GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

Sur certaines surfaces algébriques irrégulières,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

La surface qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique de genre non nul est irrégulière. Si la courbe envisagée contient une involution cyclique irrationnelle, il correspond à celle-ci, sur la surface, une involution irrationnelle. L'image de cette involution est une surface irrégulière.

Dans cette note, nous considérons une courbe L contenant une involution cyclique d'ordre premier p, ayant pour image une courbe L' de genre $\pi > 0$. La surface F représentant les couples de points de la courbe L contient une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, dont nous étudions l'image Φ. Nous montrons que la surface Φ a l'irrégularité π et nous construisons sur cette surface un système continu formé de ∞^π systèmes linéaires. Pour plus de simplicité, nous supposons que les courbes L, L' ne sont pas hyperelliptiques.

1. Soit L une courbe algébrique, non hyperelliptique, de genre Π, contenant une involution cyclique i_p, d'ordre p premier, dépourvue de points unis. Désignons par L' une courbe image de l'involution i_p, par π son genre et supposons que L' ne soit pas hyperelliptique. On a

$$\Pi - 1 = p\,(\pi - 1)$$

par la formule de Zeuthen.

Le système canonique $|G|$ de L est transformé en lui-même par la transformation birationnelle cyclique τ de L en elle-même, génératrice de l'involution i_p. Dans le système $|G|$ se trouve un système linéaire partiel, de dimension $\pi - 1$, transformé du système canonique $|G'|$ de L'. Il existe en outre un certain nombre d'autres systèmes linéaires partiels de $|G|$ composés au moyen de i_p. Soit $|G_1|$ un de ces systèmes; il lui correspond sur L' un système linéaire complet, d'ordre $2\pi - 2$, distinct du système canonique $|G'|$ et, par suite, de dimension $\pi - 2$. Soit λ le nombre des systèmes analogues à $|G_1|$. D'après la théorie des homographies, on a

$$\pi - 1 + \lambda(\pi - 2) + \lambda + 1 = \Pi - 1 + 1 = p(\pi - 1) + 1.$$

Par suite, $\lambda = p - 1$.

Prenons pour modèle projectif de L la courbe canonique d'ordre $2(\Pi - 1) = 2p(\pi - 1)$ située dans un espace linéaire $S_{p(\pi-1)}$ à $p(\pi - 1) = \Pi - 1$ dimensions. Sur cette courbe L, la transformation τ est engendrée par une homographie cyclique de période p, que nous désignerons encore par τ. Cette homographie possède p axes ponctuels que nous désignerons par $S^{(1)}_{\pi-1}, S^{(2)}_{\pi-2}, \ldots S^{(p)}_{\pi-2}$, le premier ayant la dimension $\pi - 1$, les autres la dimension $\pi - 2$. Ces axes ne rencontrent pas L.

2. Considérons la surface F représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L. Rappelons comment M. Severi (1) a construit le modèle canonique de la surface F. Considérons les droites de l'espace $S_{p(\pi-1)}$ et soit W la variété de Grassmann représentant ces droites dans un espace linéaire S_r à

$$r = \binom{\Pi}{2} - 1 = \frac{1}{2}[p(\pi - 1) + 1]p(\pi - 1) - 1$$

dimensions (2). Aux bisécantes de la courbe L correspondent sur W les points de la surface F, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques C.

(1) Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica. (*Atti di Torino*, 1902-1903.)

(2) Voir, par exemple, SEVERI, Sulla varietà che rappresenta gli spazî subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare. (*Annali di Matematica*, 1915, t. 24.)

Les invariants de la surface F sont (1)

$$p_g = \frac{1}{2} p(\pi - 1)[p(\pi - 1) + 1],$$

$$p_a = \frac{1}{2} p(\pi - 1)[p(\pi - 1) + 1] - [p(\pi - 1) + 1],$$

$$p^{(1)} = [p(\pi - 1) - 1][4p(\pi - 1) - 1].$$

Soit P un point de F représentant deux points P_1, P_2 de L. Si P'_1, P'_2 sont les points de cette courbe que τ fait correspondre à P_1, P_2, et P' le point de F représentant le couple P'_1, P'_2, le point P' correspond à P dans une transformation birationnelle T de F en elle-même. La transformation T a la période p et engendre, sur F, une involution I_p d'ordre p. Si $p = 2$, l'involution I_p possède une courbe unie, lieu des points images des couples de l'involution i_2. Nous supposerons $p > 2$; l'involution I_p est alors dépourvue de points unis.

3. La transformation T est déterminée par une homographie cyclique de l'espace S_r que nous désignerons encore par T. Nous allons recherc*h*er les axes ponctuels de cette homographie.

Commençons par observer que les images dans S_r des droites de l'axe $S^{(1)}_{\pi-1}$ de τ déterminent un espace linéaire à $\binom{\pi}{2} - 1$ dimensions, dont tous les points sont unis pour T. De même, à chacun des axes $S^{(2)}_{\pi-2}$, ..., $S^{(p)}_{\pi-2}$ de τ correspond un espace linéaire à $\binom{\pi-1}{2} - 1$ dimensions dont tous les points sont unis. De plus, aux droites qui s'appuient sur deux des axes de l'homographie τ correspondent des points unis de T; on obtient ainsi $p - 1$ espaces linéaires à $\pi(\pi - 1) - 1$ dimensions et $\binom{p-1}{2}$ espaces linéaires à $(\pi - 1)^2 - 1$ dimensions, dont tous les points sont unis pour T.

(1) SEVERI, *loc. cit.;* DE FRANCHIS, Sulle varieta ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica (*Rend. Palermo*, 1903, t. 17). Voir aussi l'important Mémoire de M. SEVERI, Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie. (*Mem. Torino*, 1903.)

Soit ε une racine primitive p — ième de l'unité. A chacun des axes de l'homographie τ, on peut attacher un des nombres $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}, \varepsilon^p = 1$. Il est alors facile de voir comment les espaces de points unis de T, appartenant à S_r, se groupent dans les axes ponctuels de l'homographie T.

L'espace contenant les images des droites de $S^{(1)}_{\pi-1}$ et $\frac{1}{2}(p-1)$ espaces représentant des droites s'appuyant sur des couples d'axes $S^{(2)}_{\pi-2}, \ldots, S^{(p)}_{\pi-2}$, deux couples n'ayant aucun espace commun, appartiennent à un même axe de T. Les espaces qui viennent d'être énumérés n'ayant deux à deux aucun point commun, l'axe de T, que nous désignerons par $S^{(1)}_{r_1}$, a la dimension

$$r_1 \geq \binom{\pi}{2} + \frac{1}{2}(p-1)(\pi-1)^2 - 1.$$

L'espace contenant les images des droites de $S^{(1)}_{\pi-2}$, un espace représentant les droites s'appuyant sur $S^{(1)}_{\pi-1}$ et sur un des espaces $S^{(3)}_{\pi-2}, \ldots, S^{(p)}_{\pi-2}$, enfin $\frac{1}{2}(p-3)$ espaces représentant les droites s'appuyant sur deux des espaces $S^{(3)}_{\pi-2}, \ldots, S^{(p)}_{\pi-2}$ appartiennent à un axe de T. Si l'on représente cet espace par $S^{(2)}_{r_2}$, sa dimension est

$$r_2 \geq \binom{\pi-1}{2} + \pi(\pi-1) + \frac{1}{2}(p-3)(\pi-1)^2 - 1.$$

Les $p-2$ autres axes ponctuels de T se forment d'une manière analogue. Si $r_3, \ldots, r_p$ sont les dimensions de ces espaces, on a

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_p + p = \frac{1}{2}p(\pi-1)[p(\pi-1)+1].$$

Il en résulte que l'on a

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_p = \frac{1}{2}(\pi-1)[p(\pi-1)+1] - 1.$$

Par suite, le système canonique $|C|$ de F contient p

systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p et ayant même dimension r_1.

4. Désignons par Φ une surface image de l'involution I_p. Le genre arithmétique π_a et le genre linéaire $\pi^{(1)}$ de cette surface sont donnés par (¹)

$$p(\pi_a + 1) = p_a + 1, \qquad p(\pi^{(1)} - 1) = p^{(1)} - 1;$$

d'où

$$\pi_a = \frac{1}{2}(\pi - 1)[p(\pi - 1) + 1] - \pi,$$

$$\pi^{(1)} = (\pi - 1)[4p(\pi - 1) - 5] + 1.$$

Le système canonique de Φ, certainement existant, correspond à l'un des systèmes partiels, appartenant au système canonique de F, composés au moyen de I_p. Il en résulte que le genre géométrique π_g de Φ est égal à

$$\pi_g = \frac{1}{2}(\pi - 1)[p(\pi - 1) + 1].$$

Par conséquent, *la surface Φ a l'irrégularité* $\pi_g - \pi_a = \pi$.

5. Soit F′ la surface représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L′. Cette surface a les genres

$$p'_g = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1), \quad p'_a = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \pi, \quad p'^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

Les courbes canoniques C′ de F′ représentent les couples de points des séries linéaires simplement infinies tirées de la série canonique de L′.

Considérons un point P′ de F′ et soient P'_1, P'_2 les points de la courbe L′ qu'il représente. Aux points P'_1, P'_2 correspondent, sur la courbe L, deux groupes de p points $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1p}$ et $P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2p}$. Soit P_i le point de la surface F qui représente le couple P_{1i}, P_{2i}. Nous avons ainsi établi entre F′ et F

(¹) Voir SEVERI, Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica (*Rend. Lomb.*, 1903). Pour le cas particulier envisagé ici, voir également notre travail : Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. (*Bull. Soc. Math. France*, 1919.)

une correspondance $(1, p^2)$, déterminant, sur la surface F, une involution J d'ordre p^2, dont F′ est l'image.

Tout groupe de l'involution J est, de par sa construction, transformé en lui-même par T et, précisément, chaque groupe de J est formé de p groupes de l'involution I_p. Aux groupes de J correspondent donc, sur Φ, des groupes de p points formant une involution J'_p, d'ordre p, dont F′ est l'image.

Pour qu'un point P de F soit uni pour l'involution J, il faut que les points $P_{11}, \ldots, P_{1p}, P_{21}, \ldots, P_{2p}$ ne soient pas tous distincts. Comme l'involution i_p est dépourvue de points unis, cela ne pourra se produire que si les groupes $P_{11}, \ldots, P_{1p}$ et $P_{21}, \ldots, P_{2p}$ coïncident, c'est-à-dire si les points P'_1, P'_2 de la courbe L′ coïncident. Le point P′ de F′ appartiendra alors à la courbe Λ' de cette surface qui représente les couples de points L′ formés de deux points coïncidents. Sur F, il y aura $p + \frac{1}{2}p(p-1)$ points distincts formant un groupe de J. Il y aura p de ces points appartenant à la courbe Λ de F représentant les couples de L formés de deux points coïncidents; ils ne peuvent être des points unis de J; les $\frac{1}{2}p(p-1)$ autres points seront des points unis ordinaires de J. Ces $\frac{1}{2}p(p-1)$ points forment $\frac{1}{2}(p-1)$ groupes de l'involution I_p et appartiennent à la courbe Λ_1 qui représente les couples de points de la série γ_p de L formée des groupes de p points qui correspondent aux points de L′. A un point de Λ_1 correspond un point de L′ et à un point de L′ correspondent $\frac{1}{2}p(p-1)$ points toujours distincts de Λ_1; par suite, cette courbe est de genre $\frac{1}{2}p(p-)(\pi-1)+1$. La courbe Λ_1 ne rencontre pas la courbe Λ.

A la courbe Λ correspond, sur Φ, une courbe Λ^* de genre π. A la courbe Λ_1 correspond, sur Φ, une courbe Λ_1^* de genre $\frac{1}{2}(p-1)(\pi-1)+1$. A la courbe Λ' de F′ correspond sur Φ la courbe $\Lambda^* + 2\Lambda_1^*$, la courbe Λ_1^* étant la courbe unie de l'involution J'_p.

Le système canonique de Φ est le transformé du système canonique $|C'|$ de F', augmenté de la courbe unie de J'_p.

6. Aux ∞^π séries linéaires d'ordre $2\pi - 2$ de la courbe L' correspondent, sur L, ∞^π séries linéaires d'ordre $2p(\pi - 1)$ de L. Parmi ces séries se trouve la série canonique de L. Soit $|G_1|$ une des séries en question, de L, qui ne soit pas la série canonique. Sa dimension est $p(\pi - 1) - 1$ et elle est transformée en elle-même par τ. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut pour la série canonique de L montre que la série $|G_1|$ contient p séries linéaires partielles composées au moyen de l'involution i_p, chacune de ces séries partielles ayant la dimension $\pi - 2$.

Aux séries simplement infinies appartenant à $|G_1|$ correspondent, sur F, des courbes paracanoniques C_1, de genre $p^{(1)}$, formant un système linéaire $|C_1|$, de degré $p^{(1)} - 1$ et de dimension

$$\frac{1}{2}\binom{\Pi - 1}{2} - 1 = \frac{1}{2}p(\pi - 1)[p(\pi - 1) - 1] - 1.$$

En répétant un raisonnement analogue à celui qui a été fait sur le système canonique $|C|$, on voit que $|C_1|$, qui est transformé en lui-même par T, contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p; chacun de ces systèmes a la dimension

$$\frac{1}{2}(\pi - 1)[p(\pi - 1) - 1] - 1.$$

A chacun de ces systèmes correspond sur Φ un système linéaire de courbes de genre $\pi^{(1)}$ et de degré $\pi^{(1)} - 1$.

Sur la surface F, on a une famille continue ∞^π de systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T et comprenant le système canonique $|C|$. Il lui correspond, sur Φ, un système continu ∞^π de systèmes linéaires comprenant le système canonique. Ce système contiuu est nécessairement complet.

Liége, le 26 juin 1933.