GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Seconde communication*)

Dans la première note (1), nous avons considéré les points unis de première espèce d'une involution cyclique appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Dans cette seconde note, nous commençons l'étude des points unis de seconde espèce. La question est beaucoup plus complexe et nécessitera l'étude des droites unies isolées des involutions considérées. Nous établissons le théorème suivant :

Si une variété algébrique à trois dimensions contient une involution cyclique d'ordre premier $p = 2\nu + 1$, *possédant un point uni de seconde espèce, on peut prendre comme image de cette involution une variété normale à trois dimensions sur laquelle le point de diramation correspondant peut être un point multiple d'ordre* $2\nu(\nu + 1) + 1$, *le cône tangent en ce point à la variété étant formé d'un espace linéaire à trois dimensions et d'un cône rationnel à trois dimensions d'ordre* $2\nu(\nu + 1)$, *rencontrant l'espace tangent suivant un plan.*

Dans les notes suivantes, nous considérerons les autres cas.

Nous utilisons, dans ce travail, les résultats que nous avons obtenus récemment sur la structure des points

(1) Bull. de l'Acad. de Belgique, 1948, pp. 419-425.

unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique [1].

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, normale, dans un espace S_r, à r dimensions, transformée en elle-même par une homographie H, de période p, possédant p axes ponctuels $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$, de dimensions $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$. On a donc

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{p-1} + p = r + 1.$$

Nous poserons $p = 2\nu + 1$ et supposerons p premier. Nous supposerons de plus que seul l'axe $S^{(0)}$ rencontre la variété V, en un nombre fini de points. Dans ces conditions, l'homographie H détermine sur V une involution I_p, d'ordre p, ne possédant qu'un nombre fini de points unis : les points de rencontre de V avec l'axe $S^{(0)}$.

A chacun des axes de l'homographie H, nous avons attaché une racine de l'unité. Si ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous attachons aux axes $S^{(0)}$, $S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$ respectivement les racines $1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$.

Nous désignons par Σ_i le système d'hyperplans, unis pour H, passant par les axes de l'homographie H, l'axe $S^{(i)}$ excepté. Le système des sections hyperplanes de V sera désigné par $|F|$. Les systèmes d'hyperplans Σ_0, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ découpent respectivement sur V des systèmes linéaires $|F_0|, |F_1|, \ldots, |F_{p-1}|$, appartenant à l'involution I_p. Le premier, $|F_0|$, est dépourvu de points-base, mais les autres ont pour points-base les points unis de l'involution I_p.

En rapportant projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, il corres-

[1] BULL. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1918, pp. 206-228, 288-300. Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* (Paris, Hermann, 1935).

pond à V une variété à trois dimensions Ω, image de l'involution I_p.

Aux systèmes linéaires $|F_0|$, $|F_1|, \ldots, |F_{p-1}|$ correspondent sur Ω des systèmes linéaires complets $|\Phi_0|$, $|\Phi_1|, \ldots, |\Phi_{p-1}|$. Le premier est le système des sections hyperplanes de Ω.

2. Soit A un point uni de l'involution I_p ; supposons qu'il soit de seconde espèce. L'espace tangent S_3 à la variété V en A rencontre au seul point A l'espace $S^{(0)}$; il s'appuie en un point sur un des axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}, \ldots$, $S^{(p-1)}$ et suivant une droite sur un autre de ces espaces. Nous pouvons supposer, quitte à changer nos notations, que l'espace S_3 s'appuie suivant une droite sur l'espace $S^{(1)}$; nous désignerons par σ le plan passant par A et par la droite d'appui. Soit alors $S^{(\alpha)}$, où $\alpha > 1$, l'espace sur lequel S_3 s'appuie en un point ; nous désignerons par s la droite joignant A au point d'appui.

Dans la gerbe de sommet A de l'espace S_3, H détermine une homologie d'axe s et de plan σ.

Désignons par A_1 le point infiniment voisin de A sur la droite s et par a la droite infiniment voisine de A dans le plan σ.

Projetons la variété V de A sur un hyperplan de Σ_0 ne passant pas par A ; nous obtenons une variété V' sur laquelle au point A_1 correspond un point que nous continuerons à désigner par A_1. De même, à la droite a correspond une droite que nous désignerons encore par a. Au domaine du point A correspond sur V' le plan A_1a. A l'involution I_p correspond sur V' une involution I'_p engendrée par H.

Dans le plan A_1a, l'homographie H détermine une homologie de centre A_1 et d'axe a.

L'espace S'_3, tangent à V' en A_1, contient le plan A_1a. Cet espace S'_3 est uni pour H et dans la gerbe de sommet A_1 appartenant à cet espace, H détermine soit une homologie de plan A_1a, soit l'identité. Par conséquent, pour l'involution I'_p, le point A_1 est un point uni de seconde espèce, ou de première espèce.

Considérons maintenant un point P de la droite a et soit S''_3 l'espace tangent à V' en ce point. L'espace S''_3 contient le plan A_1a, mais les droites passant par P et situées dans ce plan ne sont pas en général unies pour H. Seules, les droites a et A_1P sont unies. Il en résulte que le point P ne peut être uni de première espèce pour l'involution I'_p ; il est uni de seconde ou de troisième espèce. Si le point P est uni de seconde espèce, H détermine dans la gerbe de sommet P appartenant à S''_3 une homologie dont l'axe est PA_1 et le plan, un plan passant par a.

3. Revenons à la variété V et considérons les surfaces F_α. Les hyperplans de Σ_α ne contiennent pas l'espace tangent S_3 en A et coupent celui-ci suivant le plan σ. Les surfaces F_α ont un point simple en A et touchent en ce point le plan σ. Toutes les droites du faisceau (A, α) étant unies pour H, l'involution I_p détermine sur une surface F_α une involution dont A est un point uni parfait. Un point quelconque de la droite a est donc uni de seconde espèce pour l'involution I_p. En d'autres termes, le point P considéré plus haut, est uni de seconde espèce pour l'involution I'_p sur la variété V' (1).

Les hyperplans de Σ_1 coupent le plan σ suivant une droite, donc les surfaces F_1 ont un point simple en A, le plan tangent à une de ces surfaces passant par la droite s et coupant le plan σ suivant une droite qui sera désignée par s_o.

Sur une surface F_1, l'involution I_p détermine une

(1) Il convient cependant de remarquer que notre classification des points unis concerne les points unis isolés. Sur V', P n'est pas un point uni isolé, mais appartient à la droite a, dont tous les points sont unis pour I'_p.

involution d'ordre p dont A est un point uni. On peut à priori faire toutes les hypothèses possibles sur la structure du point uni A pour cette involution superficielle. Nous ferons ici l'hypothèse que le point infiniment voisin de A situé sur la droite s_0 est uni parfait pour l'involution considérée. Mais comme nous le montrerons à la fin de cette note, d'autres hypothèses peuvent être faites.

Sous l'hypothèse qui vient d'être faite, l'homographie H détermine, dans le plan tangent à une surface F_1 en A, une homographie qui peut être représentée par

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^a x_3 , \tag{1}$$

le point A ayant pour coordonnées (1, 0, 0), la droite s ayant pour équation $x_2 = 0$ et la droite s_0, $x_3 = 0$. En effectuant la transformation quadratique

$$y_i : y_2 : y_3 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_1 x_3 ,$$

il correspond au point infiniment voisin de A sur s_0 le point $y_2 = y_3 = 0$, de sorte qu'à l'homographie (1) doit correspondre une homologie de centre $y_2 = y_3 = 0$. Or, à (1) correspond l'homographie

$$y_1' : y_2' : y_3' = y_1 : \epsilon y_2 : \epsilon^{a-1} y_3.$$

On doit donc avoir $a = 2$. La droite s s'appuie donc sur l'axe $S^{(2)}$.

4. Désignons par F_0' les surfaces F_0 passant par le point A.

Sur une surface F_1, les surfaces F_0' découpent des courbes ayant en A la multiplicité $\nu + 1$. Ces courbes ont ν tangentes confondues avec s_0 et le point infiniment voisin de A sur s_0 est multiple d'ordre ν pour les courbes. Celles-ci ont une tangente confondue avec s et il existe une suite de ν points fixes sur F_1, infiniment voisins successifs de A, unis pour I_p, dont le premier est A_1 et le dernier est uni parfait pour I_p. Nous désignerons les points de cette suite par A_1, $A_2 \ldots$, A_ν.

Sur une surface F_2, où le point A est uni parfait pour l'involution déterminée par I_p, les surfaces F'_0 découpent des courbes ayant la multiplicité p en A et p tangentes variables.

En considérant une surface F'_0 et en faisant varier la surface F_1, on voit que les surfaces F'_0 ont en A la multiplicité $\nu + 1$ et passent ν fois par la droite a, infiniment voisine de A dans σ. De plus, les surfaces F'_0 rencontrent le plan σ suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p, à tangentes variables, en A.

Le cône tangent en A à une surface F'_0 se compose du plan σ compté ν fois et d'un plan σ_0, passant par s, variable avec la surface. Si l'on considère l'intersection d'une surface F'_0 et des surfaces F_1, on voit qu'il existe dans ce plan une suite de $\nu - 1$ points A_2, $A_3, \ldots$, A_ν, unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A_1 (situé sur s). Lorsque la surface F'_0 varie, cette suite de points engendre une nappe formée de $\nu - 1$ courbes infiniment voisines successives de A_1, lieux des points A_2, $A_3, \ldots$, A_ν. Nous désignerons cette nappe par $\mathcal{N}$.

On voit donc que le point A possède, dans son voisinage, une droite unie a dans le plan σ et une suite de $\nu - 1$ courbes infiniment voisines successives de A_1, formant la nappe $\mathcal{N}$.

Il convient d'observer que la singularité en A des surfaces F'_0 peut effectivement exister. Supposons une surface de l'espace ordinaire, d'équation

$$\begin{aligned} y^\nu \phi_1 + y^{\nu-1} \phi_3 + \ldots + y^{\nu-i} \phi_{2i+1} + \ldots \\ + y\phi_{2\nu-1} + \phi_{2\nu+1} + \ldots = 0 \,, \end{aligned}$$

où ϕ_1, ϕ_3, ... sont des polynomes homologues en x, y, z dont le degré est indiqué par l'indice, les termes non écrits étant de degré $2\nu + 2$ au moins en x, y, z.

Opérons la transformation

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z'.$$

On obtient une surface d'équation (on supprime les accents pour simplifier l'écriture)

$$\begin{aligned} y^\nu \phi_1 (x, y, 1) + y^{\nu-1} z \phi_3 (x, y, 1) + \ldots \\ + y z^{\nu-1} \phi_{2\nu-1} (x, y, 1) \\ + z^\nu \phi_{2\nu+1} (x, y, 1) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Cette surface admet la droite $y = z = 0$ multiple d'ordre ν.

D'autre part, la surface primitive est coupée par le plan $y = 0$ suivant la courbe

$$\phi_{2\nu+1} \ (x, \ 0, \ z) = 0 \,,$$

qui possède bien un point multiple d'ordre $p = 2\nu + 1$ à l'origine.

5. Considérons les surfaces F_3. Elles découpent, sur une surface F_1, des courbes ayant un point double en A, les tangentes étant s et s_0. On en conclut que les surfaces F_3 ont un point double biplanaire en A, un des plans tangents étant le plan σ et le second, un plan, variable avec la surface, passant par s. Il en résulte que sur les surfaces F_2, les surfaces F_3 découpent des courbes ayant un point triple, à tangentes variables, en A.

Les surfaces F_4 découpent, sur une surface F_1, des courbes ayant un point double en A et un point double infiniment voisin sur la droite s_0, c'est-à-dire sur a. Par conséquent, les surfaces F_4 ont un tacnode en A, le plan tangent étant σ ; la droite a est donc double pour ces surfaces. Sur les surfaces F_2, les surfaces F_4 découpent des courbes ayant un point quadruple, à tangentes variables, en A.

Considérons plus généralement les surfaces F_{2k}, où $k \leqslant \nu$. Ces surfaces découpent, sur une surface F_1, des courbes ayant un point multiple d'ordre k en A, le point infiniment voisin de A sur s_0 ayant également la multiplicité k. Il en résulte que les surfaces F_{2k} ont en A un point multiple uniplanaire d'ordre k, le plan tangent étant σ et la droite a étant multiple d'ordre k pour les surfaces. Sur une surface F_2, les surfaces F_{2k} découpant des courbes ayant la multiplicité $2k$ en A et des tangentes variables en ce point.

Considérons ensuite les surfaces F_{2k+1}, où $k < \nu$. Ces surfaces découpent, sur une surface F_1, des courbes ayant la multiplicité $k+1$ en A, le point infiniment voisin de A sur s_0 étant multiple d'ordre k. Les tangentes à une de ces courbes en A sont la droite s et la droite s_0, cette dernière comptée k fois. Il en résulte que les surfaces F_{2k+1} ont la multiplicité $k+1$ en A, le cône tangent étant formé du plan σ compté k fois et d'un plan, variable avec la surface, passant par s. Les surfaces F_{2k+1} rencontrent les surfaces F_2 suivant des courbes ayant la multiplicité $2k+1$ et des tangentes variables en A.

Remarquons que les surfaces F_2 se rencontrent suivant des courbes ayant un point double, à tangentes variables, en A.

6. Désignons par A' le point de diramation de la variété Ω, homologue du point uni A de l'involution I_p. Ce point est singulier pour Ω.

Nous avons désigné par Φ_0 les sections hyperplanes de Ω, c'est-à-dire les surfaces qui correspondent aux surfaces F_0 de V. Soient Φ_0' les surfaces qui correspondent aux surfaces F_0'' ; ce sont les surfaces découpées sur Ω par les hyperplans passant par A'.

Considérons deux surfaces F_0' et soit C la courbe qu'elles ont en commun. Une branche de cette courbe C est tangente en A à la droite s et est tracée sur la nappe $\mathcal{N}$; elle possède ν points simples infiniment voisins successifs de A, unis pour I_p, sur cette nappe : le premier est A_1 et le dernier A_ν, est uni parfait pour l'involution déterminée par I_p sur toutes les surfaces F_1 qui le contiennent. Le point A_ν est donc uni de première espèce pour I_p.

Les autres branches de la courbe C d'origine A sont tangentes en ce point au plan σ et, comme nous le montrerons plus loin, sont au nombre de $2\nu(\nu+1)$. La courbe C rencontre donc la droite unie a en $2\nu(\nu+1)$ points.

Les hyperplans découpant sur Ω les surfaces Φ'_0 homologues des surfaces F'_0 considérées, ont en commun un espace linéaire à $r_0 - 2$ dimensions ; coupant Ω suivant une courbe Γ homologue de C, à chacun des $2\nu(\nu+1)+1$ points unis parfaits du domaine de A appartenant à C, correspond sur Γ un point infiniment voisin de A'. On en conclut que le point de diramation A' est multiple d'ordre $2\nu(\nu+1)+1$ pour Ω.

Le cône tangent à la variété Ω au point A' se décompose en un espace linéaire à trois dimensions ω_0 ; cette partie du cône correspond aux points A_ν situés sur les différentes courbes C obtenues en faisant varier les surfaces F'_0 considérées dans $|F'_0|$. Cette partie du cône correspond donc à la nappe $\mathcal{N}$.

L'autre partie du cône tangent correspond à la droite a et est un cône d'ordre $2\nu(\nu+1)$. Nous le désignerons par ω.

Une surface Φ_1, homologue d'une surface F_1, possède, en A' un point multiple d'ordre $\nu+1$, le cône tangent étant formé d'un plan, qui appartient à ω_0 et d'un cône γ_ν, d'ordre ν, qui appartient au cône ω. Le plan et le cône γ_ν ont en commun une droite appartenant donc à l'intersection de ω_0 et de ω.

Une surface Φ_2, homologue d'une surface F_2, a en A' un point multiple d'ordre p, à cône tangent irréductible γ_p, appartenant à ω.

Les cônes γ_ν, γ_p sont normaux et rationnels.

7. Projetons la variété Ω du point A′ sur un hyperplan ne passant pas par ce point. Nous obtenons une variété Ω' sur laquelle, au domaine du point A′, correspondent un plan ω_0', découpé par ω_0 et une surface ω', d'ordre $2\nu(\nu+1)$, découpée par le cône ω.

Les cônes γ_ν, γ_p découpent, sur la surface ω_1, des courbes γ_ν', γ_p' d'ordre respectifs ν, p, rationnelles et normales.

Observons que deux surfaces F_1, F_2 se coupent en général suivant une courbe ayant un point simple en A, la tangente appartenant au plan σ. Au point infiniment voisin de A sur cette courbe correspond un point de ω' commun aux courbes γ_ν', γ_p' correspondant aux deux surfaces considérées. Les courbes γ_ν', γ_p' forment donc deux familles de courbes rationnelles unisécantes et la surface ω' est donc rationnelle. Il en est de même du cône ω.

Considérons une surface F_0' ; elle possède un point multiple d'ordre $\nu+1$ en A, le cône tangent étant formé du plan σ compté ν fois et d'un plan σ_0 passant par s. Les groupes de I_p, formés de points non unis infiniment voisins de A sur F_0', sont représentés par un point commun au plan ω_0' et à la surface ω'. On en conclut que le plan ω_0' et la surface ω' ont en commun une droite.

En d'autres termes, le cône ω et l'espace ω_0, tangents à Ω' en A ont en commun un plan.

8. Nous avons admis plus haut que deux surfaces F_0' ont en commun une courbe C dont $2\nu(\nu+1)$ branches d'origine A étaient tangentes en ce point au plan σ. Pour établir ce fait, projetons ces surfaces sur un espace linéaire à trois dimensions ; elles ont alors des équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\nu} y^{\nu-i}\phi_{2i+1}(x,\ y,\ z) + \ldots = 0\,, \\ &\sum_{i=0}^{\nu} y^{\nu-i}\psi_{2i+1}(x,\ y,\ z) + \ldots = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où les ϕ, ψ sont des polynomes homogènes en x, y, z dont le degré est indiqué par l'indice. Opérons la transformation

$$x = x'\,z', \quad y = y'z', \quad z = z'.$$

En supprimant les accents pour simplifier l'écriture, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\ y^{\nu-i} z^{i} \phi_{2i+1}(x,\ y,\ 1) + \ldots = 0\,, \\ &\Sigma\ y^{\nu-i} z^{i} \psi_{2i+1}(x,\ y,\ 1) + \ldots = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ces équations représentent deux surfaces ayant la droite $y = 0$, $z = 0$ comme droite multiple d'ordre ν. Les plans tangents à ces surfaces en un point $(x,\ o,\ o)$ ont pour équations

$$\Sigma\, y^{\nu-i} z^{i} \phi_{2i+1}(x, 0, 1) = 0, \quad \Sigma\, y^{\nu-i} z^{i} \psi_{2i+1}(x, 0, 1) = 0.$$

En éliminant y, z entre ces équations, par exemple par la méthode de Sylvester, on obtient un polynome de degré $2\,\nu\,(\nu + 1)$ en x. La courbe intersection des surfaces (2) s'appuie donc en $2\,\nu\,(\nu + 1)$ points sur la droite $y = z = 0$. Celle-ci correspond à la droite infiniment voisine de l'origine, commune aux surfaces (1), d'où le résultat.

9. Nous avons dit (n° 3) que l'on pouvait supposer que sur une surface F_1, le point infiniment voisin de A sur s_0 n'était pas uni parfait pour l'involution déterminée par I_p sur cette surface. Nous allons montrer, par un exemple, que l'on peut au contraire supposer que c'est le point infiniment voisin de A sur la droite s qui est uni parfait pour cette involution.

Considérons, dans l'espace ordinaire, l'homographie de période p

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \epsilon^2 x_2 : \epsilon^2 x_3 : \epsilon x .$$

Le point A coïncidera avec O_1, le plan σ avec $x_4 = 0$ et la droite s avec $x_2 = x_3 = 0$. La variété V coïncide avec l'espace.

Opérons la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : y_1 y_4 ,$$

qui fait correspondre le point O_1' au point infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_2 = x_3 = 0$. A l'homographie considérée correspond l'homographie

$$y_1' : y_2' : y_3' : y_4' = y_1 : \epsilon y_2 : \epsilon y_3 : \epsilon y_4 .$$

Le point infiniment voisin de A sur S est donc uni parfait pour I_p.

Désignons par $\phi(x_2, x_3)$, $\psi(x_2, x_3)$, $\chi(x_2, x_3)$ des polynomes homogènes en x_2, x_3, dont le degré est indiqué par l'indice et dont les coefficients sont variables.

Les surfaces F_0' ont pour équation

$$x_1^\nu \phi_\nu x_4 + x_1^{\nu-1} \phi_{\nu-1} x_4^3 + \dots \\ + x_1^{\nu-i} \phi_{\nu-i} x_4^{2i+1} + \dots + \phi_0 x_4^p + \phi_p = 0.$$

Les surfaces F_1 ont pour équation

$$x_1^{p-1} \psi_1 + x_1^{p-2} \psi_0 x_4^2 + x_1^{\nu-2} \psi_\nu x_4^3 + \dots \\ + x_1^{\nu-i-2} \psi_{\nu-i} x_4^{2i+3} + \dots + \psi_2 x_4^{p-2} = 0.$$

Enfin, les surfaces F_2 ont pour équation

$$x_1^{p-1} x_4 + x_1^\nu \chi_{\nu+1} + x_1^{\nu-1} \chi_\nu x_4^2 + \dots \\ + x_1^{\nu-i-1} \chi_{\nu-i} x_4^{2i+2} + \dots + \chi_1 x_4^{2\nu} = 0.$$

On voit que sur une surface F_1, les surfaces F_0' découpent des courbes ayant la multiplicité $\nu + 1$ en A, ν

tangentes étant confondues avec s et une se trouvant dans σ.

Sur une surface F_2, tangente en A au plan σ ou $x_4 = 0$, les surfaces F'_0 découpent des courbes ayant la multiplicité p en A.

Nous reviendrons prochainement sur ce cas, que nous étudierons d'une manière générale.

Prague, le 13 mai 1948.