COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur les surfaces algébriques irrégulières,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Nous nous sommes proposé d'étudier, par les méthodes algébrico-géométriques, les surfaces algébriques d'irrégularité $q > 0$ contenant un système de courbes de genre inférieur à q. L'instrument que nous utilisons dans nos recherches est un théorème de M. Severi (1) sur l'équivalence linéaire des courbes tracées sur une surface, dont voici l'énoncé.

Sur une surface algébrique F, deux courbes C_1, C_2 découpant des groupes linéairement équivalents sur les courbes d'un système algébrique Σ, ∞^1, sont linéairement équivalentes ou diffèrent par des courbes fondamentales du système Σ.

Naturellement, nous utilisons également les recherches fondamentales de M. Castelnuovo sur les systèmes continus de courbes tracées sur une surface irrégulière (2).

(1) Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, 1906, sér. 3, t. XII, pp. 55-79) ; *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti Istituto Veneto, 1905-1906, pp. 625-643) ; *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche.* (Rome, Éditions Cremonese, 1942).

(2) Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenanti ad una superficie irregolare* (Rendiconti Accad. Lincei, 2e sem. 1905, pp. 545-556, 593-598, 655-663) ; *Opere Scelte* (Bologne, Zanichelli, 1937, pp. 473-500). Voir aussi, sur cette question : B. Segre, *Un teorema fondamentale della Geometria sulle superficie algebriche ed il principio di sperramento* (Annali di Matematico, 1938, sér. 4, t. XVII, pp. 107-126) ; F. Severi, *Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica* (Annali di Matematica, 1944, sér. 4, t. XXIII, pp. 149-191). On trouvera dans ce dernier mémoire les indications relatives à d'autres travaux de M. Severi sur le même objet.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$. Supposons qu'elle contienne une courbe K, irréductible, de genre $\pi < q$. Nous supposerons $\pi > 0$.

Considérons, sur la surface F, un système continu complet $\{C\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires $|C|$, irréductibles et soit m le nombre de points communs à une courbe C et à la courbe K. On peut supposer que les séries linéaires d'ordre m sur la courbe K sont non spéciales ; s'il en était autrement, il suffirait de remplacer $\{C\}$ par un de ses multiples d'ordre convenablement choisi.

Sur la courbe K, les systèmes linéaires $|C|$ de $\{C\}$ découpent des séries linéaires d'ordre m ; celles-ci sont en nombre ∞^π. Supposons qu'il y en ait exactement $\infty^{\pi-\delta}$ $(\delta \geqslant 0)$ qui soient effectivement découpées par les systèmes $|C|$ de $\{C\}$. Il y a alors $\infty^{q-\pi+\delta}$ systèmes linéaires $|C|$ qui découpent sur K une de ces $\infty^{q-\pi+\delta}$ séries linéaires.

Supposons que la courbe K appartienne à un système continu Σ, simplement infini qui ne soit pas un faisceau irrationnel et fixons l'attention sur un système continu $\{C_0\}$, compris dans $\{C\}$, formé de $\infty^{q-\pi+\delta}$ systèmes linéaires $|C|$ découpant sur la courbe K la même série linéaire.

Soient C_{01}, C_{02} deux courbes irréductibles de $\{C_0\}$ n'appartenant pas à un même système linéaire. D'après le critère d'équivalence de M. Severi rappelé plus haut, les courbes C_{01}, C_{02} augmentées de courbes fondamentales du système Σ, donnent des courbes équivalentes.

Le système Σ possède un nombre fini de courbes fondamentales ; soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ ces courbes. Nous aurons donc

$$C_{01} + \Gamma_1 \equiv C_{02} + \Gamma_2,$$

où Γ_1, Γ_2 sont certaines combinaisons des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$.

Faisons varier d'une manière continue la courbe C_{02} dans $\{C_0\}$ de manière que le système linéaire $|C_{02}|$ varie. Mais la courbe Γ_2, formée d'une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$, ne peut varier d'une manière continue. Il en résulte que l'on trouvera certainement, dans $\{C_0\}$, un système linéaire $|C'_{02}|$, distinct de $|C_{02}|$, tel que l'on aura

$$C'_{02} + \Gamma_2 \equiv C_{02} + \Gamma_2.$$

Mais cela est absurde, car alors, les systèmes linéaires $|C_{02}|$, $|C'_{02}|$ coïncideraient, contrairement à l'hypothèse.

Sur une surface irrégulière, d'irrégularité q, *une courbe de genre inférieur à* q *ne peut appartenir à un système continu qui ne soit pas un faisceau irrationnel.*

2. Supposons maintenant que la courbe K appartienne à un faisceau irrationnel $\{K\}$.

Reprenons le raisonnement précédent. Les courbes C_{01}, C_{02}, qui découpent sur les courbes K des groupes équivalents mais qui ne sont pas linéairement équivalentes, appartiennent à un même système linéaire lorsqu'elles sont augmentées de certaines courbes fondamentales du faisceau $\{K\}$. Actuellement, les courbes fondamentales de $\{K\}$ sont les courbes K elles-mêmes et des courbes qui font partie de courbes K dégénérées. Ces dernières courbes sont en nombre fini et nous représenterons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ leurs composantes. Cela étant, nous pourrons écrire

$$C_{01} + H_1 \equiv C_{02} + H_2 + \Gamma,$$

où H_1, H_2 sont des courbes formées de courbes K et Γ une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs ou négatifs, des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$.

Faisons varier C_{02} d'une manière ontinue dans $\{C_0\}$ de manière que $|C_{02}|$ varie. La courbe Γ ne peut varier d'une manière continue et il existera certainement un système $|C'_{02}|$ de $\{C_0\}$ tel que

$$C'_{02} + H'_2 + \Gamma \equiv C_{02} + H_2 + \Gamma,$$

où H'_2 est une courbe composée de courbes K.

On en conclut que l'on a

$$C_{01} + H_1 \equiv C_{02} + H_2 \equiv C'_{02} + H'_2,$$

c'est-à-dire des courbes de $\{C_0\}$, non linéairement équivalentes, augmentées chacune d'un certain nombre de courbes du faisceau $\{K\}$, donnent des courbes linéairement équivalentes.

Reprenons la relation fonctionnelle

$$C_{01} + H_1 \equiv C_{02} + H_2.$$

Les courbes C_{01}, C_{02} ayant le même ordre, les courbes H_1 et H_2 se composent du même nombre de courbes K. De plus, puisque $|C_{01}|$ et $|C_{02}|$ ne sont pas identiques, les courbes H_1, H_2 ne peuvent être linéairement équivalentes.

Le système $|C_{01}|$ étant fixé, faisons décrire à $|C_{02}|$ le système $\{ C_0 \}$; la courbe H_1 varie ou reste fixe, mais la courbe H_2 varie certainement et occupe $\infty^{q-\pi+\delta}$ positions. En d'autres termes, il existe $\infty^{q-\pi+\delta}$ séries linéaires $|H|$, formant un système continu $\{ H \}$, dans le faisceau $\{ K \}$.

Observons d'ailleurs que si $|C_0'|$, $|C_0''|$ sont deux systèmes linéaires quelconques de $\{C_0\}$ et H', H'' deux séries quelconques de $\{ H \}$, on ne peut avoir

$$C_0' + H' \equiv C_0'' + H''$$

que si $|H'|$ et $|H''|$ sont distinctes.

3. On peut recommencer le raisonnement précédent en partant d'un système continu $\{ C_1 \}$ compris dans $\{ C \}$ et dont les courbes découpent sur les courbes K des groupes d'une même série linéaire. Mais on parviendra au même système $\{ H \}$ que dans le premier cas.

Observons que les systèmes linéaires $|C + H|$ sont en nombre ∞^q au plus. Considérons alors un système linéaire $|C_0|$ quelconque de $\{ C_0 \}$ et un système linéaire $|C_1|$ quelconque de $\{ C_1 \}$. Supposons qu'il puisse exister deux séries linéaires $|H_0|$, $|H_1|$ de $\{ H \}$ telle que l'on ait

$$|C_0 + H_0| = |C_1 + H_1|.$$

Alors, les courbes C_0, C_1 découperaient, sur les courbes K, des groupes équivalents, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte qu'en combinant de toutes les manières possibles, $\infty^{\pi-\delta}$ systèmes linéaires de $\{C\}$ découpant sur les courbes K des séries linéaires distinctes, avec les $\infty^{q-\pi+\delta}$ séries linéaires de $\{ H \}$, on obtient ∞^q systèmes linéaires $|C + H|$.

Cela étant, dans le faisceau $\{ K \}$, conçu comme lieu de ses courbes, on a $\infty^{q-\pi+\delta}$ séries linéaires $|H|$ distinctes, de même ordre. Par conséquent, le genre π' du faisceau $\{ K \}$ satisfait à l'inégalité

$$\pi' \geqslant q - \pi + \delta.$$

Si une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$ *contient une courbe* K *de genre* $\pi < q$, *cette courbe est isolée ou appartient à un faisceau irrationnel.*

4. Soient V_q la variété de Picard attachée à la surface F et G le groupe transitif, ∞^q, de transformations birationnelles de V_q en soi. Les points de V_q représentent les systèmes linéaires $|C|$ de $\{C\}$.

Aux systèmes linéaires de $\{C_0\}$ correspondent sur V_q les points d'une variété $W_{q-\pi+\delta}$ à $q - \pi + \delta$ dimensions et on a, sur V_q, $\infty^{\pi-\delta}$ variétés analogues, formant une congruence linéaire. Il existe par conséquent, sur V_q, une seconde congruence linéaire formées de $\infty^{q-\pi+\delta}$ variétés $W_{\pi-\delta}$ à $\pi - \delta$ dimensions. Les variétés $W_{q-\pi+\delta}$ et $W_{\pi-\delta}$ se coupent en un nombre fini de points. On sait que les deux congruences constituent des systèmes d'imprimitivité du groupe G.

Appelons G′ le sous-groupe algébrique du groupe G formé des transformations laissant invariantes les variétés $W_{\pi-\delta}$ et G″ le sous-groupe algébrique de G laissant invariantes les variétés $W_{q-\pi+\delta}$.

Envisageons une courbe K et les séries linéaires d'ordre m appartenant à cette courbe. Il existe un groupe G_π, ∞^π, de transformations birationnelles entre ces séries. Aux transformations du groupe G″, sous-groupe de G, correspondent des transformations entre les systèmes $\{C_0\}$, $\{C_1\}$, ... qui déterminent sur K des transformations entre les séries d'ordre m. Le groupe G″ détermine donc sur K, si $\delta > 0$, un sous-groupe de G_π, et, si $\delta = 0$, le groupe G_π. Au groupe G_π correspond, sur la variété de Jacobi Ω attachée à la courbe K considérée, un groupe qui, si $\delta > 0$, possède des systèmes d'imprimitivité formés de congruences, l'une de ∞^δ variétés à $\pi - \delta$ dimensions, l'autre de $\infty^{\pi-\delta}$ variétés à δ dimensions.

Envisageons maintenant les transformations du sous-groupe G′ ; il leur correspond sur F des transformations biunivoques entre les systèmes linéaires du système continu $\{C_0\}$. Comme nous l'avons vu, à chaque système linéaire contenu dans $\{C_0\}$, on associe une série linéaire $|H|$ de $\{H\}$. Il en résulte qu'au sous-groupe G′ correspond un groupe de transformations biunivoques entre les séries linéaires de $\{ H \}$. Désignons par $G'_{q-\pi+\delta}$ ce groupe.

Soit Ω' la variété de Jacobi attachée au faisceau $\{ K \}$ considéré comme lieu de ses courbes. Désignons par $G_{\pi'}$ le groupe des transformations birationnelles de Ω' en soi. Au groupe $G'_{q-\pi+\delta}$ correspond un sous-groupe de $G_{\pi'}$, si

$$\pi' > q - \pi + \delta$$

et le groupe $G_{\pi'}$, si cette inégalité est remplacée par une égalité. En d'autres termes, dans le premier cas, $G'_{q-\pi+\delta}$ donne lieu à des systèmes d'imprimitivité pour le groupe $G_{\pi'}$, systèmes constitués par des congruences linéaires l'une de $\infty^{q-\pi+\delta}$ variétés de dimension $\pi' - (q - \pi + \delta)$, l'autre de $\infty^{\pi'-q+\pi-\delta}$ variétés à $q - \pi + \delta$ dimensions.

Nous espérons pouvoir revenir sur cette question.

Liège, le 12 avril 1949.