# SUR UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES

par Lucien Godeaux (Liége)

1. L'origine de cette note est la question élémentaire suivante: Considérons un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

rapporté à ses axes et deux tangentes

$$y = 0,\ z = c; \qquad x = 0,\ z = -c.$$

Le lieu des tangentes à l'ellipsoïde s'appuyant sur ces deux droites se compose de deux hyperboloïdes

$$2\frac{xy}{ab} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$2\frac{xy}{ab} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

La courbe de contact pour le premier hyperboloïde avec l'ellipsoïde est la conique située dans le plan

$$b\,x - a\,y = 0$$

et pour le second

$$b\,x + a\,y = 0.$$

Ces deux plans sont conjugués par rapport à l'ellipsoïde et partagent harmoniquement le couple de plans principaux passant par $Oz$.

On voit de plus que les génératrices du second mode de chacun des hyperboloïdes sont tangentes à l'ellipsoïde et s'appuyent sur les droites

$$x = 0,\ z = -c; \qquad y = 0,\ z = c.$$

Le fait que les coordonnées sont rectangulaires ne joue d'ailleurs aucun rôle et on pourrait évidemment supposer l'ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués quelconques.

Notre but dans cette note est d'établir un théorème analogue pour une quadrique quelconque, non conique, en utilisant uniquement les résultats établis, sans recourir à la notion de mesure, dans nos *Leçons de Géométrie projective* [1]).

2. Soient $Q$ une quadrique non conique;

$M, N$ deux de ses points tels que la droite $MN$ n'appartienne pas à la quadrique;

$\alpha$, $\beta$ deux plans conjugués passant par la droite $MN$;

$A$ le pôle de $\alpha$, situé dans $\beta$, $B$ celui de $\beta$, situés dans $\alpha$;

$a = BM$ la tangente à $Q$, située dans $\alpha$ et $b = AN$ la tangente à $Q$, située dans $\beta$.

Proposons-nous d'étudier le lieu des tangentes à la quadrique $Q$ s'appuyant sur les droites $a$ et $b$.

Menons par a un plan $\varrho$ coupant $b$ en $R$. Les tangentes à $Q$ situées dans $\varrho$ et passant par $R$ ont leurs points de contact dans le plan polaire $\varrho'$ de $R$ par rapport à $Q$. Le plan $\varrho'$ passe par la conjugée $b' = BN$ de $b = AN$ par rapport à $Q$. Les faisceaux de plans $(\varrho)$, d'axe $a$, et $(\varrho')$, d'axe $b'$, sont projectifs. Lorsque le plan $\varrho$ coïncide avec $\alpha$, $\varrho'$ coïncide avec le plan $ANB$, tangent à $Q$ en $N$. Lorsque le plan $\varrho$ coïncide avec le plan $AMB$, tangent à $Q$ en $M$, le point $R$ coïncide avec $A$ et le plan $\varrho'$ avec $\alpha$. Le lieu de la droite $\varrho\varrho'$ est donc un cône $Q_b$, de sommet $B$, tangent au plan $AMB$ le long de a et au plan $ANB$ le long de $b'$. Une droite $\varrho\varrho'$ coupe, par construction, en deux points la courbe $\gamma$ de contact de $Q$ avec le lieu cherché et cette courbe est donc l'intersection de $Q$ et de $Q_b$.

De même, il existe un cône $Q_a$, de sommet $A$, tangent au plan $AMB$ le long de $a' = AM$ et au plan $ANB$ le long de $b$, dont les génératrices s'appuyent en deux points sur la courbe $\gamma$.

Soit $P$ un point de la courbe $\gamma$ distinct de $M, N$. Le plan $PMN$ coupe $Q$, $Q_a$, $Q_b$ suivant des coniques passant par $M, N, P$ et tangentes en $M$ au plan $AMB$, en $N$ au plan $ANB$. Ces trois coniques coincident donc en une conique $\varphi$ qui fait partie de la courbe $\gamma$.

La droite $AP$ coupe $Q$ en un second point $P'$ qui appartient à la courbe $\gamma$ et le plan $MNP'$ coupe $Q$, $Q_a$, $Q_b$ suivant une seconde conique $\psi$ qui, avec $\varphi$, forme la courbe $\gamma$.

Les plan projetant les points de la conique $\varphi$ des droites $a, b$, engendrent deux faisceaux projectifs et par conséquent les tangentes à $Q$ aux points de $\varphi$, s'appuyant sur $a, b$, engendrent un hyperboloïde $H_1$. De même, les tangentes à $Q$ aux points de la conique $\psi$, s'appuyant sur $a, b$, engendrent un hyperboloïde $H_2$. La surface cherchée se compose donc des hyperboloïde $H_1$, $H_2$.

[1]) Paris, HERMANN et Liége, Thone, 1933.

3. Soient $P$ un point de la conique $\varphi$, $g_1$ la génératrice de $H_1$ passant par ce point. La conjuguée $g'_1$ de $g_1$ touche $Q$ en $P$ et s'appuie sur les conjuguées $a'$ de $a$ et $b'$ de $b$.

D'autre part, la droite $a'$, tangente en $M$ à $Q$, s'appuie sur a et $b$; elle appartient donc à $H_1$ (et de même à $H_2$). La droite $b'$ appartient également à $H_1$ (et à $H_2$). La droite $g'_1$ rencontre $H_1$ en trois points: $P$ et ses points d'appui sur $a'$, $b'$; elle appartient donc à $H_1$.

On voit donc que les deux systèmes de génératrices rectilignes de $H_1$ sont tangentes à $Q$ aux points de la conique $\varphi$, les génératrices du premier mode s'appuyant sur $a$, $b$; celles du second mode sur $a'$, $b'$.

L'hyperboloïde $H_2$ possède évidemment la propriété analogue.

Les hyperboloïdes $H_1$, $H_2$ ont en commun les quatre droites $a$, $b$, $a'$, $b'$.

Soient $M'$ le pôle du plan $\mu$ de la conique $\varphi$ et $\Omega_1$ l'homologie harmonique de centre $M'$ et de plan $\mu$. Cette homologie transforme $Q$ en elle-même. Le plan tangent à $Q$ en $P$ passe par $M'$ et est uni; dans ce plan, $\Omega_1$ détermine une homologie harmonique de centre $M'$, dont l'axe est la tangente à $\varphi$ située dans ce plan. Il en résulte que $\Omega_1$ fait se correspondre les droites $g_1$, $g'_1$. Par suite, $\Omega_1$ transforme l'hyperboloïde $H_1$ en lui-même, en échangeant les génératrices des deux modes.

A la droite $a$, $\Omega_1$ fait correspondre $a'$ et la droite $b$, $b'$. D'ailleurs, $M'$ appartient à la droite $AB$ et les points $A$, $B$ se correspondent dans $\Omega_1$.

A une droite $g_2$ de l'hyperboloïde $H_2$, s'appuyant sur $a$, $b$, $\Omega_1$ fait correspondre une tangente à $Q$, s'appuyant sur $a'$, $b'$. Cette tangente ne peut appartenir à $H_1$ et par suite appartient à $H_2$. Il en résulte que $H_2$ est transformé en soi par $\Omega_1$. Les points de contact de deux tangentes homologues sont en général distincts et doivent être homologues dans $\Omega_1$, par suite la droite que les joint passe par $M'$. Mais ces points de contact sont situés sur la conique $\psi$, donc le plan $\nu$ de cette conique passe par $M'$.

Il en résulte que les plans $\mu$, $\nu$ sont conjugués par rapport à $Q$.

Soient $\Omega_a$ l'homologie harmonique de centre $A$ et de plan $\alpha$, $\Omega_b$ l'homologie harmonique de centre $B$ et de plan $\beta$. Chacune de ces homologies transforme en soi chacune des quadriques $Q$, $Q_a$, $Q_b$. Puisqu'une droite passant par $A$ et s'appuyant que la conique $\varphi$ rencontre la conique $\psi$, $\Omega_a$ échange entre eux les plans $\mu$ de $\varphi$ et $\nu$ de $\psi$. Il en est de même de $\Omega_b$.

On en conclut que les plans $\mu$, $\nu$ partagent harmoniquement les plans $\alpha$, $\beta$.

*Etant donnés une quadrique non conique $Q$, deux points $M$, $N$ de cette quadrique tels que la droite $MN$ n'appartienne pas à la quadrique, $\alpha$, $\beta$ deux plans conjugués passant par $MN$, $a$ une tangente à $Q$ en $M$ située dans $\alpha$, $b$ une tangente à $Q$ en $N$ située dans $\beta$, le lieu des tangentes à $Q$ s'appuyant sur $a$ et $b$ est formé de deux hyperboloïdes $H_1$, $H_2$, respectivement circonscrits à $Q$ le long de deux coniques $\varphi$, $\psi$ situées dans des plans passant par $M$, $N$, conjugués par rapport à $Q$ et partageant harmoniquement les plans $\alpha$, $\beta$. Les génératrices des deux modes des hyperboloïdes $H_1$, $H_2$, touchent $Q$ le long de $\varphi$, $\psi$ respectivement et s'appuyent sur les conjuguées $a'$ de $a$ et $b'$ de $b$.*