téristiques, la suite de Laplace envisagée a la période six et réciproquement. On doit donc avoir :

$$U_3 + 2\,a\,V_2 = 0, \quad V_3 + 2\,b\,U_2 = 0,$$

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4\,(b^{01} + c_1) = 0,$$

$$\beta = 2\,(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4\,(a^{10} + c_2) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(\log\, b\, h_1)^{01} = 0, \quad (\log\, a\, k_1)^{10} = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux relations précédentes soient des identités. On retrouve ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que deux points caractéristiques.

LES INVOLUTIONS AYANT UN NOMBRE FINI DE POINTS UNIS APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

par Lucien GODEAUX,

Professeur à l'Université de Liége

---

1. — Considérons un système linéaire, triplement infini, de surfaces algébriques

$$\lambda_1\,\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2\,\varphi_2 + \lambda_3\,\varphi_3 + \lambda_4\,\varphi_4 = 0$$

et supposons que ce système soit de degré supérieur à l'unité. Il n'est par suite pas composé au moyen d'un faisceau de surfaces, ni d'une congruence linéaire de courbes. Les équations

$$\frac{X_1}{\varphi_1} = \frac{X_2}{\varphi_2} = \frac{X_3}{\varphi_3} = \frac{X_4}{\varphi_4} \qquad (1)$$

définissent une correspondance rationnelle entre les espaces (X) et (x). A une surface irréductible Φ,

$$\Phi\,(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,$$

la transformation (1) fait correspondre une surface

$$\Phi\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0.$$

Soit F,

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

une composante irréductible de cette surface qui ne soit pas fondamentale pour la transformation (1). Parmi les points x que (1) fait correspondre à un point de X de Φ, un certain nombre, n, appartiennent à F et on a une correspondance rationnelle $(1, n)$ entre les surfaces Φ et F. Les groupes de n points de F qui correspondent aux points de Φ forment une involution I_n, d'ordre n. Un point de la surface F appartient en général à un seul groupe de I_n. La surface Φ est appelée image de I_n.

Parmi les points de Φ, il en est auxquels correspondent des groupes de I_n dont les n points ne sont pas distincts ; ces points de Φ sont appelés points de diramation de la correspondance entre Φ et F. Un point de F qui compte pour plusieurs dans le groupe de I_n auquel il appartient est appelé point de coïncidence ou point uni de I_n. En général, les points de diramation et par suite les points unis de I_n sont en nombre simplement infini, mais ils peuvent également être en nombre fini. C'est ce dernier cas que nous avons étudié.

2. — C'est la théorie des surfaces hyperelliptiques qui a fourni les premiers exemples d'involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Dans leurs recherches sur ces surfaces [1], MM. Enriques et Severi d'une part, MM. Bagnera et De Franchis d'autre part, ont montré que toute surface hyperelliptique est l'image d'une involution appartenant à une surface de Jacobi, représentant les couples de points d'une courbe de genre deux. Si l'on fait abstraction des involutions rationnelles ou référables à des réglées (c'est-à-dire dont les images sont des surfaces rationnelles ou référables, par des transformations birationnelles, à des surfaces réglées), toutes ces involutions ne présentent qu'un nombre fini de points unis. La raison en est un théorème de M. Enriques [2] d'après lequel, si Φ est l'image d'une involution quelconque, appartenant à une surface F, au système canonique de Φ correspond sur F un système dont les courbes, augmentées de la courbe lieu des points unis, sont des courbes canoniques de F. Or, pour la surface de Jacobi, on a $p_g=1$ et la courbe canonique est d'ordre zéro; par suite, on ne peut avoir qu'un nombre fini de points unis.

MM. Enriques et Severi ont basé leurs recherches sur le théorème fondamental suivant : Une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface de Jacobi, est engendrée par un groupe fini de transformations birationnelles de la surface en elle-même. En d'autres termes, si l'involution est d'ordre n, il existe n transformations birationnelles de la surface en elle-même, $T_1=1, T_2, \ldots, T_n$ qui, appliquées à un

[1] Enriques et Severi, *Intorno alle superficie iperellittiche*, Rend. R. Accad. Lincei (1907-1908); *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, Acta Mathematica, **32** et **33** (1909). — Bagnera et De Franchis, *Sopra le superficie che hanno le coordinate del punto generico esprimabili con funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri*, Rend. Lincei (1907); *Le superficie algebriche le quali ammettono una rapresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche*, Memorie Soc. Ital. delle Scienze (1908) ; *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro*, Rend. Circolo matem. di Palermo (1910).

[2] Enriques, *Rireche di geometria sulle superficie algebriche*, Memorie R. Accad. di Torino (1893).

point de la surface, fournissent les n points du groupe contenant le point envisagé.

3. — Le théorème précédent a été étendu par M. Enriques (3) aux surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), c'est-à-dire aux surfaces qui peuvent, par des transformations birationnelles, se ramener à une surface d'ordre $2\pi - 2$, à sections de genre π, de l'espace à π dimensions. Nous avons ensuite entrepris la classification des involutions de genres un appartenant à une surface de genre un. Supposant n premier, nous avons montré que l'on a $n = 2, 3$ [1, 2] (4). Ensuite, nous sommes parvenus à établir que les valeurs possibles de n sont 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 et à construire des surfaces images des différentes involutions obtenues [3, 6, 7].

Les points de diramation des surfaces images sont des points doubles, coniques ou singuliers ; ils présentent précisément les mêmes singularités que dans le cas des surfaces de genres un représentant des involutions appartenant à une surface de Jacobi, cas étudié par MM. Enriques et Severi dans leurs travaux cités plus haut.

Un autre problème se présente alors : Déterminer dans quelles conditions une surface de genres un est l'image d'une involution appartenant à une surface de genres un. Chaque involution doit être traitée séparément et c'est ce que nous avons fait dans la plupart des cas [7, 18, 28, 35, 36, 37, 46] ; nous avons en particulier considéré les surfaces images du quatrième ordre.

4. — Nous avons pu aborder par des méthodes analogues l'étude des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0, P_6 = 1$), c'est-à-dire entre deux surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (5). Tout d'abord, nous avons pu étendre aux surfaces en question le théorème fondamental de MM. Enriques et Severi, et démontrer que les facteurs premiers de n ne peuvent être que 2 et 3 [4, 5]. Nous avons ensuite démontré que l'on a $n = 2, 3, 4, 6$ et 8, et construit les surfaces images [9, 17]. En même temps, nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres zéro, bigenre un, représente une involution appartenant à une surface de mêmes caractères.

5. — Le théorème de MM. Enriques et Severi est encore applicable aux correspondances rationnelles entre une surface de genres zéro, bigenre un et une surface de genres un. Nous avons montré que l'on a $n = 2, 4, 6, 8, 12$ ou 16 [21] et résolu les problèmes analogues à ceux qui ont été signalés plus haut.

(3) Enriques, *Le superficie di genere uno*, Rend. R. Accad. Bologna (1908).

(4) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de de ce travail.

(5) Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, Memorie Soc. italiana delle Scienze (1896); *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, Memorie Soc. italiana delle Scienze (1906). — Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno e loro casi particolari*, Rend. Circolo Matem. di Palermo (1910).

M. ENRIQUES a établi [6] que toute surface de genres zéro, bigenre un, est l'image d'une involution privée de points unis appartenant à une surface de genres un. Nous avons montré [12] que cette dernière surface possède deux autres involutions d'ordre deux, l'une de genres un, l'autre rationnelle. Nous sommes revenus à diverses reprises sur ces questions et avons en particulier établi les équations de la correspondance dont il vient d'être question [40, 41].

Le théorème de M. Enriques qui vient d'être rappelé donne la raison pour laquelle le diviseur de Severi d'une surface de genres zéro, bigenre un, est égal à deux. Par la considération des involutions privées de points unis appartenant à une surface quelconque, nous avons pu construire des surfaces dont le diviseur de Severi est un nombre quelconque [16, 19].

6. — Nous avons réussi à étendre le théorème de MM. Enriques et Severi aux surfaces algébriques quelconques et établir que : *Une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même* [11].

Les premières études à faire au sujet de ces involutions concernent les involutions d'ordre premier. Envisageons donc une involution I_p, d'ordre premier p, appartenant à une surface algébrique F, et soient T la transformation birationnelle de F génératrice de I_p, Φ une surface image de I_p. Si P est un point uni de I_p (supposé simple pour F, ce qui n'est pas une restriction), la transformation T détermine, dans le faisceau des tangentes à F en P, soit l'identité, soit une involution cyclique d'ordre p. Dans le premier cas, P est dit point uni parfait, dans le second, point uni non parfait. D'après une remarque de M. SEVERI [7], le premier cas se présente toujours lorsque $p=2$. Il ne peut d'autre part se présenter pour $p>2$ lorsque la surface Φ est de genres un, ou de genres zéro, bigenre un, mais il est aisé de voir qu'il n'en est plus ainsi lorsque la surface Φ possède une courbe canonique effective [22, 23, 24].

Le cas des involutions d'ordre deux a tout d'abord fait l'objet de nos recherches [14, 15], puis nous avons étudié les involutions appartenant à la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois, non hyperelliptique [23, 25, 30, 33], en profitant de certains résultats de G. HUMBERT [8]. Ici s'est présenté le premier exemple d'une involution rationnelle, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface non rationnelle ni référable à une réglée [33].

Dans le cas général, lorsque le point P est uni parfait, le point de diramation correspondant est un point multiple d'ordre p, conique, de la surface Φ [26]. Lorsque P est uni non parfait, la singularité de la surface Φ

(6) ENRIQUES, *Un osservazione relativa alle superficie di bigenere uno*, Rend. R. Accad. Bologna (1907).

(7) SEVERI, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali*, Atti R. Istituto Veneto (1908).

(8) G. HUMBERT, *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois*, Journal de Liouville (1896).

au point de diramation correspondant est plus compliquée : ce point peut être un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $^1/_2(p-1)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire [26]. C'est ce qui se présente toujours si $p=3$ [31].

7. — P étant un point uni non parfait, transformons birationnellement F en une surface F′ de manière à ce qu'au point P corresponde une courbe exceptionnelle p'. A I_p correspond une involution cyclique I'_p de F′, engendrée par une transformation birationnelle T′ de cette surface en elle-même. T′ engendre sur la courbe p' une involution cyclique d'ordre p présentant deux points unis P'_1, P'_2. Ils correspondent aux points unis de I_p situés dans le domaine du premier ordre de P sur la surface F. Les points P'_1, P'_2 peuvent être unis parfaits ou non parfaits pour I'_p. Dans le second cas, on pourra également étudier la manière dont T′ se comporte dans le voisinage de chacun des points P'_1, P'_2 sur F′. Et ainsi de suite. Retournant à la surface F, on connaîtra ainsi la manière dont se comporte la transformation T dans les domaines des différents ordres successifs du point P sur la surface F. Construisons alors sur cette surface un système linéaire de courbes C, dépourvu de points-base, composé au moyen de I_p et appelons C_1 les courbes C passant par P. On pourra déterminer les différentes branches des courbes C_1 ayant pour origine P et la manière dont elles se comportent vis-à-vis de I_p dans les domaines successifs de P sur F. Soit Π le point de diramation homologue de P sur la surface Φ et arrangeons-nous de manière à ce que les sections hyperplanes de Φ correspondent aux courbes C. Alors, aux courbes C_1 correspondent les sections de Φ par les hyperplans passant par Π. Le nombre des tangentes à ces courbes en Π est égal au nombre des branches des courbes C_1 d'origine P, mais il peut arriver que certaines de ces tangentes doivent être comptées plusieurs fois. Il suffit, pour s'en assurer, de considérer le cas où la surface F est un plan, la transformation T étant une homographie non homologique [49, 51].

Nous avons pu démontrer que si $p=3$, $P'_1\,P'_2$ sont des points unis parfaits de I'_p [48] et que réciproquement, si P'_1, P'_2 sont des points unis parfaits pour I'_p, on a $p=3$ [50]. Nous avons ensuite étudié le cas où un seul des points P'_1, P'_2 est uni parfait pour I'_p. Le point de diramation correspondant à P est alors multiple d'ordre $^1/_2(p-1)+1$ pour Φ, le cône tangent étant formé d'un cône d'ordre $^1/_2(p-1)$ et d'un plan [52, 53].

Le cas général paraît assez difficile à traiter ; nous avons cherché à l'examiner par les méthodes de la géométrie projective différentielle [47].

8. — Une autre question se présente dans l'étude des involutions appartenant à une surface algébrique F, c'est la relation qui existe entre les irrégularités de F et d'une surface Φ image de l'involution. Nous bornant toujours au cas des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, nous avons commencé par étudier les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière et particulièrement les systèmes de courbes tracés sur la surface image [38, 39]. Ensuite, nous avons

pu établir que si une surface irrégulière F contient une involution régulière d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, elle est l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface de même irrégularité [43]. Nous avions tout d'abord traité le cas d'une surface de Picard, retrouvant ainsi un théorème que MM. Enriques et Severi avaient établi par une tout autre voie [42]. Nous avons aussi cherché à établir une autre généralisation de ce dernier théorème, en considérant une correspondance rationnelle entre deux surfaces de même irrégularité. On obtient alors une correspondance rationnelle entre les variétés de Picard attachées à ces surfaces [45]. Enfin, nous avons considéré les systèmes de courbes tracés sur une surface régulière image d'une involution d'ordre trois, appartenant à une surface irrégulière [44].

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Sur les transformations rationnelles entre deux surfaces de genres un* ; C. R., 421-423 (août 1912).

[2] *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 310-328 (1913).

[3] *Sur les involutions cycliques d'ordre 2^α et de genres un sur une surface de genres un* ; Nachrichten K. Gesell. zu Goettingen (1913).

[4] *Sur les involutions appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un* ; C. R., 1306-1308 (avril 1913).

[5] *Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a=p_g=0$, $P_6=1$* ; Bull. Soc. Math. de France, 178-194 (1913).

[6] *Classification des involutions de genres un appartenant à une surface de genres un* ; C. R., 1737-1739 (juin 1913).

[7] *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* ; Annales de l'Ecole Normale supérieure, 357-430 (1914); 51-70 (1919).

[8] *Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à certaines surfaces algébriques* ; Mémoires de la Soc. des Sciences du Hainaut, 1-35 (1913).

[9] *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres $p_a=p_g=0$, $P_6=1$* ; Bull. de l'Acad. roumaine, 65-67 (1913).

[10] *Sur la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois* ; Bull. de l'Acad. de Cracovie, 529-547 (1913).

[11] *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* ; Rend. R. Accad. dei Lincei, 408-413 (mars 1914).

[12] *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un* ; Rend. R. Accad. dei Lincei, 682-686 (mai 1914).

[13] *Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique* ; C. R., 851-853 (mars 1914).

[14] *Sur les surfaces algébriques doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* ; C. R., 1261-1263 (mai 1914).

[15] *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* ; Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 289-312 (1914).

[16] *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* ; Bull. de l'Acad. de Cracovie, 362-368 (1914).

[17] *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* ; Bull. Soc. Math. de France, 89-117 (1915).

[18] *Sur les surfaces de genres un, triples, douées d'un nombre fini de points de diramation* ; C. R. (décembre 1914).

[19] *Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* ; Bull. des Sciences math. (1915).

[20] *Sur les involutions de genres un et de seconde espèce appartenant à une surface de genres un* ; Annales de l'Université de Jassy, 247-254 (1915).

[21] *Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un* ; Annaes da Academia Polyt. do Porto (1916).

[22] *Sur les involutions appartenant aux surfaces algébriques* ; C. R., 261-262 (sept. 1916).

[23] *Sur des surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois* ; Bull. de l'Acad. Roumaine, 271-274, 283-286, 373-378 (1916).

[24] *Etude d'une involution cubique douée d'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique* ; Revista Soc. Matem. española (1917).

[25] *Mémoire sur les surfaces algébriques liées à une courbe algébrique de genre trois* ; Arxius de l'Institut de Ciencias, Barcelone, 89-107 (1917).

[26] *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique ;* Bull. Soc. Math. de France, 1-16 (1919).

[27] *Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 855-864 (1919).

[28] *Sur les plans doubles de genres un et de rang trois* ; Annaes da Academia Polyt. do Porto (1920).

[29] *Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles coniques* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 554-560 (1920).

[30] *Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert* ; Bull. des Sciences math., 14-20 (1921).

[31] *Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 105-124 (1921).

[32] *Sur les surfaces du quatrième ordre contenant des courbes rationnelles* ; Revista R. Acad. Madrid (1921).

[33] *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface algébrique de genre trois* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 653-665, 694-702 (1921).

[34] *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 189-196 (1922).

[35] *Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 443-456 (1922).

[36] *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 75-88, 360-379, 459-483 (1923).

[37] *Sur les involutions d'ordre huit appartenant à une surface de genres un* ; Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1-33 (1924).

[38] *Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière* ; Congrès intern. des Mathématiciens, Toronto, 733-737 (1924).

[39] *Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 434-446 (1924); 37-47, 157-166 (1925).

[40] *Sur un plan double de genres zéro et de bigenre un* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 527-534 (1926).

[41] *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 726-741, 892-904 (1926); 114-133 (1927).

[42] *Sur les surfaces de Picard de diviseur deux* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 394-414 (1927).

[43] *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 524-543 (1927).

[44] *Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 707-724 (1927).

[45] *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant même irrégularité* ; Bull. Acad. roumaine, 16-19 (1927).

[46] *Recherches sur les correspondances rationnelles du sixième ordre entre deux surfaces de genres un* ; Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége, 1-42 (1928).

[47] *Sur les correspondances ponctuelles entre surfaces* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 408-420 (1929).

[48] *Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre trois appartenant à une surface algébrique* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 553-560 (1929).

[49] *Sur les homographies planes cycliques* ; Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége, 1-26 (1929).

[50] *Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 956-965 (1929).

[51] *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* ; Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége (1930).

[52] *Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* ; C. R., 154-155 (janvier 1930).

[53] *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* ; Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 448-465 (1930).