Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38e année, nº 9-10, 1969, pp. 408-410

LES SURFACES CUBIQUES ET LES FAISCEAUX DE HALPHEN

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

On sait que Halphen a démontré l'existence de faisceaux de courbes planes d'ordre $3n$, irréductibles, ayant neuf points-base multiples d'ordre n. Ces points sont situés sur une cubique qui, comptée n fois, fait partie du faisceau. Nous nous bornerons au cas des sextiques qui est d'ailleurs celui qui a été considéré par Halphen (*).

Celui-ci utilise pour établir la propriété la représentation de la cubique passant par les neuf points par des fonctions elliptiques. Nous en avons donné autrefois une démonstration géométrique très simple en utilisant la représentation plane de la surface cubique (**) ; nous la rappelerons rapidement et l'utiliserons ensuite pour établir l'existence de faisceaux de Halphen dont les points doubles ne sont pas à distance finie les uns des autres.

1. Considérons dans un plan σ six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 dont trois ne sont jamais en ligne droite ni les six sur une conique. En rapportant projectivement aux plans de l'espace les cubiques C passant par les six points A, on obtient une surface cublique F en correspondance birationnelle avec le plan σ. Considérons une conique irréductible γ touchant une cubique C irréductible en trois points A_7, A_8, A_9. Les plans tangents à F aux points A'_7, A'_8, A'_9 homologues des points A_7, A_8, A_9 se coupent en un point 0 ; le cône du second degré de sommet 0 tangent à F en A'_7, A'_8, A'_9 et le plan de ces trois points compté deux fois déterminent un faisceau de quadriques. Aux sections de F par ces quadriques correspondent dans le plan σ des courbes du sixième ordre ayant des points doubles aux neuf points A et ces courbes forment donc un faisceau de Halphen car elles sont irréductibles.

2. Considérons les cubiques planes C passant par trois points A_1, A_2, A_3 et tangentes en ces points respectivement aux droites A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. En rapportant projectivement les cubiques C aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F possédant trois points doubles biplanaires.

En considérant une conique γ tangente en trois points A_4, A_5, A_6 à une cubique C_0 irréductible du système $|C|$ et reprenant le raisonnement précédent, on obtient un faisceau de Halphen ayant trois tacnodes A_1, A_2, A_3 et trois points doubles A_4, A_5, A_6. La courbe C_0 comptée deux fois fait partie du faisceau.

Manuscrit reçu le 16 octobre 1969.

(*) Halphen, *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1881-1882, p. 162 ; *Œuvres de G.-H. Halphen*, t. II, 1918, pp. 547-557). Voir aussi Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 1924, vol. III, p. 195 et p. 345.

(**) *Sur les faisceaux de courbes planes du sixième ordre de Halphen* (Mathesis, 1925, pp. 154-157). *Introduction à la Géométrie supérieure* (Liège, 1946, nº 178).

Supposons que les coordonnées d'un point de la courbe C_0 soient des fonctions elliptiques d'un argument u telles que la somme des arguments de trois points en ligne droite soit congrue à zéro, modules périodes 2ω, $2\omega'$, des fonctions elliptiques. Si u_i est la valeur de u qui correspond au point A_i, on a

$$\left.\begin{array}{l} 2u_1 + u_2 \equiv 0,\ 2u_2 + u_3 \equiv 0,\ 2u_3 + u_1 \equiv 0, \\ 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 \equiv 0. \end{array}\right\} \pmod{2\omega,\ 2\omega'}$$

On en déduit

$$3u_1 + 3u_2 + 3u_3 \equiv 0,$$

d'où

$$4u_1 + 4u_2 + 4u_3 + 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 \equiv 0 \qquad \pmod{2\omega,\ 2\omega'}$$

sans que la moitié de cette somme soit congrue à zéro par rapport aux mêmes modules. Cela confirme l'existence du faisceau considéré.

3. Soient C_0 une cubique plane sans point double et 0 un de ses points dont le tangentiel est un point d'inflexion I. Appelons a la tangente au point 0 et b la tangente au point I. Les cubiques C_0 et $3a$ déterminent un faisceau de cubiques dont l'une contient la droite b et est complétée par une conique γ qui a un contact du cinquième ordre avec C_0. Le point 0 est in point sextatique de la cubique C_0 (qui en compte 27).

Les cubiques C qui ont un contact du cinquième ordre avec C_0 au point 0 forment un système linéaire triplement infini. Si l'équation de C_0 est

$$x_2\,[x_1x_2 + f(x_1, x_3)] + ax_1^3 = 0,$$

où $f(x_1, x_3)$ est une forme du second degré et où 0 est le point $(0, 1, 0)$, l'équation des courbes C est

$$\lambda_0 x_1^3 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\,(x_1x_2 + f) = 0.$$

Faisons correspondre à ces courbes les plans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0.$$

On obtient une surface cubique F d'équation

$$X_0\,[X_1X_2 + f(X_1, X_3)] = X_1^3.$$

La surface F présente un point double conique $(1, 0, 0, 0)$ et un point double biplanaire $(0, 1, 0, 0)$. Elle oscule le plan $X_0 = 0$ le long de la droite $X_0 = X_1 = 0$ et touche le plan $X_1 = 0$ le long de la droite $X_1 = X_3 = 0$.

Soit γ' une conique touchant la courbe C_0 en trois points A_1, A_2, A_3. En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit qu'il existe une faisceau de sextiques irréductibles ayant des points doubles en A_1, A_2, A_2 et un point double en 0 auquel sont infiniment voisins successifs cinq points doubles (situés sur une conique).

Soient d'ailleurs u_0 l'argument du point 0 et u_1, u_2, u_3 ceux des points A_1, A_2, A_3 On a

$$6u_0 \equiv 0,\ 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 \equiv 0, \qquad \pmod{2\omega,\ 2\omega'}$$

et par conséquent

$$6u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 \equiv 0, \qquad \pmod{2\omega,\ 2\omega'}$$

sans que la moitié de cette somme soit congrue à zéro. Ce qui prouve que le faisceau obtenu est bien un faisceau de Halphen.

Liège, le 6 septembre 1969.