degré k par rapport aux seconds arguments.

Les dimensions des systèmes $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$ sont respectivement 12, 10 et 10. Le premier système est privé de points-base, les deux autres ont pour base les axes ponctuels de l'homographie H (un point et deux droites).

Rapportons projectivement les hypersurfaces V_0 aux hyperplans d'un espace S_{12} à 12 dimensions. Aux groupes de l'involution I engendrée dans S_4 par l'homographie H correspondent les points d'une variété W à quatre dimensions et d'ordre 27 de S_{12}. Nous désignerons par W_0 les sections hyperplanes de cette variété.

Aux variétés V_1, V_2 correspondent sur W des variétés W_1, W_2 d'ordre 27 également.

Un raisonnement classique montre que l'on a

$$|3W_0| = |3W_1| = |3W_2|$$

et qu'il y a par suite une hypersurface cubique qui oscule la variété W le long de chacune des variétés W_1, W_2.

A l'hyperplan $x_0 = 0$ de S_4 correspond sur W une variété à trois dimensions Z_0 d'ordre 9. Les hypersurfaces cubiques V_0 contenant l'hyperplan $x_0 = 0$ sont complétées par des hyperquadriques dépendant de quatre paramètres. Par conséquent à $x_0 = 0$ correspond sur W une variété Z_0 située dans un espace σ_0 à huit dimensions.

De même aux hyperplans

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0, \ \ \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

correspondent sur W des variétés Z_1, Z_2 d'ordre 9, situées dans des espaces σ_1,σ_2, à 8 dimensions.

On a

$$3Z_0 \equiv 3Z_1 \equiv 3Z_2 \equiv Z_0 + Z_1 + Z_2 = W_0.$$

On en conclut que le long de chacune des sections de W par les espaces σ_0, σ_1, σ_2, il y a un hyperplan qui oscule la variété W. De plus, les hyperplans passant par σ_1,σ_2 ne rencontrant plus W que suivant la variété Z_0 qui est unique, donc les espaces σ_1, σ_2 ont en commun un espace à 5 dimensions.

Les hyperplans passant par σ_0, σ_1 ne rencontrant plus W qui suivant les ∞^1 variétés Z_2, par conséquent les espaces σ_0, σ_1 appartiennent à un espace à 10 dimensions et par suite, ces deux espaces ont en commun un espace à 4 dimensions. Il en est de même des espaces σ_0, σ_2.

L'espace σ_0 et deux espaces σ_1, σ_2 appartiennent à un hyperplan.

2. Considérons la surface F intersection de deux hypersurfaces V_0. Sur cette surface, l'homographie H engendre une involution cyclique I d'ordre trois privée de points unis.

La surface F est d'ordre 9 et ses intersections avec les hyperplans forment le système canonique. Elle est régulière et son genre arithmétique est $p_a = 5$. Le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 82$.

Aux deux variétés V_0 contenant F correspondent dans S_{12} deux hyperplans ayant en commun un espace S_{10} à 10 dimensions coupant W suivant une surface Φ image de l'involution I.

Sur la surface F, les systèmes $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$ découpent des systèmes linéaires de courbes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ de genre 55 et tous trois de dimension 10. A ces systémes correspondent sur Φ de systèmes linéaires complets $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, de genre 19, le premier étant celui des sections hyperplanes de Φ. Les courbes Γ_0, Γ_1, Γ_2 ont l'ordre 27.

On a

$$|3\Gamma_0| = |3\Gamma_1| = |3\Gamma_2|,$$

et la surface Φ a le diviseur de Severi égal à trois.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de Φ, on a la relation

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 1$. Le genre linéaire de Φ est égal à quatre.

Les variétés Z_0, Z_1, Z_2 sont coupées par l'espace S_{10} suivant des courbes G_0, G_1, G_2 d'ordre 9 dont la première G_0 est isolée et les autres forment des faisceaux. Les courbes G_0, G_1, G_2 ont pour homologues sur F des sections hyperplanes donc des courbes canoniques. Parmi celles-ci se trouve la transformée de la courbe canonique de Φ et puisque $p'_a = 1$, la courbe G_0 est la courbe canonique de Φ.

Les courbes G_0, G_1, G_2 ont le genre quatre puisqu'elles correspondent à des courbes de genre dix. D'ailleurs, le genre linéaire de Φ, c'est-à-dire le genre de G_0 est égal à 4.

Les courbes G_0, G_1, G_0 appartiennent à des espaces σ'_1, σ'_1, σ'_2 à six dimensions. Deux espaces σ'_1, σ'_2 se coupent suivant un espace à trois dimensions et chacun des espaces σ'_1, σ'_2 coupe σ'_0 suivant un plan.

On a

$$3G_0 \equiv 3G_1 \equiv 3G_2 \equiv G_0 + G_1 + G_2.$$

Le long de chacune des courbes G_0, G_1, G_2 il existe un hyperplan osculant la surface Φ.

3. On peut obtenir dans un espace S_4 un autre modèle projectif de Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques de la surface.

A la courbe canonique G_0 de Φ correspond la section de F par l'hyperplan $x_0 = 0$, donc le système d'hyperquadriques découpant sur F le système transformé du système bicanonique de Φ contient le terme x_0^2. Il a pour équation

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_1 x_4 + \lambda_3 x_2 x_3 + \lambda_4 x_2 x_4 = 0.$$

Rapportons projectivement les hyperquadriques de ce système aux hyperplans d'un espace à quatre dimensions en posant

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_0^2 : x_1 x_3 : x_1 x_4 : x_2 x_3 : x_2 x_4, \tag{1}$$

et supposons que les équations des hypersurfaces V_0 passant par F soient

$$\left.\begin{aligned} x_0^3 + \varphi_3(x_1, x_2) + \psi_3(x_3, x_4) + x_0 \varphi_{11}(x_1, x_2 ; x_3, x_4) = 0 \\ x_0^3 + \varphi'_3(x_1, x_2) + \psi'_3(x_3, x_4) + x_0 \varphi'_{11}(x_1, x_2 ; x_3, x_4) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Des équations (1) on tire

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{x_2}{X_3} = \frac{\rho}{x_3}, \quad \frac{x_3}{X_1} = \frac{x_4}{X_2} = \frac{\rho}{x_1}, \quad \frac{x_0}{X_0} = \frac{\rho}{x_0}.$$

En portant ces expressions dans les équations (2) on obtient deux équations que nous écrirons sous la forme

$$\frac{\rho^2}{x_3^3} A + \frac{\rho^2}{x_1^3} B + x_0 C = 0, \quad \frac{\rho^2}{x_3^3} A' + \frac{\rho^2}{x_1^3} B' + x_0 C' = 0, \tag{3}$$

en posant

$$A = \varphi_3(X_1, X_3), \; B = \psi_3(X_1, X_2), \; A' = \varphi_3'(X_1, X_3), \; B' = \psi_3'(X_1, X_2)$$

et en remarquant que

$$x_0^3 + \varphi_{11}(x_1, x_2 \,;\, x_3, x_4), \quad x_0^3 + \varphi_{11}'(x_3, x_2 \,;\, x_3, x_4)$$

sont des formes linéaires C, C' en X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 multipliées par ρx_0.

En résolvant les équations (3) par rapport à $\rho^2 : x_3^3$, $\rho^2 : x_1^3$, et en multipliant les résultats obtenus, il vient

$$(AB' - A'B)^2 + X_0 X_1^3 \,[C^2 A'B' + C'^2 AB - CC'(AB' + A'B)] = 0. \tag{4}$$

Des équations (1), on tire

$$X_1 X_4 - X_2 X_3 = 0, \tag{5}$$

de sorte que le modèle Φ' de la surface Φ est situé sur le cône (5).

En utilisant cette relation, on trouve que dans les expressions AB, $A'B$, AB', $A'B'$, on peut mettre X_1^3 en évidence, de sorte que l'on peut poser

$$AB = X_1^3\Phi_1, \; A'B' = X_1^3\Phi_2, \; AB' = X_1^3\Phi_3, \; A'B = X_1^3\Phi_4,$$

où Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 sont des formes cubiques en X_1, X_2, X_3, X_4. L'équation (4) peut alors s'écrire

$$(\Phi_3 - \Phi_4)^2 + X_0 \,[C^2\Phi_2 + C'^2\Phi_4 - CC'(\Phi_3 + \Phi_4)] = 0. \tag{6}$$

La surface Φ est d'ordre 12, intersection du cône quadratique (5) et de l'hypersurface du sixième ordre (6). La courbe canonique est découpée par l'hyperplan $X_0 = 0$. Comptée deux fois, elle donne une courbe bicanonique de la surface.

Le point $0(1, 0, 0, 0, 0)$, sommet du cône (5), est triple pour l'hypersurface (6), et par conséquent sextuple pour la surface Φ'.

II

4. Dans un espace S_5 à cinq dimensions la surface F intersection de trois hypersurfaces du troisième ordre a l'ordre 27 et ses courbes canoniques sont découpées par les hypersurfaces cubiques. Celles-ci sont au nombre de 56 linéairement indépendantes et la surface F étant régulière, son genre arithmétique est $p_a = 53$. Son genre linéaire est $p^{(1)} = 3^5 + 1$.

Supposons que la surface F contienne une involution cyclique I d'ordre trois privée de points unis et soit Φ une surface image de cette involution.

Le genre arithmétique p'_a de Φ est lié à celui p_a de F par la relation

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 17$. Le genre linéaire de Φ est égal à 82.

5. Considérons dans l'espace S_5 l'homographie H de période trois d'équations

$$x'_1 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4 : \varepsilon^2 x_5,$$

où ε est une racine primitive du troisième ordre de l'unité.

Les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H forment trois systèmes linéaires d'équations

$$\varphi_3(x_0, x_1) + \varphi'_3(x_2, x_3) + \varphi''_3(x_4, x_5) + \varphi_{111}(x_0, x_1 \,;\, x_2, x_3 \,;\, x_4, x_5) = 0,$$
$$\varphi_{12}(x_2, x_3 \,;\, x_0, x_1) + \varphi'_{12}(x_0, x_1 \,;\, x_4, x_5) + \varphi''_{12}(x_4, x_5 \,;\, x_2, x_3) = 0,$$
$$\varphi_{12}(x_4, x_5 \,;\, x_0, x_1) + \varphi'_{12}(x_0, x_1 \,;\, x_2, x_3) + \varphi''_{12}(x_2, x_3 \,;\, x_4, x_5) = 0,$$

les notations étant analogues à celles du n° 1 et φ_{111} par exemple étant une forme trilinéaire de ses arguments.

Nous désignerons par $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$ ces systèmes ; ils ont respectivement les dimensions 19, 17, 17. Le premier est dépourvu de points-base, les autres ont pour base les trois droites axes ponctuels de l'homographie H.

Rapportons projectivement les hypersurfaces V_0 aux hyperplans d'un espace S_{19} à 19 dimensions. Aux groupes de trois points de l'involution déterminée par H dans l'espace S_5, correspondent les points d'une variété W à cinq dimensions, d'ordre 81.

Désignons par W_0, W_1, W_2 les variétés à quatre dimensions qui correspondent respectivement aux variétés V_0, V_1, V_2. Ces variétés ont l'ordre 81, les premières étant les sections hyperplans de W. Elles engendrent sur W des systèmes linéaires complets et l'on a

$$|3W_0| = |3W_1| = |3W_2|.$$

Le long de chacune des variétés W_1, W_2 il existe une hypersurface cubique osculant la variété W.

A l'hyperplan

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0$$

correspond sur W une variété Z_0 d'ordre 27.

Les hyperquadriques de S_5 qui, avec l'hyperplan précédant forment une variété V_0 ont pour équation

$$\psi_2(x_0, x_1) + \lambda_1 x_2 x_4 + \lambda_2 x_2 x_5 + \lambda_3 x_3 x_4 + \lambda_4 x_3 x_5 = 0,$$

donc la variété Z_0 est située dans un espace linéaire σ_0 tel que les hyperplans de S_{13} contenant cet espace soient en nombre ∞^2. On en déduit que l'espace σ_0 a la dimension 11.

De même, aux hyperplans

$$\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \quad \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0$$

correspondent sur W des variétés Z_1, Z_2 d'ordre 27, situées dans des espaces respectivement σ_1, σ_2 à 11 dimensions.

On a

$$3Z_0 \equiv 3Z_1 \equiv 3Z_2 \equiv Z_0 + Z_1 + Z_2 \equiv W_0.$$

Les hyperplans passant par un espace σ_1 et un espace σ_2 découpent sur W les variétés Z_0, donc ces variétés appartiennent à un espace à 17 dimensions. Il en résulte qu'ils ont en commun un espace à 5 dimensions. D'une manière générale, deux des espaces σ_0, σ_1, σ_2 se rencontrent suivant un espace à 5 dimensions.

6. Soit F une surface commune à trois variétés linéairement indépendantes de $| V_0 |$. Elle est d'ordre 27 et ne rencontre pas les axes de l'homographie H, donc celle-ci détermine sur la surface une involution cyclique I d'ordre trois privée de points unis.

Aux trois hypersurfaces V_0 contenant F correspondent dans S_{19} trois hyperplans ayant en commun un espace S_{16} à 16 dimensions qui coupe la variété W suivant une surface Φ, image de l'involution I.

La surface Φ_1 a le genre arithmétique $p'_a = 17$ et le genre linéaire 82.

Nous désignerons par $| C |$ le système des sections hyperplanes de F et par $| C_0 |$, $| C_1 |$, $| C_2 |$ les systèmes linéaires découpés sur F par les variétés V_0, V_1, V_2. Le système $| C |$ est le système canonique de F et les systèmes $| C_0 |$, $| C_1 |$, $| C_2 |$ ont respectivement les dimensions 16, 17 et 17, et le même genre 82. Soient $| \Gamma_0 |$, $| \Gamma_1 |$, $| \Gamma_2 |$ les systèmes linéaires complets qui leur correspondent sur Φ_1.

Les courbes Γ_0 sont les sections hyperplanes de Φ_1. Les courbes Γ_0, Γ_1, Γ_2 ont le même ordre 81 que la surface Φ_1 et le même genre 82. Le système $| \Gamma_0 |$ ayant la dimension 16, inférieure d'une unité à celle, 17 de $| \Gamma_1 |$, $| \Gamma_2 |$, et le genre arithmétique de Φ_1 étant 17, c'est le système $| \Gamma_0 |$ qui est le système canonique de la surface Φ_1 (*).

On a

$$| 3\Gamma_0 | = | 3\Gamma_1 | = | 3\Gamma_2 |$$

et le long de chacune des courbes Γ_1, Γ_2 il y a une hypersurface cubique qui oscule la surface Φ_1. Le diviseur de Severi de cette surface est égal à trois.

Les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0, \ \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \ \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0$$

coupent la surface F suivant des courbes G_0, G_1, G_2 d'ordre 27 et de genre 55 ; elles forment des faisceaux $| G_0 |$, $| G_1 |$, $| G_2 |$ auxquels correspondent sur Φ_1 des faisceaux complets $| G'_0 |$, $| G'_1 |$, $| G'_2 |$. Les courbes G'_0, G'_1, G'_2 sont d'ordre 27 et de genre 19. Elles appartiennent à des espaces à 8 dimensions et les 9 points communs à deux de ces courbes appartiennent à des espaces à 2 dimensions.

On a

$$3G'_0 \equiv 3G'_1 \equiv 3G'_2 \equiv G'_0 + G'_1 + G'_2 \equiv \Gamma_0$$

de sorte que le long de chacune des courbes G'_1, G'_1, G'_2 il y a un hyperplan osculant la surface Φ_1.

(*) Voir notre note *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1932, pp. 1015-1025), ou aussi notre ouvrage cité, pp. 127-130.

7. Supposons maintenant que la surface F soit l'intersection de deux hypersurfaces V_0 et d'une hypersurface V_1, que nous désignerons par V_1'. Elle ne rencontre pas les droites axes de l'homographie H et celle-ci détermine donc sur la surface une involution cyclique I dépourvue de points unis.

Aux hyperfaces V_0 contenant F correspondent deux hyperplans de S_{19} ayant en commun un espace S_{17} à 17 dimensions coupant la variété W suivant une variété W' à trois dimensions. A la variété V_1' correspond sur W une variété W_1' suivant laquelle une hypersurface cubique oscule W. La section de cette variété par l'espace S_{11} est une surface Φ_2 image de l'involution I.

La surface Φ_2 est d'ordre 81.

Désignons comme plus haut par $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ les systèmes linéaires déterminés sur F par les hypersurfaces V_0, V_1, V_2 et par $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ les systèmes linéaires complets qui leur correspondent sur Φ_2.

Les courbes C_0, C_1, C_2 ont le genre $2^5 + 1$ et les systèmes $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ le degré 81 et le genre 82. Ces systèmes ont respectivement les dimensions 17, 16, 17. Comme le genre arithmétique p_a' de Φ_2 est égal à 17, c'est le système $|\Gamma_1|$ qui est le système canonique de Φ_2.

On a

$$|3\Gamma_0| = |3\Gamma_1| = |3\Gamma_2|$$

et Φ_2 est également de diviseur de Severi égal à trois. Il existe une hypersurface cubique osculant Φ_2 le long de chacune des courbes Γ_1, Γ_2. Le long d'une courbe canonique $\Gamma_1$il existe donc deux hypersurfaces cubiques de S_{11} osculant la variété W_1'.

Les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0,\ \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0,\ \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0$$

découpent sur F des courbes G_0, G_1, G_2 d'ordre 27 et de genre 55. A ces courbes correspondent sur Φ_2 des courbes G_0', G_1', G_2' d'ordre 27 et de genre 19, formant des faisceaux $|G_0'|$, $|G_1'|$, $|G_2'|$.

On a encore

$$3G_0' \equiv 3G_1' \equiv 3G_2' \equiv G_0' + G_1' + G_2' \equiv \Gamma_0$$

et le long de chacune des courbes G_0', G_1', G_2' il y a un hyperplan osculant la surface Φ_2.

Les courbes G_0', G_1', G_2' appartiennent à des espaces σ_0', σ_1', σ_2' à 9 dimensions et deux de ces espaces ont en commun un espace à 3 dimensions. L'espace σ_0, par exemple, coupe la variété W_1 suivant un espace à trois dimensions et le long de G_0', il y a hypersurface cubique de cet espace qui oscule la surface Φ_2.

8. Dans l'espace S_5, l'homographie H de période trois ayant pour équations

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' : x_5' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x^2{}_3 : \varepsilon^2 x_4 : \varepsilon^2 x_5,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité, possède trois axes ponctuels : un point, une droite et un plan. Les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H forment trois systèmes linéaires $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$ dont les équations ont respectivement

$$x_0^3 + \varphi_3(x_1, x_2) + \varphi_3'(x_3, x_4, x_5) + x_0\varphi_{11}(x_1, x_2 ; x_3, x_4, x_5) = 0,$$
$$x_0^2\varphi_1(x_1, x_2) + x_0\varphi_2(x_3, x_4, x_5) + \varphi_{12}(x_3, x_4, x_5 ; x_1, x_2) = 0,$$
$$x_0^2\varphi_1(x_3, x_4, x_5) + x_0\varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_{12}(x_1, x_2 ; x_3, x_4, x_5) = 0.$$

Ils sont respectivement de dimension 20, 16 et 17.

En rapportant projectivement les variétés V_0 aux hyperplans d'un espace S_{20} à 20 dimensions, on obtient comme image de l'involution cubique engendrée par H dans l'espace S_5, une variété W à cinq dimensions d'ordre 81. Sur cette variété, il correspond aux variétés V_0, V_1, V_2 des variétés à quatre dimensions respectivement W_0, W_1, W_2 d'ordre 81 et on a

$$| 3W_0 | = | 3W_1 | = | 3W_2 |.$$

Le long de chacune des variétés W_1, W_2 il y a une hypersurface cubique qui oscule la variété W.

Aux hyperplans de S_5

$$x_0 = 0, \ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0, \ \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0$$

correspondent sur W des variétés Z_0, Z_1, Z_2 d'ordre 27 telles que

$$3Z_0 \equiv 3Z_1 \equiv 3Z_2 \equiv Z_0 + Z_1 + Z_2 \equiv W_0.$$

Un calcul analogue à celui que nous avons fait plus haut montre que la variété Z_0 appartient à un espace à 13 dimensions, une variété Z_1 à un espace à 14 dimensions, enfin une variété Z_2 à un espace à 12 dimensions. La variété Z_0 est isolée, les variétés Z_1 forment un faisceau et les variétés Z_2 un réseau.

9. Considérons la surface F intersection de trois hypersurfaces V_0 linéairement indépendantes. Cette surface ne rencontre pas les axes de l'homographie H et par conséquent celle-ci détermine sur F une involution I privée de points unis. Aux hypersurfaces V_0 contenant F correspondent dans S_{20} trois hyperplans qui ont en commun un espace S_{17} à 17 dimensions coupant la variété W suivant une surface Φ_3 image de l'involution I.

Les variétés V_0, V_1, V_2 découpent sur F des systèmes linéaires $| C_0 |$, $| C_1 |$, $| C_2 |$ de dimensions respectives 17, 16 et 17. A ces systèmes correspondent sur Φ_0 des systèmes linéaires complets $| \Gamma_0 |$, $| \Gamma_1 |$, $| \Gamma_2 |$. Le genre arithmétique de Φ_3 étant 17 et la surface étant régulière, c'est le système $| \Gamma_1 |$ qui est le système canonique de la surface Φ_3.

Les courbes Γ_0, Γ_1, Γ_2 ont le même ordre 81 que la surface Φ_3 et ont le genre 82. Les courbes Γ_0 sont les sections hyperplanes de Φ_3.

On a

$$| 3\Gamma_0 | = | 3\Gamma_1 | = | 3\Gamma_2 |$$

de sorte que le long d'une courbe Γ_1 ou Γ_2 il y a une hypersurface cubique de S_{17} qui oscule la surface Φ_3. C'est en particulier ce qui se produit le long de toute courbe canonique Γ_1.

Aux sections de la surface F par les hyperplans

$$x_0 = 0, \ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0, \ \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0$$

correspondent sur Φ_3 des courbes G'_0, G'_1, G'_2 d'ordre 27 et de genre 19. La courbe G'_0 est isolée et appartient à un espace σ'_0 à 10 dimensions, les courbes G'_1 appartiennent à des espaces σ_1 à 11 dimensions et forment un faisceau $| G'_1 |$. Enfin les courbes G'_2 appartiennent à des espaces σ_2 à 9 dimensions et forment un réseau $| G'_2 |$. On a encore

$$3G'_0 \equiv 3G'_1 \equiv 3G'_2 \equiv G'_0 + G'_1 + G'_2 \equiv \Gamma_0.$$

10. Nous venons de construire trois surfaces régulières Φ_1, Φ_2, Φ_0 ayant même genre arithmétique 17 et même genre linéaire 82. Les plurigenres de ces surfaces sont donnés par

$$P_k = \frac{81}{2} k(k-1) + 13$$

et sont égaux. Ces surfaces ont même diviseur 3 de Severi. Cependant elles appartiennent à trois classes différentes comme on le voit en examinant les systèmes linéaires $|G'_0|$, $|G'_1|$, $|G'_2|$. Sur les surfaces Φ_1, Φ_2 ils forment des faisceaux, mais sur Φ_1, leur somme donne une courbe canonique, ce qui n'a pas lieu pour les surfaces Φ_2. Sur une surface Φ_3, un seul des systèmes est un faisceau.

Liège, le 28 juin 1969.